53
П-7

Б.Н.Петров, И.И.Гольденблат
Г.М.Уланов, С.В.Ульянов

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ И КВАНТОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Издательство «Наука»

Б.Н.Петров, И.И.Гольденблат
Г.М.Уланов, С.В.Ульянов

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Б.Н.Петров, И.И.Гольденблат
Г.М.Уланов, С.В.Ульянов

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ И КВАНТОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Физические и информационные аспекты

Издательство «НАУКА»
Москва 1982

УДК 681.327.1

Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами (физические и информационные аспекты). Петров Б. Н., Гольденблат И. И., Уланов Г. М., Ульянов С. В. М.: Наука, 1982.

Монография посвящена изложению физических и информационных аспектов проблемы управления новыми объектами теории систем — релятивистскими и квантовыми динамическими системами. Основное внимание уделено проблеме описания физических процессов в объектах и системах автоматического управления, методам формализации, установления соответствия моделей с исходным объектом. Излагаются основы информационной теории управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами.

Ил. 27. Табл. 18. Библиогр. 744 назв.

Ответственный редактор

академик

О. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие теории и практики автоматического управления охватывает широкий круг важнейших научных и научно-технических проблем из различных областей знания и деятельности человека. Современная теория управления включает в себя разработку методов и специфических для управления подходов к анализу качественно новых процессов, в числе которых на переднем плане оказались релятивистские, квантово-механические и информационные процессы и объекты.

В целом для современного этапа научно-технического развития характерно все более широкое применение релятивистских и квантовых систем. К этим системам принадлежат вся область ядерной энергетики (включая управляемый термоядерный синтез), ускорители заряженных частиц, лазерная техника (лазеры как средство передачи информации, гироскопы на лазерах), вычислительная техника и другие системы, в которых используются сверхпроводящие элементы, и т. п. Следует иметь в виду, что системы управления релятивистскими и квантовыми объектами имеют существенные особенности, сильно отличающие их от классических систем управления. Фундаментальные принципы теории относительности и квантовой теории (включая квантовую макрофизику) и основанные на них процесы измерения физических параметров и связей между ними играют важную роль при проектировании систем управления и разработке алгоритмов управления релятивистскими и квантовыми объектами.

Следует отметить, что построение указанных моделей представляет собой существенную задачу теории автоматического управления. Сама проблема описания процессов управления ныне далеко вышла за рамки классических механических систем. Она возникла еще на заре развития теории автоматического управления и была связана с отказом от квазистатического рассмотрения действия регулятора, с началом динамического исследования процессов регулирования и установлением роли математических моделей в познании этих процессов.

Именно поэтому в книге основное внимание уделено методическим проблемам: общим и прикладным аспектам теории относительности и квантовой теории, а также конкретным решениям, таким, как проблема инерциальной навигации космическими летательными аппаратами (КЛА) с учетом релятивистских эффектов, общей теории построения моделей квантовых систем, инва-

риантности и чувствительности квантовых систем и др. Особое внимание при изложении релятивистской теории динамических систем было уделено процессам измерения в различных системах отсчета таких физических параметров, как пространственные расстояния и промежутки времени, напряженности электромагнитного и гравитационного полей и др., имеющих принципиальное значение для построения соответствующих моделей управления.

Значительное внимание было уделено проблеме Вундгейлера и описанию релятивистских объектов первого и второго рода, что имеет принципиальное значение при выборе физически реализуемых моделей управления и др.

В предлагаемой читателю книге изложение указанных выше вопросов приведено в пяти главах и двух приложениях.

В главе 1 рассмотрены некоторые общие вопросы теории моделей динамических систем, ранее не рассматривавшиеся в научной литературе: проблема Вундгейлера и ее роль в построении моделей релятивистских и квантовых динамических систем. Приведенное решение проблемы Вундгейлера, ее математические и физические аспекты имеют принципиальное значение при выборе физически реализуемых моделей процессов управления релятивистскими и квантовыми системами. Подробно рассмотрены так называемые объекты первого и второго рода, которые существенно используются при изложении в последующих главах принципиальных вопросов теории моделей релятивистских и квантовых систем.

Глава 2 посвящена вопросам описания моделей релятивистских динамических систем в рамках специальной теории относительности (СТО). Наряду с освещением основных положений СТО в этой главе уделено большое внимание изложению таких достаточно специфических, но столь важных для теории управления вопросов, как «парадокс с часами», измерения пространственных расстояний и отрезков времени в пространстве Минковского, характеристики релятивистских уравнений Гамильтона — Якоби и их связь с уравнениями движения релятивистских динамических систем и др.

Подробное разъяснение физических аспектов затрагиваемых в данной главе вопросов СТО позволит специалистам в области общей теории динамических систем увидеть основные отличия и особенности моделей и алгоритмов управления релятивистскими динамическими системами от аналогичных моделей, описываемых в рамках механики Ньютона.

Глава 3 является органическим продолжением главы 2 и посвящена изложению вопросов теорий электромагнитного и гравитационного полей применительно к задачам общей теории управления. Здесь более подробно (чем в обычных курсах и монографиях, посвященных общей теории относительности (ОТО)) изложены вопросы процессов измерения в римановых пространствах, рассмотрены физические особенности теории гравитацион-

ного поля и дано возможное обобщение уравнений гравитационного поля, показана связь с характеристиками релятивистского уравнения Гамильтона — Якоби. Большое внимание уделено экспериментальным результатам проверки эффектов ОТО. В частности, приводятся результаты определения орбит планет Солнечной системы с помощью радиолокационных методов, полученные группой акад. В. А. Котельникова. Эти результаты имеют большое значение для задач навигации КЛА. Кроме того, приведены результаты проверки эффектов гравитационного смещения в лабораторных условиях. Современные задачи управления движением КЛА вызвали необходимость оценить влияние релятивистских эффектов в проблеме дальней космической навигации. В данной главе рассмотрена задача акад. Л. И. Седова об инерциальной навигации КЛА с учетом релятивистских эффектов как в рамках СТО, так и ОТО.

Изложение основных положений теории квантовых динамических систем приведено в главе 4 на основе так называемого квантового постулата, позволяющего рассматривать различные квантовые объекты как элементы единой системы. Такой подход к теории моделей квантовых систем позволяет перенести идеи классической теории управления на квантовые объекты. В этой же главе отмечены особенности описания нелинейных квантовых систем на основе квантового постулата, освещены вопросы о каузальности (появления сверхсветовых скоростей) квантовых уравнений, рассмотрены конкретные примеры квантовых систем. Приведено обобщение на взаимодействующие квантовые системы.

Информационные аспекты теории управления как классическими, так и релятивистскими квантовыми динамическими системами обсуждаются в главе 5. Здесь основное внимание уделяется вопросам обобщения результатов классической информационной теории управления на релятивистские и квантовые системы. Приведены конкретные примеры информационного подхода к анализу процессов управления классическими, релятивистскими и квантовыми динамическими системами.

Вспомогательный материал приведен в соответствующих приложениях. Приведенная достаточно обширная библиография позволит читателю восстановить неосвещенные в данной монографии вопросы теории релятивистских и квантовых динамических систем.

Таким образом, в целом книга посвящена физическим и информационным аспектам проблем управления релятивистскими и квантовыми объектами.

По предложению руководителя данной работы академика Б. Н. Петрова, более подробному изложению моделей конкретных систем управления релятивистскими и квантовыми объектами должна быть посвящена отдельная работа.

Настоящая книга может рассматриваться как завершающая монография из серии трех книг, выпущенных издательством «Нау-

ка», написанных по теории сложных систем управления коллективом авторов с участием и под руководством академика Б. Н. Петрова. Последняя монография появляется в свет после его смерти, и поэтому авторы этих монографий считают необходимым для себя высказать слова памяти своему соавтору и редактору.

Б. Н. Петров был выдающимся советским ученым и организатором науки, вице-президентом Академии наук СССР. Особенно велики заслуги Бориса Николаевича в развитии фундаментальных научных исследований в области проблем управления, в развитии теории и практики управления летательными аппаратами и в других областях.

Начало научной деятельности Б. Н. Петрова в 1940—1945 гг. связано с проблемой автоматизации контроля изделий массового производства машиностроительной промышленности, так необходимых для удовлетворения нужд фронта в Великой Отечественной войне. В результате этих работ была внедрена серия многопозиционных автоматов контроля изделий. Б. Н. Петров внес большой вклад в научные основы построения автоматических копировальных систем. В развитие этих работ под руководством академика Н. Н. Лузина им был создан метод структурных преобразований схем автоматических систем управления и разработан адекватный математический аппарат — алгебра структурных преобразований динамических систем. Им были проведены глубокие исследования в области приближенных методов интегрирования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Эти работы были высоко оценены академиком Н. Н. Лузиным.

Ученик В. С. Кулебакина и Н. Н. Лузина, Б. Н. Петров является одним из основоположников теории инвариантности систем автоматического управления. В первый критический период становления теории инвариантности, когда многими отвергалась сама идея компенсации возмущений — инвариантности, Б. Н. Петров открыл и сформулировал критерий физической реализуемости условий инвариантности, указал структуры физических систем, удовлетворяющих ее условиям. Этот критерий, названный принципом двухканальности, разрешил споры по главному направлению дискуссии и восстановил теорию инвариантности в правах истинной научной теории.

Большое значение в научной деятельности Б. Н. Петрова заняли проблемы оптимизации управления летательными аппаратами и в первую очередь проблемы терминального управления этими системами и превращения их в так называемые системы терминального управления нового поколения.

Под руководством Б. Н. Петрова разработаны важнейшие нелинейные проблемы теории управления, в том числе основы теории нелинейных сервомеханизмов, нелинейных инвариантных систем, точные и приближенные методы исследования динамики сложных нелинейных систем управления. Он является инициа-

тором и создателем оригинального направления в теории адаптивных систем — теории беспоисковых самонастраивающихся систем управления, в частности, Б. Н. Петровым внесен существенный вклад в разработку проблемы адаптивного управления подвижными объектами.

В последнее время Б. Н. Петров значительное внимание уделял теоретико-информационным проблемам процессов управления. В этом направлении ему принадлежат развитие общих методов в создании информационных моделей и описании сложных объектов управления, работающих в условиях большой неопределенности, становлении информационных подходов в анализе и синтезе процессов управления, разработка основ информационной теории управления нечеткими системами, оптимизация нечетких систем по информационным критериям.

Б. Н. Петров был страстным публицистом, выступал на страницах центральных газет и журналов с изложением актуальных проблем научно-технического прогресса в нашей стране. Им воспитана плеяда талантливых ученых, с успехом продолжающих и развивающих традиции его научной школы. Человек огромного научного кругозора и большой эрудиции, академик Б. Н. Петров придавал большое значение воспитанию научной молодежи, подготовке высококвалифицированных специалистов в области автоматического управления.

Научная деятельность Бориса Николаевича Петрова была высоко оценена Советским правительством. Ученому была присуждена Ленинская (1966 г.) и Государственные (1972 г., 1981 г.) премии. Он награжден четырьмя орденами Ленина, орденом Октябрьской Революции и др. орденами. Работы Б. Н. Петрова получили широкое международное признание. Он был избран действительным членом многих иностранных Академий наук: ГДР (1971 г.), ЧССР (1972 г.), ВНР (1973 г.), ПНР (1974 г.) НРБ 1978 г.), а также действительным членом Международной академии астронавтики и почетным доктором Чешского политехнического института. Б. Н. Петров был награжден Золотой медалью Национального центра космических исследований Франции, Золотой медалью Чехословацкой Академии наук, Золотым Знаком Общества немецко-советской дружбы.

За выдающиеся работы в области теории и систем автоматического управления и экспериментальных исследований по освоению космического пространства Академия наук СССР учредила Золотую медаль им. Б. Н. Петрова, которая будет присуждаться советским и иностранным ученым один раз в три года.

В марте 1980 г. незадолго до своей кончины Борис Николаевич утвердил программу предлагаемой читателю монографии, рукопись которой была подготовлена его соавторами уже без него. Данная книга является первой из задуманных отдельной серией публикаций по затрагиваемым вопросам и продолжает предыдущие исследования соавторов.

Глава 1 настоящей книги составлена Б. Н. Петровым, И. И. Гольденблатом, Г. М. Улановым, С. В. Ульяновым; главы 2 и 3 — И. И. Гольденблатом, Г. М. Улановым, С. В. Ульяновым; пп. 3.2, 3.51, 3.52, 3.53, 3.7, 3.12.2, 3.20 и 3.21 — С. В. Ульяновым; глава 4— И. И. Гольденблатом, С. В. Ульяновым; глава 5— Б. Н. Петровым, Г. М. Улановым и С. В. Ульяновым; п. 5.17.4 написан в соавторстве с Ю. П. Пономаревым; Приложение 1 — И. И. Гольденблатом; Приложение 2 — С. В. Ульяновым; библиография составлена С. В. Ульяновым.

Авторский коллектив выражает глубокую благодарность академику Л. И. Седову, докт. физ.-мат. наук И. Д. Новикову, докт. техн. наук Е. И. Кринецкому, докт. физ.-мат. наук М. С. Пинскеру за полезные замечания при обсуждении отдельных разделов монографии.

Авторы

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. Предварительные замечания

Особенностью развития новых технических систем и систем управления является широкое использование процессов, в которых все более существенны релятивистские и квантовые эффекты.

Так, например, к релятивистским техническим системам следует отнести современные ускорители заряженных частиц, ядерные реакторы (на тепловых и быстрых нейтронах), различные системы ядерной энергетики, разрабатываемые для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза, и другие перспективные системы (например, системы управления ядерными ракетными двигателями для космических летательных аппаратов (КЛА) [1—3] или инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов [4—5]).

К квантовым системам следует отнести все те системы управления, в которых используются или могут быть использованы явления квантовой макрофизики (сверхпроводимость, сверхтекучесть, аномалии теплопроводности др.). Такими системами являются квантовые усилители высокой частоты, различного типа лазерные системы управления (лазеры как средство передачи информации, лазерные гироскопы в системах инерциальной навигации и т. д.), вычислительные системы и элементы автоматики, использующие явление сверхпроводимости и др. [1—3, 6—28].

Особое значение в последние годы приобретает учет релятивистских и квантовых эффектов в системах передачи и обработки информации — релятивистская и квантовая теория информации [29, 30—35], значение которых все возрастает в связи с развитием информационной теории управления [36—40].

Создание систем управления объектами, в основу которых положены принципы теории относительности и квантовой механики, требует объединения принципов и методов науки об управлении и современной физики.

Характерной иллюстрацией объединения указанных принципов может служить проблема управляемого термоядерного синтеза, в названии которой уже объединены термины «управление» и «термоядерный синтез». Особое значение проблем управления в этой области было подчеркнуто в докладе Э. Теллера «Современные двигатели внутреннего сгорания» [41] (впервые открыто доложенного 7 мая 1972 г. с разрешения правительства США на 7-й Международной конференции по квантовой электронике в Монреале, Канада). В этом

докладе при рассмотрении проблемы управления термоядерного синтеза отмечается: «Если бы удалось сделать описываемый двигатель внутреннего сгорания, то получилась бы силовая электростанция мощностью несколько сотен мегаватт, обеспеченная горючим на неопределенно долгий срок работы. Она могла бы работать относительно чисто, без загрязнения среды и совершенно безопасно... Речь идет об использовании обсуждаемых «двигателей внутреннего сгорания» для космических полетов, причем известно уже несколько весьма привлекательных разработок этих проектов в Лос-Аламосе. Если произвести термоядерный взрыв, который приводит к температуре около 10 кэВ, то получим плазму с естественной скоростью расширения около 10^8 см/с. На инженерном жаргоне это означает удельный импульс порядка 10^5, что вполне годится для ускорения до 1/300 скорости света. Этого действительно можно добиться при подходящем выборе типа двигателя, который должен иметь мощность несколько тысяч мегаватт. Для набора скорости потребуется около суток, и можно будет достигнуть Марса за неделю, а за две недели совершить путешествие туда и обратно. Космонавта надо будет только хорошо защитить от 14 Мэв нейтронов».

Следует подчеркнуть, что указанные динамические системы и их разновидности возникли в результате решения фундаментальных научных проблем, характеризующих развитие современной науки. В первую очередь это развитие обусловлено созданием таких разделов современной физики, как теория относительности и квантовая теория.

Теория относительности в настоящее время пронизывает всю физику, она была и остается основой всего дальнейшего ее развития. Квантовая теория охватывает такие важнейшие разделы современной физики, как физика атома, ядра, элементарных частиц, а также квантовая макрофизика (явления сверхпроводимости, сверхтекучести и т. п.).

При проектировании динамических систем управления нельзя ограничиваться анализом только математической модели, вводя физическую интерпретацию модели только на последнем этапе проектирования. Как указывали Б. Н. Петров, А. В. Солодов и др. различные физические и технические ограничения должны учитываться в самом начале построения и исследования модели. Это требование особенно усиливается при проектировании релятивистских и квантовых систем.

Необычность этих систем и их работа в условиях сверхвысоких температур, давлений, скоростей, энергетических превращений и т. д. предъявляет особо высокие требования к глубине и полноте исследуемой физической модели.

Достаточно напомнить, например, что в разрабатываемых в настоящее время некоторых системах управляемого термоядерного синтеза температура плазмы должна быть поднята до многих десятков миллионов градусов, т. е. $\sim 200 \cdot 10^6$ К. Удержать такую плазму в ограниченном объеме могут только сверхсильные магнитные поля, создаваемые сверхпроводниками, т. е. квантовыми системами. Совершенно ясно, что реализация таких процессов

требует подбора материала, обладающего надлежащими физическими свойствами, решения сложных проблем прочности конструкций, работающих в очень сложных условиях и т. д. Создание и анализ физических моделей исследуемых систем и их моделей управления на каждом этапе проектирования должны сопровождаться анализом реализуемости (осуществимости) физических процессов не в узком математическом или абстрактном смысле этого термина, а с учетом всех многочисленных факторов и закономерностей, обеспечивающих их действительную физическую реализуемость.

В релятивистских и квантовых системах проявляются физические закономерности, не только не имеющие аналогов в дорелятивистской и доквантовой физике, но, наоборот, даже резко противоречащие им. В то же время новые закономерности, вскрытые современной физикой, характеризуются ненаглядностью возникающих здесь представлений и свойств исследуемых моделей.Такие основные понятия, как длина и промежуток времени, оказываются в релятивистской физике относительными, зависящими от системы отсчета; энергия покоящейся частицы оказывается тесно связанной с ее массой и скоростью света; масса сложной системы не равняется сумме масс ее частей (дефект массы), т. е. здесь целое не может быть представлено как сумма его частей; каждому квантовому объекту присуща одновременно как корпускулярная, так и волновая природа; энергетические барьеры, непреодолимые в классической механике, имеют только относительную непреодолимость (туннельные эффекты) и т. д.

Из изложенного следует, что системам и алгоритмам управления такими объектами также будут присущи особенности, не имеющие аналогов среди систем управления классическими объектами.

В первой части книги рассматриваются некоторые физические аспекты релятивистских и квантовых систем, важные с точки зрения теории систем управления. Так, особенности теории гравитационного поля излагаются с точки зрения проблем инерциальной навигации КЛА с учетом релятивистских эффектов. Аналогично излагаются вопросы квантовой теории на основе общего квантового постулата.

Вторая и третья части книги посвящены вопросам теории управления конкретными релятивистскими и квантовыми объектами в физическом и информационном аспектах.

1.2. Физические, расчетные и математические модели динамических систем

Имеют место существенные противоречия в определении таких понятий, как физическая, расчетная и математическая модели. Вместе с тем проблема создания моделей имеет фундаментальное значение.

Ниже формулируются по возможности развернутые качественные определения употребляемых в этой области понятий [39, 42].

1.2.1. Физические модели динамических систем. Под физической моделью какого-либо процесса, например процесса работы системы управления при внешнем воздействии, следует понимать по возможности полное (в соответствии с достигнутым уровнем знаний) описание этого процесса в физически содержательных терминах.

При построении физических моделей нередко требуется введение совершенно новых идей и понятий, противоречащих иногда уже сложившимся представлениям.

В физическую модель должны входить без всяких упрощений все известные функциональные, дифференциальные и прочие соотношения и связи между параметрами процесса. Физическая модель должна также содержать имеющиеся экспериментальные данные, относящиеся к рассматриваемому процессу, изложение гипотез, которые могут быть сформулированы по поводу еще не изученных связей и соотношений между параметрами системы.

Другими словами, физическая модель представляет собой содержательное отражение реальных явлений или процессов на уровне современных знаний.

Физическая модель не может быть создана чисто эмпирическим наблюдением данного класса явлений или процессов.

Сам по себе набор эмпирических суждений и соотношений носит довольно запутанный характер, в котором существенные стороны изучаемых явлений или процессов нередко тонут в массе случайных или несущественных факторов. Конечно, для создания любой физической модели (которая может рассматриваться как физическая теория) необходимы эксперименты и наблюдения. Однако понимание самих экспериментов (и это следует особо подчеркнуть) невозможно без теории изучаемого класса явлений и процессов.

Построение подлинной физической модели (или физической теории) означает сведение множества эмпирических данных (иногда безнадежно хаотических и даже противоречивых) к немногим фундаментальным положениям и принципам, в которых отражалось бы существо изучаемых процессов.

А. Эйнштейн в своей работе «О современном кризисе теоретической физики» [43] отметил: «Цель теоретической физики состоит в том, чтобы создать систему понятий, основанную на возможно меньшем числе логически независимых гипотез, которая позволила бы установить причинную взаимосвязь всего комплекса физических процессов».

Из этого следует, что познавательная ценность каждой теории тем выше, чем шире класс явлений и процессов, который этой теорией описывается.

Особые трудности, возникающие при создании физических моделей систем и процессов управления, состоят в том, что приходится использовать модели физических процессов, имеющих различную качественную природу, в единой системе. Кроме того,

модели процессов управления должны включать в себя целевые функционалы, определяющие назначение, эффективность и качество работы.

В целом можно отметить тенденцию к использованию в современных системах управления таких физических процессов и явлений, которые до недавнего времени считались объектом только чисто теоретических исследований.

1.2.2. Расчетные модели динамических систем. В реальных физических системах или устройствах обычно встречаются не с одним каким-либо классом явлений или процессов, уже хорошо изученных современной наукой, а с множеством новых еще недостаточно изученных явлений, кроме того, исходная информация об объекте или процессе может быть неполной или неопределенной. В результате всего этого физические модели реальных систем оказываются обычно весьма сложными и не вполне определенными, что сильно осложняет (или делает невозможным) их анализ. Все это приводит к необходимости создания расчетных моделей.

Расчетная модель также описывает процесс в физически содержательных терминах, но в отличие от физической модели в ней не должны учитываться параметры и факторы, которые в заданных условиях и границах не оказывают заметного влияния на ход процесса. При переходе от физической к расчетной модели сложные математические зависимости или соотношения должны быть заменены по возможности более простыми. В частности, во многих случаях переменные величины могут заменяться их средними постоянными значениями, нелинейные соотношения — линейными и т. д. По недостаточно изученным связям или параметрам системы в расчетную модель могут вводиться аппроксимирующие гипотезы. При этом необходимо, чтобы все аппроксимации обеспечивали наибольшую надежность системы в данных условиях ее работы (если речь идет о реальных технических устройствах).

Целесообразно иметь не одну, а систему аппроксимирующих моделей исследуемого процесса, каждая из которых имеет свои границы применимости (по принципу «от простого к сложному»).

Большое значение имеет принцип минимальной сложности аппроксимирующих моделей исследуемых процессов. Следует помнить, что аппроксимирующие формальные модели создаются в процессе абстрагирования от реальной физической модели.

Характерной чертой как физических, так и расчетных моделей управления в общем случае является, как отмечено выше, введение некоторых функционалов от изучаемых процессов. Экстремальные значения этих функционалов служат показателями оптимальности или эффективности процесса.

Всякая формализация требует такого упрощения реальной ситуации, которая дает возможность использования формальных методов современной математики и средств вычислительной техники. При этом нужно быть крайне осторожным, чтобы в процессе аппроксимации не отбросить каких-либо важных и существенных особенностей поведения исследуемых процессов в тех

или иных условиях. При всех упрощениях и отбрасывании различных несущественных факторов или малых параметров необходимо дать оценку границы применимости полученной модели, так как малые параметры могут оказать громадное влияние на устойчивость или качественный характер процесса.

Построение корректной расчетной модели изучаемого процесса является весьма сложной задачей, часто в процессе построения модели исследователю приходится проявлять настоящее искусство при реализации своей интуиции.

Интересно отметить, что один из крупнейших физиков современности П. А. М. Дирак советует учиться у инженеров искусству создания расчетных моделей [44]: «Система приближений, которой я буду пользоваться, в какой-то мере аналогична тем приближениям, какими пользуются в своих расчетах инженеры. Инженеру нужно получить результаты, а в стоящих перед ним проблемах имеется такое множество фактов, что большинством из них он вынужден пренебречь. У него нет времени подвергать все серьезному изучению, и он вырабатывает своего рода чувство, чем можно пренебречь и чем нельзя. Я думаю, что физики, работающие в области квантовой теории поля, также должны выработать аналогичное чувство в отношении того, чем допустимо и чем недопустимо пренебречь. Окончательный критерий состоит в том, является ли построенная теория последовательной и находится ли она в разумном согласии с экспериментом».

Таким образом, построение расчетной модели представляет собой процедуру, которая не следует никакому конкретному неизменному образцу. Существенным требованием является соответствие модели объекту, которое можно определять на основе порогов различимости и максимума количества информации, содержащейся в расчетной модели относительно объекта. В ряде случаев такой подход позволяет одновременно установить границу предельных возможностей формальных систем. Данный вопрос непосредственно связан с задачами моделирования динамических систем. Именно в соблюдении этих условий, как будет показано ниже, заключается искусство и научная интуиция исследователя.

1.2.3. Математические модели динамических систем. Под математической моделью процесса (объекта) следует понимать уравнения и другие соотношения, приведенные в расчетной модели, алгоритмы решения уравнений, составленные на их основе программы для ЭВМ, аналоговые схемы для решения задач на АВМ и т. д. При этом необходимо стремиться к эффективным математическим моделям, а алгоритмы для решения уравнений должны быть по возможности простыми, но не в ущерб необходимой точности, должны носить универсальный характер, допускающий их удобное применение при различных граничных условиях, разнообразном характере внешних возмущений.

Изучение математических моделей возможно при помощи разных формальных языков.

Совершенные модели в современной технике создаются последовательным приближением. У. Моррис [45] по этому поводу пишет: «Процесс усовершенствования моделей полезно рассматривать как процесс их постепенного обогащения или проработки. Начинают обычно с самых простых моделей, сильно отличающихся от действительности, а затем пытаются двигаться эволюционным путем к более совершенным моделям, точно отражающим сложность ситуации управления».

Таким образом, качество математической модели находится в прямой зависимости от качества физической и расчетной моделей, на которых она основана. Необходимо создавать три взаимоотображающих и последовательно включающихся уровня исследования: *физические*, *расчетные* и *математические модели*. В основу описания физических моделей необходимо положить современные теоретические и экспериментальные результаты об исследуемом процессе; расчетные модели должны включать упорядоченную последовательность обоснованных аппроксимаций описания физических моделей; математические модели должны описываться современной математикой.

Как отмечено выше, математические модели определяются на основе синтеза физических и расчетных моделей. Затем основное внимание уже концентрируется на математическом описании расчетных моделей, т. е. на построении корректных математических моделей. Задачей исследования математических моделей реальных систем занимается теория систем [46, 47]. Следует также отметить, что разработка корректных математических моделей имеет самостоятельное значение и требует специальных и углубленных методов исследования.

В свою очередь, в процессе разработки математических моделей, как правило, прибегают к различного рода упрощениям. Нередко для упрощения дифференциальных, интегральных и других уравнений исследователь пренебрегает теми или иными членами уравнения, считая, что эти операции не оказывают существенного влияния на конечный результат.

Однако такие операции могут привести к глубокому качественному изменению динамического поведения системы. Более того, всякие упрощающие математические объекты операции могут иметь более глубокие последствия вплоть до того, что полученная математическая модель вообще не будет иметь решения. С этой точки зрения большое значение приобретают современные методы функционального анализа и топологии.

Например, такой мощный топологический метод доказательства существования решений операторных уравнений, как метод неподвижной точки, дает возможность ответить на вопрос, до какой степени возможна «деформация операторов», при которой решение рассматриваемых операторных уравнений еще существует.

В качестве другого примера можно указать на использование теорем сравнения [48, 49], дающих оценки погрешностей приближенных решений операторных уравнений при тех или иных упрощениях этих уравнений.

Не останавливаясь более подробно на этих вопросах, укажем на методы [48, 49], которые могут быть эффективно использованы при качественном анализе математических моделей.

Вопрос о взаимосвязи физических и математических моделей рассматривается с различных точек зрения. В частности, особое внимание обращается на наличие взаимообратных связей между физическими, расчетными и математическими моделями и на эволюционный характер развития моделей.

Области естествознания оказывают взаимное влияние друг на друга, стимулируя исследования в каждой из упомянутых областей. Таким образом, приходим к необходимости рассматривать общую структурную схему с обратными связями, в которой теория систем, выступая в роли самостоятельной дисциплины, является необходимым промежуточным и связывающим звеном между современной математикой (и ее методами), с одной стороны, и естественными дисциплинами — с другой. Следовательно, теорию систем надо рассматривать как науку о расчетных моделях [39, 42].

В этом отношении история развития науки полна поучительных примеров. Нередко, для того чтобы установить внутреннюю содержательную связь между различными явлениями или процессами, пытаются прежде всего установить такую связь между математическими моделями этих явлений или процессов. Так, например, длительное время пытались найти связь между математической моделью феноменологической термодинамики и математической моделью классической механики. История этого вопроса весьма поучительна. Здесь прежде всего следует заметить, что даже один из основателей термодинамики Г. Клаузиус полагал, что молекулярно-кинетический подход в термодинамике дает возможность свести саму термодинамику к механике. Другими словами, Г. Клаузиус считал, что тепловое движение молекул в телах может быть сведено к чисто механическому процессу. Мысль о том, что основные законы термодинамики могут быть выведены не только из механики движения молекул в телах, но также и из статистических представлений, не вытекающих из механики, была совершенно чужда Г. Клаузиусу. Этой же проблемой занимались многие другие ученые. Здесь следует отметить работы Г. Гельмгольца, который пытался вывести основные принципы термодинамики из уравнений Лагранжа для консервативных систем. Однако неудовлетворительность попыток Г. Гельмгольца вскоре была установлена. Правильное решение было дано Л. Больцманом, который привлек не вытекающие из механики статистические представления. Лежащая в основе теории Больцмана H-теорема изложена в [50]. Сущность вопроса заключается в том, чтобы совместить микроскопическую обратимость, вытекающую из уравнений классической механики, с наблюдаемой на опыте макроскопической необратимостью. Из приведенного примера видно, сколь сложной оказывается связь между математической моделью термодинамики и классической механики.

В качестве другого примера рассмотрим историю возникновения основной математической модели квантовой механики. Здесь почти одновременно были предложены Г. Гейзенбергом матричная форма основных уравнений квантовой механики и Э. Шредингером волновая форма квантовой механики (волновое уравнение Шредингера). Только через два года после опубликования своего уравнения Э. Шредингер показал полную математическую эквивалентность модели Гейзенберга и его модели.

Вместе с тем до установления факта эквивалентности обеих моделей между сторонниками моделей Гейзенберга и Шредингера шли острые дискуссии. Утверждалось даже, что те физические явления, которые можно объяснить на основе модели Гейзенберга, невозможно объяснить на основе модели Шредингера. Так сам Гейзенберг писал [51]: «Мы с Паули усиленно обсуждали теорию Шредингера. Признавая в первую очередь большой математический прогресс, мы относились скептически к физической интерпретации. Меня очень беспокоила попытка сделать физическим основанием теории волновые представления. В письмах, написанных летом 1926 г., читаем: „Чем больше я размышляю о физической части теории Шредингера, тем ужаснее она мне кажется. Ведь Шредингер просто выбрасывает за борт все квантовотеоретическое, т. е. фотоэлектрический эффект, ионизационные толчки Франка, опыты Штерна — Герлаха и т. д. После этого нетрудно построить теорию; однако она-то и не согласуется с опытом. Большое достижение теории Шредингера состоит в вычислении матричных элементов“».

Приведенные примеры показывают, сколь трудной оказывается зачастую правильная содержательная (физическая) интерпретация математических моделей. Большое значение в этом случае имеют глубина и сила интуиции, эрудиция исследователя.

Здесь уместно привести высказывания Р. Фейнмана [52] о смысле подлинного понимания физической теории: «Математики или люди с математическим складом ума часто при „изучении“ физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение. Они говорят: «Послушайте, эти дифференциальные уравнения — уравнения Максвелла — ведь это все, что есть в электродинамике; ведь сами физики признают, что нет ничего, что бы ни содержалось в этих уравнениях. Уравнения эти сложны; ладно, но это всего лишь математические уравнения, и, если я разберусь в них математически, я разберусь и в физике». Но ничего из этого не выходит. Математики, которые подходят к физике с этой точки зрения, а таких очень много, обычно не делают большого вклада в физику, да, кстати и в математику. Их постигает неудача оттого, что настоящие физические ситуации реального мира так запутаны, что нужно обладать гораздо более широким пониманием уравнений.

П. Дирак объясняет, что значит действительно понять уравнение — понять, не ограничиваясь его строгим математическим смыслом. Он сказал: «Я считаю, что понял смысл уравнения, если в состоянии представить себе общий вид его решения, не решая его непосредственно. Значит, если у нас есть способ узнать, что случится в данных условиях, не решая уравнения непосредственно, мы „понимаем“ уравнения в применении к этим условиям. Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно не математическое, но для физика оно совершенно необходимо».

Следует подчеркнуть, что точно с такой же ситуацией имеем дело при интерпретации формальных моделей систем управления [39, 42].

К указанным словам Р. Фейнмана следует добавить, что речь идет, конечно, не об абстрактно-математическом, а о физически содержательном представлении решений уравнений математической модели, на что уже обращалось внимание.

Отметим также, что всякая формализация, необходимая для создания моделей явлений и процессов, неизбежно связана с более или менее далеко идущим упрощением реальных ситуаций. Поэтому множество возможных содержательных (физических) интерпретаций математических моделей, которое обозначим через M_Φ, всегда является подмножеством возможных реальных ситуаций, описываемых данной математической моделью, которое обозначим через M. Другими словами, имеет место соотношение $M_\Phi \subset M$.

Однако любому элементу из множества M можно сопоставить некоторый элемент из множества M_Φ и обратно только приближенно с определенной степенью нечеткости (или неопределенности).

Следовательно, введение содержательной интерпретации дает возможность установить способ физической реализуемости математической модели.

Поэтому, согласно [39, 42], более корректным и более общим определением математической модели следует считать определение: *математическая модель это формальная система, представляющая собой конечное собрание символов и совершенно строгих правил оперирования этими символами в совокупности с интерпретацией свойств определенного объекта некоторыми отношениями, символами или константами этой системы.*

Подчеркиваем еще раз, что совокупность символов констант и отношений представляет собой абстрактный математический объект и именно содержательная (физическая) интерпретация делает его математической моделью реального объекта.

В эволюционном развитии математических моделей преследуется следующая цель: необходимо стремиться к такому расширению множества M_Φ, чтобы между элементами множеств M и M_Φ в конечном счете реализовалось однозначное соответствие, т. е. степень нечеткости (или неопределенности) при сопоставлении элементов множеств M и M_Φ была возможно меньшей (в пределе равной нулю). Практически эта цель недостижима, если учесть бесконечную сложность, разнообразие и неисчерпаемость реальных явлений и процессов.

История науки показывает, что в триаде физическая — расчетная — математическая модели рассмотрение иногда начинают не с физической, а с математической модели (математической гипотезы), для которой только на следующем этапе ищется физическая интерпретация. Так, например, когда Э. Шредингер предложил свое знаменитое уравнение, смысл входящей в него волновой функции был совершенно неясен. Интерпретация этой функции самим Э. Шредингером как облака отрицательного заряда оказалась неверной.

В частности, дискуссии о подлинной физической интерпретации математических моделей квантовой теории продолжаются до настоящего времени.

Становление физических, расчетных и математических моделей происходит в условиях существования сложных взаимообратных связей. В тех случаях, когда рассмотрение начинается с построения математической модели, содержательная интерпретация этой модели не всегда оказывается возможной в рамках существующего языка, т. е. в рамках семантического значения терминов этого языка. В этих случаях требуется существенное расширение семантического значения терминов языка или даже коренная ломка существующих понятий и введение новых ранее не существовавших понятий.

По этому поводу В. Гейзенберг отмечает [51]: «Как целое атомные явления не могут быть непосредственно описаны нашим языком. Свет и материя суть единые физические явления; их кажущаяся двойственность возникает вследствие существенной ограниченности нашего языка..., нет ничего удивительного в том, что наш язык не пригоден для описания атомных процессов; ибо наши понятия исходят из опытов повседневной жизни, в которой мы постоянно имеем дело с большим количеством атомов и никогда не наблюдаем отдельных атомов. Для атомных процессов у нас, таким образом, нет наглядного представления. Для математического описания явлений, к счастью, такая наглядность вовсе не нужна; мы обладаем математической схемой квантовой механики, которая согласуется со всеми экспериментами атомной физики. Если же, несмотря на это, желают перейти от математики к наглядному описанию явлений, то приходится довольствоваться неполными аналогиями, которые нам дают волновая и корпускулярная картины».

Таким образом, история науки показывает, что ее развитие не носит гладкого и спокойного характера, которое могло бы быть сведено к некоторым формальным схемам. В действительности для развития науки характерно возникновение кризисных или пограничных ситуаций, преодоление которых достигается революционным путем, т. е. путем создания новых теорий и понятий, которые не могли бы быть формально выведены из существующих понятий и теорий. Следует особо подчеркнуть, что даже новые экспериментальные результаты не могут непосредственно подсказать пути создания необходимых новых понятий и построения новых теорий.

В [43, с. 432] А. Эйнштейн по этому поводу замечает: «Опыт никогда не скажет теории «да», но говорит в лучшем случае «может быть», большей же частью — просто «нет». Когда опыт согласуется с теорией, для нее это означает «может быть»; когда же он противоречит ей, объявляется приговор: «нет»».

В самом деле, хорошо известно диалектическое положение, согласно которому всякая теория нуждается в результатах экспериментов и наблюдений и в то же время понимание самих результатов экспериментов невозможно без теории. Выход из этого замкнутого круга может быть достигнут только способностью исследователя к диалектическому мышлению и его интуицией. Творческая деятельность исследователя особенно ярко проявля-

ется в расширении и уточнении содержания существующих понятий или в создании новых понятий, необходимых для содержательной интерпретации новых математических моделей.

1.3. Проблема Вундгейлера и некоторые общие вопросы теории моделей релятивистских и квантовых динамических систем

1.3.1. О проблеме Вундгейлера [53, 54]. В докладе А. Вундгейлера [53] на I Международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии и ее приложениям (Москва, 17—23 мая 1934 г.) было обращено внимание на то, что «1) Всякое выражение (соответственно всякая система уравнений) может быть записано в инвариантном виде и притом относительно любой группы преобразований, если оно задано в некоторой специальной системе координат. Существует ли общий метод для получения этого инварианта?».

А. Вундгейлер в частности указывает, что «...уравнения Максвелла могут быть представлены в инвариантной форме относительно галилеевой группы (выделено А. Вундгейлером). Точно так же ньютоновы уравнения движения можно считать инвариантными относительно общих преобразований пространства и времени. Это достигается введением нового объекта, „вектора времени"».

В связи с изложенным отметим, что З. Картан в [55] ввел понятие тензора «количество движения — энергии», что дало ему возможность сформулировать метод получения общековариантных уравнений как в классической, так и релятивистской областях. Так, Картан пишет [55]: «Уравнения Лагранжа (Lagrange) позволяют дать законам механики форму, *не зависящую от установленной в пространстве координатной системы* (курсив Э. Картана), и в этом заключается их значение. Но время еще играет в них особую роль. Напротив, принцип сохранения количества движения и энергии дает законам механики форму, не зависящую от системы референции, принятой для вселенной (пространство — время): если производят замену переменных, относящуюся *одновременно* (курсив Э. Картана) к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора „количество движения — энергии" в новой системе координат, чтобы вывести из него уравнения движения. Таким образом, получается схема, которой должны подчиняться все механические теории и которой действительно подчиняется и релятивистская механика».

Этот вопрос обсуждался подробно также в работах В. А. Фока [56], Дж. Л. Синджа [57].

В связи с изложенным А. Вундгейлер формулирует второй важный вопрос [53]: «2) евклидова геометрия рассматривается

как теория инвариантов ортогональной группы (аффинная — как теория инвариантов преобразований пространства и времени и т. д.). Каким образом это согласуется с фактами, изложенными в абзаце 1)?»

Будем называть вопросы подобного рода *проблемой Вундгейлера.*

Аналогичные идеи были высказаны В. А. Фоком [56]: «Особенно большое значение принято придавать ковариантности уравнений ...Ковариантность уравнений позволяет писать их, не предрешая выбора координатной системы. Кроме того, требование ковариантности уравнений имеет большое эвристическое значение, так как ограничивает разнообразие формы уравнений и тем самым помогает отобрать из них правильные. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это ограничение имеет место при обязательном условии, что ограничивается также и число вводимых функций, если же допустить введение любого числа новых вспомогательных функций, то практически любым уравнениям можно придать ковариантную форму. Таким образом, сама по себе ковариантность уравнений отнюдь не является выражением какого-либо физического закона».

Как связать это утверждение с известным положением, что законы сохранения являются следствием ковариантности уравнений относительно определенных групп преобразований? Таким образом, имеет место следующая схема [56]:

Группа преобразования, относительно которой инвариантны уравнения теории	Закон сохранения
Трасляция во времени	Энергия
Пространственная трансляция	Импульс
Повороты	Момент импульса

Общая теория связи между инвариантностью и законами сохранения в вариационном исчислении принадлежит Э. Нетер и Ф. Клейну [58], опубликовавшим свои работы в 1918 г. Вместе с тем еще в 1908 г. Е. и Ф. Коссер показали, что законы сохранения энергии, количества движения и момента количества движения являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности гамильтониана упругой среды по отношению к группе евклидовых движений [58].

Подробное изложение этих результатов Коссера можно найти, например, в работе Р. А. Тупина [59].

1.3.2. Математические аспекты проблемы Вундгейлера. В упомянутом докладе [53] А. Вундгейлер показал, что действительно всякая система уравнений может быть приведена к форме, ковариантной относительно любой заданной группы преобразований только введением некоторых дополнительных вспо-

могательных функций, т. е. расширением описания исходного математического объекта.

Уже отмечалось, что классическая механика Ньютона может быть сделана ковариантной относительно любой группы преобразований координат и времени путем введения нового дополнительного объекта, например, «вектора времени».

В [53] А. Вундгейлер изложил общий метод, дающий возможность в соответствии с отмеченным расширить таким образом исходную группу объектов, чтобы заданная система уравнений стала ковариантной относительно любой заданной группы преобразований координат. А. Вундгейлер следующим образом поясняет сказанное выше: «Из всего изложенного выше, по-видимому, вытекает, что одно только требование инвариантности некоторого выражения относительно заданной группы пребразований оставляет его еще неопределенным, и именно в том смысле, что в заданной специальной системе координат оно остается совершенно произвольным. Эта неопределенность уничтожается, если еще задается, какие объекты могут быть использованы для образования этого выражения.

Итак, к описанию класса инвариантов относятся две задачи: 1) группа $\mathfrak{G}$; 2) объекты Ω. Таким образом, мы можем ввести выражение $\{\mathfrak{G}, \Omega\}$ в качестве символа класса инвариантов.

Если мы расширим группу $\mathfrak{G}$ до более обширной группы $\mathfrak{G}'$, то все инварианты могут быть представлены, следуя изложенному выше методу, как инварианты группы $\mathfrak{G}'$, а именно введением новых объектов, образующих вместе с прежними объект Ω'. Значит, можно символически записать $\{\mathfrak{G}, \Omega\} = \{\mathfrak{G}', \Omega'\}$.

Итак, одна и та же теория инвариантов может быть охарактеризована различным образом. Мы объясним это на примере геометрии. Следуя Клейну, мы получаем геометрию с евклидовой метрикой, с одной стороны, если за группу $\mathfrak{G}$ возьмем ортогональную группу (с независящими от точки коэффициентами), за Ω — только координаты x^i точки. С другой стороны, мы можем получить эту же геометрию, выбирая в качестве группы $\mathfrak{G}$ аффинную группу, а в качестве Ω — координаты x^i и тензор g_{ik} (с независящими от точки компонентами); или мы можем еще взять голономную линейную группу $dx^i = a_\lambda{}^i dx^\lambda$, где a^i_λ суть функции точки, а в качестве Ω — величины dx^i и компоненты тензора g_{ik}, зависящие от точки и удовлетворяющие некоторым известным соотношениям.

С этой точки зрения каждая геометрия является функцией двух переменных: группы и объекта. Различные «пары значений» этих переменных могут давать одну и ту же геометрию. С этим связан ряд проблем, например, проблема наиболее целесообразной характеристики данной геометрии».

Эта цитата из работы А. Вундгейлера характеризует, по его мнению, уточнение понятия инвариант. Далее А. Вундгейлер пишет: «Подобным же образом ньютонова механика может быть охарактеризована, во-первых, галилеевой группой с коорди-

натами точки в качестве объекта или, например, общей группой пространства и времени и вышеупомянутым объектом Горака. Нами даны и другие характеристики для этой же механики. Правильное определение теории относительности было бы — в связи с этим кругом идей — таково: совокупность физических законов, инвариантных относительно преобразований пространства и времени и составленных исключительно при помощи координат событий и некоторого (метрического) тензора (в качестве объекта)».

Таково разъяснение проблемы Вундгейлера, данное самим автором.

Вместе с тем, оставаясь даже в рамках математического рассмотрения проблемы, необходимо отметить следующее.

Когда Вундгейлер утверждает, что уравнения Максвелла можно сделать ковариантными относительно группы преобразований Галилея, то он делает это, как выше отмечалось, за счет введения новых вспомогательных функций (нового объекта). Но здесь возникает вопрос: не будет ли в результате такого расширения объекта новая система уравнений уже не иметь ничего общего с уравнениями Максвелла? Ясно, что на любое расширение объекта рассматриваемой теории должны быть наложены какие-либо ограничения, так же как и на расширение соответствующей группы преобразований.

В приведенном Вундгейлером примере с геометрией Клейна действительно имеем дело с одной и той же евклидовой геометрией. Дело в том, что указанные Вундгейлером расширения группы ортогональных преобразований с независящими от точки коэффициентами являются представлениями этой группы, а расширение объекта евклидовой геометрии можно рассматривать как различные представления исходного объекта этой геометрии, рассмотренные Вундгейлером.

Тогда действительно различные представления пары $\{\mathfrak{G}, \Omega\}$ группа — объект будут эквивалентны друг другу.

Что же касается примера с уравнениями Максвелла, то имеем дело с совершенно другой ситуацией, так как группа Галилея не является представлением группы Лоренца, а расширенный А. Вундгейлером объект за счет введения новых функций не является представлением объекта Максвелла, т. е. антисимметричного тензора второй валентности.

Вместе с тем принцип сохранения количества движения и энергии, введенный Э. Картаном, дает уравнениям классической механики форму, ковариантную относительно общей группы преобразований координат и времени. При этом никакого нового объекта не вводится, кроме компонент g_{ik} метрического тензора криволинейной системы координат.

В свою очередь, К. В. Меликов в [60] показал, что канонические уравнения Гамильтона остаются ковариантными при канонических преобразованиях, охватывающих не только коор-

динаты и импульсы системы, но и время. При этом нового объекта также не вводится.

Из изложенного следует, что в рассматриваемом случае имеем две совершенно различные ситуации. В первом случае как уравнениям Максвелла, так и уравнениям классической механики можно придать ковариантный вид относительно любой группы преобразований за счет введения новых вспомогательных функций (новых объектов) в исходные уравнения. Но, как отмечалось, при этом можно получить по существу новые уравнения, а не обобщение старых уравнений при новых преобразованиях системы пространство — время.

Во втором случае, рассмотренном Э. Картаном [55] и К. В. Меликовым [60], имеем действительно обобщение (без введения дополнительных объектов, кроме компонент метрического тензора g_{ik}) уравнений классической механики для общего преобразования пространственно-временных координат или для касательных преобразований, охватывающих не только координаты и импульсы, но и время. Еще раз следует подчеркнуть, что здесь имеем дело с действительным обобщением классических уравнений механики, так как никаких новых объектов в эти уравнения по существу не вводится.

Здесь следует сделать ряд существенных замечаний.

1. Когда речь идет о классической механике Ньютона, то это значит, что независимо от принятой в пространстве-времени системы координат 4-мерный континуум должен быть евклидовым, т. е. при всех вещественных преобразованиях координат он должен иметь определенно-положительную квадратическую форму (см. гл. 2)

$$ds^2 > 0 \tag{1.1}$$

и компоненты тензора Римана-Кристоффеля (см. гл. 3 и Приложение 1) должны тождественно равняться нулю, т. е.

$$R_{iknm} \equiv 0. \tag{1.2}$$

Никакими вещественными преобразованиями координат в рамках механики Ньютона эти требования не могут быть нарушены.

Кроме того, в рамках любой общековариантной формулировки механики Ньютона должно существовать преобразование координат, приводящее к расслоению 4-мерного пространственно-временного континуума на 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время. При этом полностью сохраняется с математической точки зрения полнота описания процессов, рассматриваемых в классической механике Ньютона. Наоборот, если путем введения новых объектов в классическую механику указанные выше требования (1.1), (1.2) нарушаются, то имеем в этом случае дело с новой системой, которая не тождественна классической механике Ньютона.

2. В механике специальной теории относительности (СТО) имеем дело с другими фундаментальными требованиями. Во-первых, существуют три возможности, соответствующие введению пространственно-подобных, времени-

подобных и изотропных мировых линий:

$$ds^2>0; \quad ds^2<0; \quad ds^2=0. \tag{1.3}$$

Во-вторых, требование (1.2) сохраняется, т. е. пространство-время остается плоским, но носит псевдоевклидов характер.

3. При переходе к общей теории относительности (ОТО) сохраняется требование неопределенности квадратичной формы (1.3) и, кроме того, по крайней мере некоторые компоненты тензора Римана — Кристоффеля должны быть отличны от нуля, т. е.

$$R_{iknm} \neq 0. \tag{1.4}$$

Таким образом, между механикой Ньютона, СТО и ОТО существуют глубокие принципиальные различия уже на уровне математических моделей. Другими словами, новые объекты (например, введение метрического тензора g_{ik} системы криволинейных координат) не должны нарушить фундаментальных требований (1.1)—(1.4). При выполнении этих требований невозможно никакими преобразованиями координат превратить механику Ньютона в СТО, а СТО в ОТО. Если ввести, например, в классическую механику Ньютона в качестве объекта метрический тензор g_{ik}, нарушающий требование (1.2), то получим уже не механику Ньютона.

Поэтому А. Вундгейлер неправ, когда утверждает: «Правильное определение теории относительности было бы — в связи с этим кругом идей — таково: совокупность физических законов, инвариантных относительно преобразований пространства и времени и составленных исключительно при помощи координат событий и некоторого (метрического) тензора (в качестве объекта)».

Приведенное утверждение было бы правильно по отношению к классической механике Ньютона, если бы выполнялись условия (1.1), (1.2), т. е. $ds^2>0$, $R_{iknm}=0$ и пространственно-временной континуум допускал расслоение на 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время. Определение ОТО, данное А. Вундгейлером, совершенно неприменимо, если не выполнены фундаментальные условия (1.3), (1.4). В этом заключается принципиальное различие рассматриваемых теорий.

Следовательно, расширение объекта в смысле Вундгейлера допустимо до тех пор, пока не нарушаются основные положения рассматриваемой теории. Если эти требования нарушаются, то, по существу, мы переходим от рассматриваемой теории к другой теории. То же самое можно утверждать относительно уравнений Максвелла.

Как отмечалось, А. Вундгейлер прав в своих рассуждениях до тех пор, пока вводимые расширения исходной группы являются представлениями исходной группы преобразований, а вновь вводимый объект является представлением исходного объекта.

Таковы математические аспекты проблемы Вундгейлера. Однако важнейшее значение имеют физические аспекты рассматриваемой проблемы.

1.3.3. Физические аспекты проблемы Вундгейлера. Поясним физические аспекты рассматриваемой проблемы следующими примерами.

Пусть F_{ik} имеет физический смысл напряженности электромагнитного поля, а x^1, x^2, x^3, x^0 — физический смысл координат и времени в псевдоевклидовом пространстве СТО. Другими словами, предположим, что указанные величины могут быть измерены методами, вытекающими из содержательной физической сущности теории относительности и теории электромагнитного поля.

В этом случае напряженности электромагнитного поля F_{ik} должны удовлетворять только уравнениям Максвелла, только им и никаким другим. Введение в эти уравнения дополнительных функций лишь разрушит их физическую интерпретацию, излагаемую в современной физике.

Таково физическое разъяснение проблемы Вундгейлера применительно к уравнениям Максвелла.

Переменные в рассмотренных выше моделях Картана и Меликова суть просто аналитические функции действительных пространственных координат и времени. Причем все события в этих системах продолжают разыгрываться в плоском 3-мерном евклидовом пространстве и времени, являющимся инвариантом. Другими словами, это просто своеобразная параметризация, вводимая вместо переменных x^1, x^2, x^3 и t, применяемых в классической механике.

Однако в ОТО имеем дело с искривленным или римановым 4-мерным пространственно-временным континуумом, который не может быть «расслоен» на плоское 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время никакими преобразованиями координат. В этом заключается, как отмечалось, глубокое различие между теорией относительности и классической механикой Ньютона.

Вместе с тем физические аспекты рассматриваемой проблемы дают полное ее решение. Поэтому подчеркнем еще раз, что определять теорию относительности как теорию инвариантов общей группы преобразований пространства и времени, как это делает А. Вундгейлер, неправильно.

Одновременно следует заметить, что приведенное выше утверждение В. А. Фока о том, что «сама по себе ковариантность уравнений отнюдь не является выражением какого-либо физического закона», нельзя считать в свете изложенного правильным. В действительности требование ковариантности любых уравнений физики относительно соответствующих групп преобразований само по себе является физическим законом. В другом месте сам В. А. Фок [56] утверждал: «Любая теория, кроме явно нелепой, должна быть ковариантной».

Из изложенного следует, что при рассмотрении реальных процессов управления физическими системами нельзя ограничиваться анализом чисто математических моделей без парал-

лельного анализа физической сущности рассматриваемых процессов. Это замечание имеет особое значение при исследовании процессов управления релятивистскими и квантовыми объектами.

В связи с этим следует также подчеркнуть роль термодинамического подхода к анализу релятивистских и квантовых объектов.

Любопытно отметить здесь высказывание А. С. Эддингтона по этому поводу: «Закон возрастания энтропии — второй закон термодинамики — занимает, я думаю, высшее положение среди других законов природы. Если кто-нибудь указывает вам, что ваша любимая теория вселенной находится в несоответствии с уравнениями Максвелла — тем хуже для уравнений Максвелла. Если обнаруживается, что она противоречит результатам наблюдения — ничего, экспериментаторы тоже иногда ошибаются. Но если обнаружится, что ваша теория противоречит второму закону термодинамики, вам не на что надеяться, вашей теории не остается ничего другого, как погибнуть в глубочайшем смирении».

Для классических систем управления результаты исследований в этом направлении можно найти в работах [39, 42].

1.3.4. Объекты релятивистской и квантовой теорий динамических систем. В п. 1.3.1 настоящей главы была изложена проблема А. Вундгейлера. Один из важнейших результатов этой работы заключается в том, что задание только одной группы преобразований, относительно которой должны быть инвариантны уравнения любой теории без точно сформулированного определения объекта этой теории, является совершенно недостаточным не только для последовательного изложения физической теории, но даже и ее математической модели. Примеры, приведенные А. Вундгейлером, хорошо иллюстрируют это положение.

Итак, всякая физическая теория (а следовательно, и ее математическая модель) должна состоять из двух «переменных»: объекта теории Ω и группы преобразований $\mathfrak{E}$, или в символике Вундгейлера ее можно записать в виде $\{\Omega, \mathfrak{E}\}$.

Что касается группы преобразований $\mathfrak{E}$, то в релятивистской квантовой теории это будет в общем случае неоднородная группа Лоренца (группа Пуанкаре) и все ее представления, необходимые для преобразования различных тензорных или спинорных полей.

Как известно, теория представлений групп хорошо разработана и, в частности, для группы Лоренца [61—66]. Аналогичная ситуация имеет место в дорелятивистской квантовой теории по отношению к группе Галилея. Однако что касается объекта Ω в физической теории, то требование Вундгейлера о его полном и однозначном определении во многих работах не выполняется.

Основная мысль работы А. Вундгейлера о том, что нельзя разыскивать инварианты любой заданной группы преобразова-

ний без точной формулировки объекта, к которому данная группа применяется, далеко не всегда учитывается.

Поэтому если в качестве объекта рассмотреть встречающиеся в физике поля, то легко убедиться, что в зависимости от физических особенностей этого поля к нему как к объекту должны применяться различные общие требования. Поясним это примерами.

В физике существуют поля, связанные с переносом энергии, импульса и информации. Естественно, что в релятивистской физике такие поля не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Однако, как хорошо известно, [67, 7], в физике существуют поля, не связанные с переносом ни энергии, ни импульса, а следовательно, и информации. В качестве примера такого поля можно указать на действие $S=S(x^1, x^2, x^3, x^0)$. Дело в том, что перемещение поверхности $S=\text{const}$ не связано с перемещением какой-либо частицы в континууме движущихся экземпляров, движение которого в целом описывает функция S. Более точно производные функции по координатам $\partial S/\partial x^i=p_i$ дают значение компонент вектора энергии-импульса частицы, находящейся в данный момент времени t в данной точке пространства. В другой момент времени компоненты вектора $\partial S/\partial x^i=p_i$ в той же точке пространства относятся уже к другой частице. Таким образом, уравнение Гамильтона—Якоби (см. подробнее гл. 2) дает описание потока невзаимодействующих тождественных частиц в эйлеровом, а не в лагранжевом представлении (в смысле классической гидродинамики).

В ньютоновской (дорелятивистской) механике для частицы, движущейся в консервативном поле, имеем $H=\text{const}$, но из уравнения Гамильтона—Якоби следует $\partial S/\partial t=-H$. Однако никакого противоречия здесь нет. Первое уравнение относится к одной и той же частице, за движением которой производится наблюдение; второе уравнение относится к точке пространства, через которую в различные моменты времени проходят различные частицы. Поэтому уравнения Гамильтона—Якоби описывают поток невзаимодействующих тождественных частиц, которые в момент времени $t=0$ заполняют непрерывным образом 6-мерное пространство координат и импульсов и, следовательно, имеют различное значение энергии.

В свете изложенного нет ничего удивительного, что поверхность действия $S=\text{const}$ распространяется в релятивистской механике со скоростью, превышающей скорость света. Подробнее это обстоятельство изложено ниже в гл. 3, а также в [7].

Будем в дальнейшем физические поля, рассматриваемые как объекты, называть *объектами первого рода*, если распространение фронта волны такого поля связано с переносом энергии-импульса, а следовательно, и информации. Аналогично этому, если в физической теории встечаются поля, которые непосредственно не связаны с переносом энергии-импульса, а следовательно, и с передачей информации, то такие поля будем называть *объектами второго рода*.

Переходя к квантовой теории, заметим, что если поле волновых функций ψ (или, точнее, $\psi\bar{\psi}$) непосредственно описывает перенос энергии и импульса рассматриваемой частицы (в приня-

том в квантовой механике смысле), то оно должно быть объектом первого рода.

Остановимся теперь на других свойствах этого поля.

Для частицы со спином s, как известно, может быть $(2s+1)$ различных ориентаций этой частицы в пространстве. Поскольку эти ориентации совершенно равноправны, то они должны описываться тоже равноправными (в определенном смысле, который будет установлен ниже), независимыми решениями соответствующих квантовых уравнений. Если допустить, что эти уравнения описывают также и античастицы, то волновая функция ψ должна иметь в общем случае $4s+2$ равноправных компонент. Естественно считать компоненты равноправными, если при преобразовании координат все они преобразуются по одному и тому же закону. Другими словами, поле ψ должно описываться каким-либо одним тензором или спинором данной валентности. Но оно не может описываться никакими комбинациями тензорных полей различной валентности, спинорных полей различной валентности или их комбинаций.

Следует также отметить, что уравнения, описывающие квантовые поля, должны быть не только релятивистски инвариантными, но и симметричными по отношению к координатам пространственно-временного континуума или операторам $p_i = \partial/\partial x^i$, $i = 1, 2, 3, 0$.

Указанные выше требования инвариантности и симметрии неравнозначны друг другу. Это обстоятельство было особенно подчеркнуто Луи де Бройли [68] при рассмотрении уравнений Дирака.

Таковы общие требования, которые необходимо предъявлять к квантовым и релятивистским полям в смысле проблемы Вунд-гейлера [69].

В последующих главах на конкретных примерах будет проиллюстрировано применение сформулированных требований к объектам квантовой теории.

1.4. О качественной теории моделей процессов управления

В теории управления одной из основных проблем является задача построения корректных моделей динамических систем высокого уровня сложности и разработка качественных методов анализа процессов управления такими системами. При построении корректных моделей сложных систем на основе количественных методов становится практически невозможным (а с точки зрения построения и реализации алгоритма управления часто невыполнимым) сформулировать на физическом и математическом уровнях точные и строгие утверждения об исследуемой системе в целом. Следует одновременно отметить, что практически любое значимое утверждение о свойствах и состоянии сложной системы является, как правило, качественным по своей

природе. Причем необходимость в качественном анализе существенно возрастает по мере роста сложности исследуемой системы управления.

Использование качественных методов анализа во многих случаях позволяет получить необходимую информацию для формирования оптимальных алгоритмов управления сложными системами и несет в ряде случаев бо́льшую информацию о системе, что позволяет значительно расширить возможность теории управления.

В теории управления такая ситуация уже имела место, например, при разработке и применении качественных методов теории устойчивости, грубости, чувствительности и инвариантности динамических систем к анализу существенно нелинейных систем управления. Это позволило избежать непосредственного нахождения и исследования решений сложных нелинейных дифференциальных уравнений (что вызывало на практике существенные трудности), а полученной информации часто оказывалось достаточно для разработки алгоритмов управления системой в целом.

Другим примером является введение качественного понятия стохастической системы и его использование в теории управления. Применение этого понятия позволило существенно упростить задачу оптимизации и синтеза систем управления, а в сочетании с методами стохастического программирования и обучения решать такие важные задачи, как управление сложными системами в условиях неполной информации.

Приведенных примеров уже достаточно для суждения о целесообразности введения качественных методов исследования в теорию управления. Именно поэтому в системном анализе большое внимание уделяется разработке качественных методов, что составляет основу для построения общей качественной теории управления.

В [39, 42] сделана попытка разработать основы качественной теории управления сложными динамическими системами высокого уровня сложности. В основу теории положен принцип построения и взаимосвязи физических, расчетных и математических моделей динамических систем на физическом и математическом уровнях строгости [39]. Основные результаты получены методами термодинамики, стохастических систем, теорий ценности информации, статистических решений, сложности и нечетких множеств.

Применение указанных методов исследования к замкнутой цепи физическая—расчетная—математическая модель позволяет получать корректные модели динамических систем управления и формировать оптимальные или субоптимальные алгоритмы управления сложными системами. Такой подход позволяет одновременно получить ответ на столь важные вопросы, как оценка неполноты модели динамической системы, границы ее формальных (предельных) возможностей, чувствительности или грубости структуры и критерия оптимизации модели к исходной информации, приращения риска при выборе алгоритма управления сложной системой в условиях неполной и нечеткой инфор-

мации, снижения сложности описания модели и алгоритма управления.

Следуя общим положениям качественной теории динамических систем управления, разработанной в [39], в данной книге будет показано, какие ограничения необходимо наложить на математические модели явлений и процессов (в частности, процессов управления), которые вытекают из законов термодинамики, теории относительности и квантовой теории. Эти ограничения носят довольно существенный характер, однако их выполнение совершенно необходимо для того, чтобы данная математическая модель действительно была бы моделью физически реализуемой динамической системы.

Будет показано также, что вопросы построения критерия физической реализуемости тесно связаны с вопросами корректности и устойчивости математических моделей. Для современной теории управления характерным является тенденция к разработке методов оптимизации и синтеза, определяющих компромисс не только между устойчивостью, динамическим качеством и точностью в присутствии помех (характерные для традиционных методов), но и между динамическим качеством и сложностью, надежностью и т. п. Более того, часто математические модели, полученные в результате исследования, оказываются физически или технически нереализуемыми, что приводит к необходимости построения квазиоптимальных систем [70] и связано с возрастанием риска в принятом решении [38].

Эта тенденция вызвана, согласно [71, 72], непреодолимыми информационными барьерами, с которыми сталкиваются традиционные подходы к постановке и решению перспективных задач управления. Последние объясняются тем, что постановка и анализ задач теории управления неразрывно связаны с необходимостью накопления, хранения и обработки больших (в общем случае неоднородных) массивов информации при ограниченных ресурсах и времени (в виде ограничений на пропускную способность информационных систем) исследования больших систем.

Решение подобных проблем осуществляется по двум направлениям: эвристическому и аксиоматическому [71]. При эвристическом подходе снижение сложности описания модели управления достигается на основе качественного анализа особенностей системы, введения содержательных интерпретаций и понятий. В целом предусматривается, как правило, экспериментальная проверка результатов исследований. Физические аспекты обоснования такого подхода и его качественные особенности были рассмотрены в предыдущем разделе. При аксиоматическом подходе дается аксиоматическое определение понятия «сложность». Затем на основе логического выбора решения определяют границы формальных возможностей расчетных и математических моделей систем управления. Математические модели аксиоматической теории сложности кратко описаны в [72].

В обоих подходах существенным является выделение и формализация качественных понятий и признаков процессов управления. Достаточно отметить, что само понятие «сложность» является качественным понятием. Компромисс в виде дополнительных ограничений между перечисленными характеристиками процессов управления отражается в первую очередь именно на качественных особенностях описания моделей динамических систем управления.

В большинстве задач управления, как отмечалось, исходные данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными, чтобы допустить точную и строгую математическую трактовку в терминах существующего подхода к анализу таких систем. Более того, практика показывает, что процесс управления действительно сложными системами (например, такими, как биологические или социальные [73—85]) является эволюционным и не всегда допускает эффективное исследование существующими точными методами. Из всех математических дисциплин только теория стохастических систем позволяет получать нетривиальные для таких задач результаты, но и здесь часто встречаются серьезные трудности, связанные с отсутствием априорной информации о структуре вероятностных распределений и накоплением и обработкой больших массивов информации. Поэтому в дальнейшем для решения проблем подобного рода необходимо модифицировать принятые результаты, являющиеся на данном этапе эволюции нечеткими и до известной меры неопределенными [39, 42].

Общие вопросы и проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами рассматривались в [69, 86, 87] и др. В настоящей книге рассматриваются физические и информационные аспекты процессов управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами с учетом требований, предъявляемых к подобным объектам.

Глава 2

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Пространственно-временной континуум, кинематика и динамика СТО)

2.1. Предварительные замечания. Основные постулаты теории относительности

Специальная теория относительности (СТО) была впервые опубликована в 1905 г. молодым инженером Альбертом Эйнштейном, работавшим в то время в Патентном бюро в Берне (Швейцария) [43].

В начале своей знаменитой статьи А. Эйнштейн пишет [43]: «Известно, что электродинамика Максвелла в том виде, как ее в настоящее время обыкновенно понимают, в применении к движущимся телам приводит к асимметрии, которая, по-видимому, не свойственна самим явлениям. Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению оба случая, в которых либо одно, либо другое из этих тел является движущимся, должны быть строго разграничены. В самом деле, если движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле, обладающее некоторым количеством энергии, которое в тех местах, где находятся части проводника, порождает ток. Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля; зато в проводнике возникает электроэнергия, но которая, однако, при предполагаемом равенстве относительного движения в обоих интересующих нас случаях, вызывает электрические токи той же силы и того же направления, как в первом случае электрическое поле.

Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение Земли относительно «светоносной среды», ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя, и даже более того,— к предположению, что для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, имеют место те же самые электродинамические и оптические законы, как это уже доказано для величин первого порядка. Мы намерены это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «принципом относительности») превратить в предпосылку и сделать, кроме того, добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, именно что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью V, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение «светоносного эфира» окажет-

ся при этом излишним, поскольку в предлагаемой теории не вводится ни «абсолютно покоящееся пространство», наделенное особыми свойствами, а также ни одной точке пустого пространства, в которой протекают электромагнитные процессы, не приписывается какой-нибудь вектор скорости».

В приведенных немногих словах А. Эйнштейн в сжатом виде и с поразительной ясностью сформулировал основные идеи СТО.

Прежде чем излагать содержание СТО, дадим определения некоторых основных понятий, носящих общий характер, т. е. принимаемых как в классической физике, так и в теории относительности.

Начнем с введения понятия *стандартных часов*. Роль подобных часов может играть любой периодический процесс, протекающий независимо от внешних сил. Следовательно, маятниковые часы исключаются. Далее, очевидно, часы должны быть изготовлены из достаточно прочного и достаточно жесткого (в пределе бесконечно жесткого) материала так, чтобы в результате испытанных ими ускорений они не разрушались и чтобы возможная деформация их механизма практически не сказывалась на их ходе. Никаких других требований к стандартным часам не предъявляется. Роль стандартных часов может играть испускание гребней волн излучения атомами или ядрами атомов.

Остановимся теперь на понятии *«инерциальная система координат»*. Несколько упрощая суть дела, под инерциальной системой координат следует понимать систему координат, относительно которой свободное (т. е. не находящееся под действием внешних сил) тело движется прямолинейно и равномерно. Это определение инерциальной системы координат сохраняется и в СТО. Всякая система координат, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно заданной инерциальной системы координат, также будет инерциальной. Это положение классической ньютоновской механики также остается справедливым и в СТО.

Введем теперь понятие *системы отсчета*. Это понятие может быть определено следующим образом [88]: «Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени». Аналогичным образом определяется понятие *инерциальной системы отсчета*.

Заметим, что сам создатель теории относительности А. Эйнштейн [43], а также такие известные физики, как В. Паули [89], Э. Ферми [90], и другие, употребляли термины «система координат» и «система отсчета» как синонимы. В дальнейшем будем пользоваться термином «система отсчета».

Представим себе две инерциальные системы отсчета S и S'. Допустим, что система отсчета S' движется с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x системы отсчета

S и примем, кроме того, что оси x и x' указанных систем отсчета параллельны. В таком случае в ньютоновой механике координаты x', y', z' некоторой материальной частицы в системе отсчета S' связаны с координатами x, y, z той же частицы в системе отсчета S следующими преобразованиями:

$$x'=x-vt; \quad y'=y; \quad z'=z; \quad t'=t. \tag{2.1}$$

Преобразование (2.1) носит название *преобразования Галилея*. Время t' является абсолютным мировым временем в дорелятивистской физике, т. е. в физике, относящейся к периоду до создания теории относительности.

Как известно, уравнения механики Ньютона не изменяют своего вида, если они подвергнуты преобразованию Галилея (2.1). Таким образом, уравнения механики Ньютона имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета. Это положение составляет содержание *принципа относительности Галилея — Ньютона*, справедливого в классической механике. На современном языке этот принцип относительности, справедливый в классической механике, формулируется следующим образом: уравнения классической механики ковариантны относительно преобразований Галилея.

Основное значение при построении теории относительности имел установленный в опыте А. Майкельсона (1881 г.) факт независимости скорости света от скорости источника. Это открытие было подтверждено со все возрастающей точностью в многочисленных экспериментальных исследованиях других авторов (краткий обзор экспериментальных работ по этому вопросу дан ниже). Указанный факт был положен в основу одного из постулатов теории относительности. Из этого постулата следует, что скорость света должна иметь одну и ту же величину $c=\text{const}$ во всех инерциальных системах отсчета. Однако нетрудно убедиться в том, что это утверждение находится в непримиримом противоречии с преобразованиями Галилея (2.1). В самом деле, рассмотрим скорость света с точки зрения выше введенных систем отсчета S и S'. Если в системе отсчета S скорость света равна c, то в системе отсчета S' согласно (2.1) скорость света должна была бы равняться $c-v$. Это противоречит, однако, постулату теории относительности о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Таким образом, возникла ситуация, которая требовала отказа от преобразований Галилея (2.1).

Прежде чем идти дальше, остановимся теперь на вопросе о *синхронизации* стандартных часов в инерциальной системе отсчета.

Допустим, что в каждой инерциальной системе отсчета расположены стандартные часы, находящиеся на равных расстояниях друг от друга, которые образуют в каждой такой системе отсчета некоторую «кубическую решетку».

Синхронизация часов легко может быть проведена следующим образом. Пусть в начале координат данной системы в момент $t=0$ был подан световой сигнал. Этот сигнал достигает

часов, расположенных на расстоянии x' от начала координат в момент времени, равный x'/c, где c — постоянная скорость света. Следовательно, стрелки на часах, расположенных в точке x', должны показывать время x'/c в момент прихода сигнала. Рассмотренный метод синхронизации часов с помощью световых сигналов был предложен А. Эйнштейном.

Ввиду постоянства скорости света во всех инерциальных системах отсчета этот метод имеет универсальное значение.

Заметим, что любой другой метод синхронизации часов, основанный на законах релятивистской физики, будет приводить к тем же результатам, что и метод световых сигналов. Следовательно, предложенный А. Эйнштейном метод синхронизации часов не является чем-то условным. Этот метод имеет объективное значение, поэтому его можно было бы рассматривать как один из основных принципов (постулатов) теории относительности.

В теории относительности, как отмечалось, имеет место еще одно общее утверждение фундаментального значения, носящее наименование *основного постулата* или *принципа относительности*, который может быть сформулирован следующим образом: «...все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой» [88].

Вместе с тем нетрудно убедиться, что уравнения электродинамики Максвелла (так же как и уравнения Лоренца электродинамики сплошных сред) не ковариантны относительно преобразований Галилея (2.1). Попытка Г. Герца видоизменить уравнения Максвелла таким образом, чтобы они стали ковариантными относительно преобразований Галилея, привела к противоречию с экспериментами.

Таким образом, в классической дорелятивистской механике создалось странное положение: в то время как уравнения классической дорелятивистской механики были инвариантны относительно группы преобразований Галилея, уравнения электродинамики уже этими свойствами не обладали.

Итак, для классической дорелятивистской физики были характерны глубокие противоречия в ее основных принципах. Эти противоречия невозможно было устранить без глубокого пересмотра или даже коренной ломки классических понятий и идей. В создавшейся ситуации прежде всего необходимо было отказаться от преобразования Галилея, связывающего одну инерциальную систему отсчета с другой. Этот отказ был необходим, несмотря на казалось бы абсолютную ясность и полную очевидность этого преобразования.

Возникшее противоречие было устранено путем пересмотра, или, более точно, крутой ломки наших обычных, уходящих в глубь тысячелетий, представлений о пространстве и времени. Необходимо было создать новую группу преобразований пространственно-временных координат, относительно которой должны были быть ковариантными как уравнения механики, так и уравнения электродинамики. Поскольку уравнения классической механики

Ньютона были ковариантными относительно группы Галилея, то, очевидно, возникла ситуация, которая требовала видоизменить сами уравнения классической механики Ньютона. Такова была программа, которую необходимо было реализовать при создании теории относительности.

Новые преобразования пространственно-временны́х координат были найдены, они получили наименование преобразований Лоренца. Эти преобразования будут выведены и проанализированы ниже.

В заключение этого параграфа дадим краткий обзор результатов экспериментальных работ по определению скорости света.

В знаменитом интерференционном опыте А. Майкельсона была доказана, как отмечалось выше, независимость скорости света от скорости движения источника. Этот опыт подробно описан не только во всех учебниках по физике для втузов, но даже в популярных брошюрах по теории относительности и школьных учебниках. Таким образом, учитывая широкую известность этого опыта, не будем его здесь подробно описывать. Опыт А. Майкельсона был повторен И. Майкельсоном и Г. Морлеем, причем точность проведенных измерений дала бы возможность обнаружить «скорость эфирного ветра» в 1,5 км/с (в то время как предполагаемая «скорость эфирного ветра», равная скорости движения Земли вокруг Солнца, должна была составлять 30 км/с).

Однако результаты этого опыта, как и результаты последующих опытов, основанных на идее Майкельсона, дали отрицательный результат.

Этот экспериментальный факт, т. е. независимость скорости света от скорости движения источника, составляет, как выше отмечено, содержание одного из постулатов теории относительности.

После знаменитого опыта Майкельсона этот постулат проверялся в экспериментах многочисленных исследователей [91], и в настоящее время его справедливость не вызывает сомнений. Идеи, лежащие в основе этих экспериментов, были самые различные. Для проверки постулата использовались как небесные, так и земные источники света. Исследования велись в широком диапазоне частот от видимого света до жестких γ-лучей. Все эти исследования подтверждали постулат со все возрастающей точностью.

Отметим, в частности, эксперимент, проведенный английскими физиками К. Джеймсом и Л. Штернбергом [91]. В их установке источником излучения была вращающаяся стеклянная пластинка, с одной стороны которой помещалась электрическая лампочка. Так как размеры установки Джеймса и Штернберга были очень велики (ход луча в одном направлении достигал 20 м), то не было необходимости помещать ее в вакуум. Точность установки была весьма велика, она на два порядка превышала точность установки И. Майкельсона и Г. Морлея. Тем не менее никакого эффекта обнаружено не было. Таким образом, этот постулат теории относительности получил еще одно экспериментальное подтверждение.

Из последних работ, в которых дано подтверждение этого постулата с высокой точностью, следует упомянуть работы Т. Алвагера, А. Нильсона, И. Кейельмана, К. Брехера и др. (см. [92]). В качестве источника излучения они использовали γ-лучи.

Отметим, наконец, что использование лазеров позволило установить независимость скорости света от скорости движения источников с точностью до 0,03 мм/с [92].

Согласно основному постулату теории относительности — принципу относительности — уравнения механики и электродинамики должны быть ковариантны относительно группы преобразований Лоренца. В п. 2.9 будет показано, что уравнения электродинамики дейетвительно удовлетворяют этому принципу. Что же касается уравнений механики, то в теории относительности им была придана форма, при которой они также оказываются ковариантными относительно группы преобразований Лоренца.

Новые уравнения механики, т. е. уравнения релятивистской механики, получили блестящее подтверждение в многочисленных экспериментах [7].

2.2. Псевдоевклидово пространство

Рассмотрим кратко, следуя проблеме Вундгейлера, математические объекты СТО в рамках тензорного исчисления.

2.2.1. Векторы и тензоры в псевдоевклидовом пространстве. Будем называть точкой псевдоевклидова пространства совокупность четырех вещественных чисел (x^1, x^2, x^3, t).

Квадрат расстояния от начальной точки (0, 0, 0, 0) до точки (x^1, x^2, x^3, x^0) задается в псевдоевклидовом пространстве неопределенной действительной фундаментальной формой

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2, \qquad x^0 = ct. \tag{2.2}$$

Форма (2.2) дает квадрат длины вектора, выходящего из начала координат и оканчивающегося в точке.

В полном соответствии со случаем евклидова пространства будем называть величину x^i составляющими рассматриваемого вектора.

Введем следующие определения:

вектор, длина которого равна нулю, т. е. вектор, имеющий составляющие (x^1, x^2, x^3, x^0), обращающие в нуль фундаментальную форму (2.2), называется *изотропным*;

вектор, составляющие которого дают положительное значение фундаментальной форме (2.2), называется *пространственно-подобным*;

вектор, составляющие которого дают отрицательное значение фундаментальной форме (2.2), называется *времени-подобным*.

Возможно также и другое представление основной фундаментальной формы псевдоевклидова пространства:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{2.3}$$

В этом случае вектор, составляющие которого дают положительное значение фундаментальной форме (2.3), называется времени-подобным; вектор, составляющие которого дают отрицательное значение фундаментальной форме (2.3), называется пространственно-подобным. Очевидно, оба представления отличаются друг от друга только знаком. В литературе по теории относительности встречаются оба представления, которые равнозначны. В дальнейшем будем во всех специально неоговоренных случаях пользоваться представлением (2.3).

Преобразование координат

$$x'^{\nu} = \sum a^{\nu}_{\mu} x^{\mu}, \tag{2.4}$$

переводящее форму (2.3) в форму

$$s^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2, \tag{2.5}$$

называется *преобразованием Лоренца.*

Напомним теперь важное правило записи сумм в тензорном исчислении: *если один и тот же индекс входит дважды в какой-нибудь член уравнения*, причем один раз как верхний индекс, а другой раз как нижний, то этому индексу следует придать все значения (т. е. $i = 1, 2, 3, 0$) и полученные члены последовательно сложить.

В соответствии с этим правилом преобразование Лоренца (2.4) можно записать следующим образом:

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \tag{2.6}$$

Замечая, что $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu} = a_{\nu}^{\mu}$, преобразование Лоренца (2.6) перепишем в виде

$$x^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x'^{\mu} \text{ или } x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}. \tag{2.7}$$

В формулах (2.7), разумеется, производится суммирование по индексу μ или по индексу ν.

Всякую совокупность четырех величин, которая преобразуется по закону

$$A'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} A^{k}, \tag{2.8}$$

т. е. по тому же закону, что и координаты, называют *контравариантным вектором.* Компоненты контравариантных векторов принято обозначать при помощи верхних индексов.

Рассмотрим, как преобразуются производные скалярной функции $\varphi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ при переходе к новой системе координат. Очевидно, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^{i}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{i}}. \tag{2.9}$$

Всякую совокупность величин, которые преобразуются по закону

$$A_i' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k, \tag{2.10}$$

т. е. по такому же закону, что и производные скалярной функции $\varphi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$, называют *ковариантным вектором.* Компоненты ковариантных векторов принято обозначать при помощи нижних индексов.

Еще раз обращаем внимание на то, что в соответствии с установленным выше правилом в формуле (2.10) производится суммирование по индексу k.

Если составить всевозможные произведения $A^{\mu\nu}$ компонент двух векторов A^μ и A^ν, заданных в 4-мерном пространстве, т. е.

$$A^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu, \tag{2.11}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, то в соответствии с формулами (2.8) величины $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} A^{\mu\nu}. \tag{2.12}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в 4-мерном пространстве задается при помощи 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (2.12), называется *контравариантным тензором второй валентности.*

Если составить 16 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух ковариантных векторов

$$A_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu, \tag{2.13}$$

то в соответствии с формулами (2.10) для этих величин справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} A_{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в 4-мерном пространстве описывается при помощи 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (2.14), называется *ковариантным тензором второй валентности.* Наконец, можно составить 16 произведений $A_\mu{}^\nu$ из ковариантных A_μ и контравариантных B^ν компонентов двух векторов

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu. \tag{2.15}$$

В соответствии с формулами (2.8) и (2.10) эти величины удовлетворяют закону преобразования

$$A'^\tau_\sigma = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma} A^\beta_\alpha. \tag{2.16}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в 4-мерном пространстве описывается при помощи 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (2.16), называется *смешанным тензором второй валентности.*

По аналогии с изложенным можно дать определения контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров любой валентности. Так, например, для смешанного тензора третьей валентности A^{i}_{kp} имеет место закон преобразования

$$A'^{\tau}_{\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\eta}} A^{i}_{kp}.$$

Введем совокупность 16 величин g_{ik}, удовлетворяющих равенствам $g_{kk}=-1$ для $k=1, 2, 3$; $g_{00}=+1$ и $g_{\mu\nu}=0$ для $\mu\neq\nu$. Эта совокупность величин может быть представлена также в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

При помощи введенных величин фундаментальная форма (2.3) может быть записана в виде

$$s^2 = g_{ik}x^i x^k. \tag{2.18}$$

Величины g_{ik} называют компонентами ковариантного фундаментального метрического тензора. В новой системе координат компоненты метрического тензора g_{ik} имеют те же численные значения, что и в старой системе координат. Таким образом, тензор g_{ik} является тензором с постоянными компонентами по отношению к преобразованию Лоренца.

Наряду с ковариантным метрическим тензором можно ввести еще контравариантный метрический тензор по формуле

$$g^{ik} = \frac{(\text{алгебраическое дополнение } g \text{ в } g_{ik})}{g}. \tag{2.19}$$

Здесь g — определитель (форма (2.3))

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{2.20}$$

Нетрудно убедиться, что контравариантный метрический тензор может быть представлен в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Из теории определителей следует, что должно быть

$$g^{is}g_{ik} = \delta_k^s \doteq \begin{cases} 1 \text{ для } s = k; \\ 0 \text{ для } s \neq k. \end{cases}$$

Величины δ_k^s являются компонентами смешанного тензора. Тензор δ_k^s, так же как и тензоры g_{ik} и g^{nm}, является тензором с постоянными компонентами.

Перейдем к сжатому рассмотрению тензорной алгебры в псевдоевклидовом пространстве.

2.2.2. Элементы тензорной алгебры. *Сложение и вычитание.* При сложении и вычитании соответствующих компонент двух тензоров одинаковых типов (имеющих одну и ту же контравариантную и ковариантную валентность) получается тензор того же типа, например

$$A^i_{pk} + B^i_{pk} + C^i_{pk}. \tag{2.22}$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из приведенного выше определения тензора.

Умножение. Из тензора контравариантной валентности p и ковариантной валентности q, тензора контравариантной валентности s и ковариантной валентности t можно образовать тензор контравариантной валентности $p+s$ и ковариантной валентности $q+t$. Для этого нужно умножить каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго. Например, если A_p^q и B_{ki} являются компонентами тензоров двух типов, то

$$C^q_{pki} = A^q_p B_{ki} \tag{2.23}$$

будут компонентами тензора, тип которого определяется положением индексов. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из закона преобразования соответствующих тензоров.

Свертка смешанного тензора. Из смешанного тензора контравариантной валентности p и ковариантной валентности q можно образовать тензор контравариантной валентности p—1 и ковариантной валентности q—1. Для этого надо один какой-либо значок контравариантного характера приравнять к одному значку ковариантного характера и по этому значку произвести суммирование. Например,

$$T^s_{pks} = T_{pk}, \quad A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} = A^{\delta}_{\beta}. \tag{2.24}$$

Из последнего тензора путем повторного свертывания можно получить тензор нулевой валентности или инвариант, т. е. скалярную величину (функцию), которая не изменяется при преобразо-

ваниях Лоренца

$$A^{\beta}_{\beta} = A. \tag{2.25}$$

Доказательство приведенной теоремы непосредственно следует из общего закона преобразования соответствующих тензоров.

Операции умножения и свертки могут быть объединены. Например, из контрвариантного тензора первой валентности A^{μ} и ковариантного тензора второй валентности $B_{\sigma\nu}$ можно образовать сначала смешанный тензор $A^{\mu}B_{\sigma\tau} = A^{\mu}{}_{\sigma\tau}$. Свертывая далее по индексам μ и τ, получим ковариантный тензор первой валентности или вектор $D_{\sigma} = A^{\mu}_{\sigma\mu} = A_{\sigma}$.

Если оказывается возможным произвести полное свертывание смешанного тензора по всем контрвариантным и ковариантным индексам, то приходим к тензору нулевой валентности или инварианту (например, $g_{ik}x^i x^k$). Здесь происходит полное свертывание по индексам i и k ковариантного тензора g_{ik} и контрвариантного вектора x^i, поскольку координаты являются компонентами вектора. Полученный инвариант является квадратом длины вектора s.

Приведем еще примеры образования инвариантов: $g_{ik}A^iA^k$ (длина вектора A); $A_{ik}B^{ik}$; $g_{ik}A^iB^k$; $A_{ik}B^{ir}C_r{}^k$ и т. д.

Поднятие и опускание индекса — «жонглирование» индексами. Если компоненты контрвариантного вектора λ^s перемножить с компонентами ковариантного тензора g_{ik}, то в соответствии со сказанным выше величины $g_{ik}\lambda^s$ образуют компоненты смешанного тензора. Если теперь произвести свертку по индексам k и s, то получим ковариантный вектор, компоненты которого обозначим через λ_i, т. е.

$$\lambda_i = g_{ik}\lambda^k. \tag{2.26}$$

Аналогично, если μ являются компонентами ковариантного вектора, можно с их помощью образовать контрвариантный вектор следующим образом:

$$\mu^k = g^{ks}\mu_s. \tag{2.27}$$

Легко видеть, что если

$$\mu_s = \lambda_s = g_{sk}\lambda^k, \tag{2.28}$$

то и

$$\mu^k = \lambda^k. \tag{2.29}$$

Последнее обстоятельство дает возможность определить объект, который будем называть вектором. Этот объект может быть представлен контрвариантными λ^i или ковариантными λ_i компонентами по нашему выбору.

Раньше говорилось о контрвариантном λ^i и ковариантном λ_i векторах как о различных объектах. Сейчас говорим о векторе как о едином объекте,

который может быть представлен контрвариантными λ^i или ковариантными компонентами λ_i по нашему выбору. Право на такое определение дают равенства (2.28) и (2.29).

Итак, переход от контрвариантных компонентов некоторого вектора λ^k к его ковариантным компонентам и наоборот дается следующими равенствами:

$$\lambda_s = g_{sk}\lambda^k; \quad \lambda^k = g^{ks}\lambda_s. \tag{2.30}$$

Аналогичные соображения могут быть высказаны относительно любого тензора. В дальнейшем будем говорить о тензоре как об объекте, который может быть представлен контрвариантными, ковариантными или смешанными компонентами. Сказанное иллюстрируется следующими примерами:

$$\begin{aligned} &A^i_{pk} \to A_{ipk} = g_{is}A^s_{pk}; \\ &A_{ipk} \to A^k_{ip} = A_{ips}g^{sk} \text{ и т.д.} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Приведенные примеры показывают, что с помощью фундаментального метрического тензора можно поднимать и опускать индексы и что при этом имеем дело с компонентами одного и того же тензора. Эта операция поднятия и опускания индексов или, как иногда говорят, «жонглирования» индексами имеет важнейшее значение в тензорной алгебре.

Приведем еще несколько примеров подобной операции:

$$g_{ik}A^{ip} = A^p_k, \quad g_{ik}A^k_{ps} = A_{ips} \text{ и т.д.} \tag{2.32}$$

Формулам (2.26)—(2.32) можно придать более определенный вид, если воспользоваться численными значениями компонентов тензора g_{ik} и g^{ik} в соответствии с формулами (2.17) и (2.21), например [1]:

$$\begin{aligned} &A^1 = g^{1\nu}A_\nu = -A_1; \quad A^2 = g^{2\nu}A_\nu = -A_2; \\ &A^3 = g^{3\nu}A_\nu = -A_3; \quad A^0 = g^{0\nu}A_\nu = +A_0; \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} &A_1 = g_{1\nu}A^\nu = -A^1; \quad A_2 = g_{2\nu}A^\nu = -A^2; \\ &A_3 = g_{3\nu}A^\nu = -A^3; \quad A_0 = g_{0\nu}A^\nu = +A^0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Для скалярного произведения двух векторов имеем

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 + A_0B^0. \tag{2.35}$$

В соответствии с данными определениями можно утверждать, что вектор будет пространственно-подобным, если

$$A_\mu A^\mu < 0, \tag{2.36}$$

---

[1] Отметим, что в евклидовом пространстве в декартовых координатах различие между ковариантными и контрвариантными векторами и тензорами исчезает.

времени-подобным, если

$$A_\mu A^\mu > 0, \tag{2.37}$$

и изотропным, если

$$A_\mu A^\mu = 0. \tag{2.38}$$

Первый вариант симметричного тензора второй валентности $A_{\mu\nu}$ может быть записан в виде

$$g^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = A_{11} + A_{22} + A_{33} - A_{00}. \tag{2.39}$$

В псевдоевклидовом пространстве вторые производные от скалярной функции носят тензорный характер, поэтому, если в уравнение (2.39) подставим

$$A_{\mu\nu} = \partial^2\varphi/\partial x^\mu \partial x^\nu, \tag{2.40}$$

то получим

$$g^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{22}} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{32}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{02}}\right). \tag{2.41}$$

Выражение (2.41) должно быть дифференциальным инвариантом преобразования Лоренца, т. е. иметь точно такой же вид в новой (штрихованной) системе координат.

Рассмотрим частный случай преобразования Лоренца

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \operatorname{ch}\varphi + x^0 \operatorname{sh}\varphi; \\ x'^2 &= x^2; \quad x'^3 = x^3; \\ x'^0 &= x^1 \operatorname{sh}\varphi + x^0 \operatorname{ch}\varphi. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Непосредственной подстановкой можно доказать, что преобразование (2.42) действительно переводит форму (2.5) в форму (2.3). Из выражений (2.42) следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} = \operatorname{ch}\varphi; \quad \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = \operatorname{sh}\varphi; \\ &\frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = 1; \quad \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} = 0; \\ &\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1; \quad \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} = 0; \\ &\frac{\partial x'^0}{\partial x^1} = \operatorname{sh}\varphi; \quad \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} = \operatorname{ch}\varphi. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Используя найденные значения производных, можно написать

$$\begin{aligned} &A'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^\nu} A^\nu = A^1 \operatorname{ch}\varphi + A^0 \operatorname{sh}\varphi; \quad A'^2 = A^2; \\ &A'^3 = A^3; \quad A'^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\nu} A^\nu = A^1 \operatorname{sh}\varphi + A^0 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$A_1' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^1} A_\nu = A_1 \operatorname{sh}\varphi + A_0 \operatorname{ch}\varphi; \qquad A_2' = A_2;$$
$$A_3' = A_3; \qquad A_0' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^0} A_\nu = -A_1 \operatorname{sh}\varphi + A_0 \operatorname{ch}\varphi. \tag{2.45}$$

Рекомендуем непосредственной проверкой убедиться в справедливости формулы

$$A_i A^i = A_k' A'^k. \tag{2.46}$$

Если вместо координаты x^0 ввести мнимую координату $x^0 \to ix^0$, то основная квадратичная форма примет вид

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^0)^2,$$

а основная метрическая матрица

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

В этой системе координат исчезает всякое различие между ко- и контравариантными компонентами векторов и тензоров, т. е. $A^i = A_i$; $F_k^{\ i} = F_{ik}$ и т. д.

Следует обратить внимание на необходимость глубокого освоения изложенных в настоящем разделе элементарных основ тензорной алгебры в псевдоевклидовом пространстве. Без такого всестороннего изучения этого вопроса совершенно невозможно добиться правильного понимания содержания СТО. Особое внимание необходимо обратить на способы получения инвариантов из компонент различных тензоров. Это связано с тем, что инвариантные, т. е. неизменяющиеся при преобразованиях координат, величины имеют фундаментальное значение в теории относительности.

2.3. Метрические свойства пространственно-временного континуума. Преобразование Лоренца

2.3.1. Понятие события. Под «событиями» условимся понимать элементарные события, т. е. происходящие в столь малой области пространства и в столь короткий промежуток времени, что (идеализируя положение вещей) их можно считать происходящими в одной точке и мгновенно. Само содержание события не будем рассматривать, так как событие в нашем понимании сводится к заданию определенного места (точки) в пространстве в определенный момент времени. Таким образом, рассматриваемое понятие события примерно в том же смысле представля-

ет собой идеализацию реального физического процесса малой протяженности в пространстве и времени, в каком геометрическое понятие точки — идеализацию реального физического тела малой протяженности в пространстве.

Рассмотрим теперь декартову систему пространственных координат, относительно которой свободная, т. е. не находящаяся под действием каких бы то ни было сил, материальная точка движется прямолинейно и равномерно. Подобная система координат называется *инерциальной*. Как уже отмечалось, любая система координат, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно данной инерциальной системы координат, тоже будет инерциальной. Как это следует из сформулированного в п. 2.1 основного постулата теории относительности, свет (или, точнее, любое электромагнитное возмущение) распространяется в пустоте с одной и той же постоянной скоростью относительно любой инерциальной системы независимо от состояния ее движения. Это весьма парадоксальное с точки зрения обычных представлений о пространстве и времени утверждение, как отмечалось, было установлено в многочисленных точных экспериментах.

Возникшее противоречие было устранено пересмотром представлений о пространстве и времени. Это обстоятельство создает особые трудности в освоении теории относительности.

Прежде всего пришлось отказаться от классического представления об абсолютном мировом времени, протекающем в любой области нашей Вселенной с одной и той же постоянной скоростью.

Пример 1. Для того чтобы понять необходимость отказа от абсолютного мирового времени, рассмотрим следующее. Допустим, что даны две инерциальные системы отсчета S и S' (рис. 2.1) [88], движущиеся относительно друг друга с постоянной скоростью v. Представим себе далее, что вдоль осей x и x' указанных систем отсчета установлены на равных расстояниях друг от друга стандартные часы, синхронизированные с помощью световых сигналов. Пусть в точке A системы S' подан в некоторый момент времени световой сигнал (рис. 2.1). Если точки B и C в системе S' находятся на равных расстояниях от точки A, то вследствие постоянства скорости света сигнал, поданный из точки A, придет одновременно в точки B и C (по часам системы S'). Однако это событие будет неодновременным по часам системы S. В самом деле, с точки зрения системы S точка B движется навстречу световому сигналу, следовательно (ввиду постоянства скорости света c во всех системах отсчета!), световой сигнал по часам системы S должен прийти в точку B раньше, чем в точку C.

Итак, события, одновременные в системе S', могут быть неодновременными в системе S. Следовательно, понятие одновременности оказывается относительным. Нельзя говорить об одновременности каких-либо событий или о промежутке времени, прошедшем между данными событиями, не указав системы отсчета, в которой указанные события отражаются.

Необходимо освоиться с относительностью понятий «одновременность» и «промежуток времени», так как без этого невозможно понимание дальней-

шего. Во избежание недоразумений подчеркиваем, что относительность понятия «времени» отнюдь не означает отказа от объективности его измерения в любой системе отсчета. Это замечание относится ко всем другим относительным понятиям современной физики. Так, например, понятие «вертикальное направление» носит относительный характер. Вертикальные направления в Москве и Владивостоке образуют между собой угол, и было бы нелепо спорить о том, какое из этих направлений «вертикальнее». Вместе с тем понятие «вертикальное направление» имеет вполне определенное объективное значение как для Москвы, так и для Владивостока, несмотря на свой относительный характер. Остается признать, что объективный ход времени в каждой инерциальной системе отсчета также носит относительный характер.

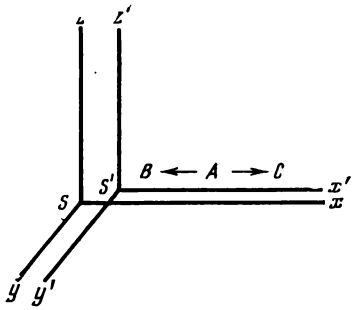


Рис. 2.1. Инерциальные системы отсчета

2.3.2. Понятие «пространственного расстояния» и «промежутка времени» в любой системе отсчета. Введем инерциальную систему отсчета S. Пусть в некоторой точке (x^1, x^2, x^3) этой системы в момент t был подан световой сигнал (событие 1). Пусть в некоторый другой момент $\tilde{t}$ этот сигнал был принят в точке $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ этой же системы отсчета S. Тогда можно записать

$$+c^2(\tilde{t}-t)^2-(\tilde{x}^1-x^1)^2-(\tilde{x}^2-x^2)^2-(\tilde{x}^3-x^3)^2=0, \qquad (2.47)$$

или

$$+(\tilde{x}^0-x^0)^2-(\tilde{x}^1-x^1)^2-(\tilde{x}^2-x^2)^2-(\tilde{x}^3-x^3)^2=0, \qquad (2.48)$$

где $x^0=ct$. Так как скорость света c постоянна во всех инерциальных системах отсчета, то в некоторой другой инерциальной системе отсчета S' уравнение (2.48) будет иметь аналогичный вид:

$$+(\tilde{x}'^0-x'^0)^2-(\tilde{x}'^1-x'^1)^2-(\tilde{x}'^2-x'^2)-(\tilde{x}'^3-x'^3)=0. \qquad (2.49)$$

Сравнивая уравнение (2.48) с основной фундаментальной формой псевдоевклидова пространства (2.3), видим, что реальный пространственно-временной континуум носит псевдоевклидов характер, причем распространение электромагнитных возмущений в этом континууме происходит по изотропным векторам, т. е. векторам нулевой длины (см. п. 2.1). Для материальной точки, движущейся со скоростью, меньшей скорости света c, очевидно, можно написать

$$s^2=+(\tilde{x}^0-x^0)^2-(\tilde{x}^1-x^1)^2-(\tilde{x}^2-x^2)^2-(\tilde{x}^3-x^3)^2>0. \qquad (2.50)$$

Итак, вектор, по которому движется свободная материальная точка, является времени-подобным.

Длина вектора

$$s^2=(\tilde{x}^0-x^0)^2-(\tilde{x}^1-x^1)^2-(\tilde{x}^2-x^2)^2-(\tilde{x}^3-x^3)^2, \qquad (2.51)$$

соединяющего два точечных события (x^0, x^1, x^2, x^3) и $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ в псевдоевклидовом пространственно-временном континууме, является абсолютным инвариантом преобразования координат, т. е. длина этого пространственно-временного вектора, который принято называть *интервалом*, будет иметь одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Наоборот, проекция этого вектора на оси координат, т. е. разности пространственных координат $\Delta x^k=\tilde{x}^k-x^k$ $(k=1, 2, 3)$ и временные промежутки $\Delta x^0=\tilde{x}^0-x^0$ будут относительными, зависящими от принятой для описания данного процесса инерциальной системы отсчета.

Резюмируя сказанное выше, можно утверждать, что пространство точечных событий взаимно однозначно отображается на псевдоевклидово пространство с основной фундаментальной формой (2.3), причем координаты событий x, y, z, t, отнесенные к любой инерциальной системе S, будут играть роль ортогональных координат в рассматриваемом псевдоевклидовом пространстве, т. е. t нужно еще умножить на c: $x=x^1$; $y=x^2$; $z=x^3$; $ct=x^0$.

В п. 2.1 было показано, что переход от формы

$$+(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2 \qquad (2.52)$$

к форме

$$+(x'^0)^2-(x'^1)^2-(x'^2)^2-(x'^3)^2 \qquad (2.53)$$

совершается с помощью преобразования Лоренца, которое в частном случае имеет вид

$$x'^0=x^1\mathrm{sh}\varphi+x^0\mathrm{ch}\varphi; \qquad x'^1=x^1\mathrm{ch}\varphi+x^0\mathrm{sh}\varphi;$$
$$x'^2=x^2; \qquad x'^3=x^3. \qquad (2.54)$$

Формы (2.52) и (2.53) соответствуют двум различным инерциальным системам отсчета. Следовательно, переход от формы (2.52) к форме (2.53) соответствует переходу от чисто пространственной системы прямоугольных координат (x^1, x^2, x^3) к другой чисто пространственной системе прямоугольных координат (x'^1, x'^2, x'^3), движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно.

Полагая

$$\mathrm{th}\,\varphi=v/c, \qquad (2.55)$$

и учитывая, что $t=x^0/c$, преобразование Лоренца (2.42) можно представить в виде

$$x^1=\frac{x'^1+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad x^2=x'^2; \qquad x^3=x'^3; \qquad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (2.56)$$

или

$$x'^1 = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad x'^2 = x^2; \quad x'^3 = x^3; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.57}$$

Для установления физического смысла параметра v заметим, что если некоторая точка P в системе отсчета (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) находится в покое, то должно быть

$$\frac{dx'^1}{dt'} = \frac{dx'^2}{dt'} = \frac{dx'^3}{dt'} = 0. \tag{2.58}$$

Поэтому

$$\frac{dx'^1}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = 0. \tag{2.59}$$

Равенства (2.58) и (2.59) могут иметь место только в том случае, если

$$v = dx/dt; \quad dy/dt = 0; \quad dz/dt = 0. \tag{2.60}$$

Итак, точка P, покоящаяся относительно системы (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), движется относительно системы (x^0, x^1, x^2, x^3) прямолинейно и равномерно, причем вектор ее скорости имеет составляющие $v^1 = v$, $v^2 = 0$, $v^3 = 0$. Иными словами, преобразования Лоренца (2.56) соответствуют переходу от инерциальной системы (x^1, x^2, x^3) к инерциальной системе (x'^1, x'^2, x'^3), движущейся относительно первой с постоянной скоростью v, направленной вдоль оси x^1. Из преобразования Лоренца следует, что скорость движения материальной точки никогда не сможет превзойти скорость света.

Сделаем одно важное методическое замечание. Как отмечалось, основной фундаментальной форме можно придать вид

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2,$$

или

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

В первом случае вектор (x^1, x^2, x^3, x^0) будет пространственноподобен, если $s^2 > 0$, и времениподобен, если $s^2 < 0$. И, наоборот, во втором случае времениподобен, если $s^2 > 0$, и пространственноподобен, если $s^2 < 0$.

Однако основной форме псевдоевклидова пространства можно придать вид $s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^0)^2$. Здесь координату x^0 следует считать мнимой (для реального пространственно-временного континуума $x^0 = ict$).

Это обстоятельство влияет на вид записи соответствующих формул в теории относительности. Так, в случае первой формы записи оператор

Даламбера (2.41) имеет вид

$$\Box = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{12}}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{22}}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{32}}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}\right),$$

где $x^0 = ct$.

Для последнего варианта фундаментальной формы записи

$$\Box = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{12}}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{22}}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{32}}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}\right),$$

где $x^0 = ict$.

Видно, что оба варианта записи оператора Даламбера эквивалентны.

Остановимся на еще одном существенном обстоятельстве. В псевдоевклидовом пространстве с основной фундаментальной формой $s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ компонентами вектора являются (x^1, x^2, x^3, ct); поэтому, если в преобразование Лоренца ввести компоненты этого вектора, то оно будет записываться следующим образом:

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x'^2; \quad x^3 = x'^3; \quad ct' = \frac{ct + \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда следует, что компоненты любого 4-вектора K в этом пространстве преобразуются следующим образом:

$$K'^1 = \frac{K^1 - \frac{v}{c} K_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad K^2 = K'^2; \quad K^3 = K'^3; \quad K'^0 = \frac{K^0 + \frac{v}{c} K^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если квадратичная форма задана в виде $s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^0)^2$, где $x^0 = ict$, то преобразование Лоренца будет иметь вид

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{iv}{c} x'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x'^2; \quad x^3 = x'^3; \quad x'^0 = \frac{x^0 + \frac{iv}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому, если задан 4-вектор потенциал (A^1, A^2, A^3, A^0), где $A^0 = i\varphi$, т. е. его последняя компонента мнимая, то преобразование Лоренца в соответствии с приведенным будет иметь вид

$$A'^1 = \frac{A^1 - \frac{iv}{c} A^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad A^2 = A'^2; \quad A^3 = A'^3; \quad A'^0 = \frac{A^0 + \frac{iv}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Наоборот, если 4-вектор потенциал задан в пространстве с метрикой $s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2t^2$, то все его компоненты были бы действительными и имели значение (A^1, A^2, A^3, φ). В этом случае они преобразуются так же, как в случае приведенного выше 4-вектора K.

2.4. Относительность пространственных расстояний и промежутков времени

Для правильного понимания физического содержания преобразования Лоренца необходимо остановиться на вытекающих из него кинематических эффектах.

2.4.1. Пусть в системе отсчета (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) покоится стержень длиной l. Другими словами, пусть

$$x_b'^1 - x_a'^1 = l, \tag{2.61}$$

где $x_a'^1$ и $x_b'^1$ — координаты концов стержня в этой системе отсчета. Рассматриваемый стержень движется относительно системы отсчета (x^0, x^1, x^2, x^3) с постоянной скоростью v. Его длина в этой системе отсчета равна разности

$$x_b^1 - x_a^1, \tag{2.62}$$

где x_a^1 и x_b^1 — координаты концов стержня, относящиеся к определенному (одному и тому же) моменту времени t системы (t, x^1, x^2, x^3). Воспользовавшись преобразованием Лоренца, получим

$$x_a'^1 = \frac{-vt + x_a^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad x_b'^1 = \frac{-vt + x_b^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.63}$$

Следовательно,

$$x_b'^1 - x_a'^1 = \frac{x_b^1 - x_a^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{2.64}$$

или

$$x_b^1 - x_a^1 = (x_b'^1 - x_a'^1)\sqrt{1 - v^2/c^2} = l\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2.65}$$

Эффект, выражаемый формулой (2.65), носит название *лоренцева сокращения*. Длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v, оказывается уменьшенной пропорционально множителю $\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Собственно говоря, лоренцево сокращение длины движущегося стержня означает, что разность координат одновременного положения концов стержня в неподвижной системе отсчета S (по часам этой системы) оказывается меньше длины стержня в системе отсчета S', относительно которой стержень покоится. Эффект этот взаимный. Стержень, покоящийся в системе S, будет иметь с точки зрения системы S' меньшую длину, чем его длина, измеренная в системе S.

Сделаем еще некоторые пояснения к этому важному положению. Измерение длины движущегося стержня или, что то же самое, разности координат одновременного положения его концов, может быть произведено следующим образом. Одновременно (по часам системы S) на оси x^1 производятся засечки

начала и конца движущегося стержня, затем производится измерение расстояния между этими засечками. С точки зрения системы S' (по часам этой системы) засечки начала и конца стержня, произведенные в системе S, отнюдь не будут одновременными. Этим с точки зрения системы S' объясняются результаты измерения между засечками в системе S, т. е. эффект лоренцева сокращения.

Эффект лоренцева сокращения имеет, таким образом, чисто кинематическое происхождение. Длина стержня или расстояние между одновременным положением его концов оказывается величиной относительной — различной в различных системах отсчета. Разумеется, относительность длины отнюдь не означает отказа от ее объективности в каждой системе отсчета. Таким образом, длина является величиной относительной.

2.4.2. Остановимся теперь подробнее на относительном характере промежутка времени. Пусть промежуток времени между двумя событиями, происшедшими в одной и той же точке движущейся системы S', будет $\Delta t' = t_2' - t_1'$. В системе отсчета S промежуток времени между этими же событиями будет в соответствии с преобразованиями Лоренца

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{t_2' + (v/c^2)\,x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_1' + (v^2/c^2)\,x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (2.66)$$

т. е. движущиеся часы отстают по отношению к покоящимся.

Этот вывод получен из рассмотрения хода часов системы S' с точки зрения системы S. Часы системы S' оказались отстающими по отношению к часам системы S. Совершенно аналогично можно показать, что часы системы S отстают относительно часов системы S'. Однако никакого противоречия здесь нет. В самом деле, пусть в некоторый момент t_1 часы A системы S находятся против движущихся часов A' системы S'. Допустим далее, что часы A и A' показывают одно и то же время (рис. 2.2, *а*). Часы A движутся относительно системы S, поэтому спустя некоторое время Δt в системе S будем сравнивать их показания уже не с часами A, а с часами B, по отношению к которым они окажутся отстающими (в соответствии с выводом формулы (2.66) показания часов должны сравниваться в одной и той же точке пространства).

Рассматривая то же явление с точки зрения системы S' (см. рис. 2.2), видим, что для суждения об отставании часов A необходимо сравнивать их показания с часами C'. Таким образом, когда говорим, что часы системы S' отстают от часов системы S, то сравниваем показания часов A' с показаниями часов B (рис. 2.2). Когда же говорим об отставании часов системы S по отношению к часам системы S', то сравниваем показания часов A с часами C' (см. рис. 2.2.). Таким образом, здесь каждый раз сравниваются показания различных часов и никакого противоречия в приведенном выше утверждении нет.

Из преобразования Лоренца вытекает не только объективно относительный характер длины, но и объективно относительный характер течения времени.

При анализе преобразования Лоренца далеко не всегда в достаточной степени акцентируют внимание на том, что оно связывает имеющие определенный физический смысл пространственно-временные координаты x^1, x^2, x^3, t некоторого точечного события с имеющими тот же физический смысл пространствен-

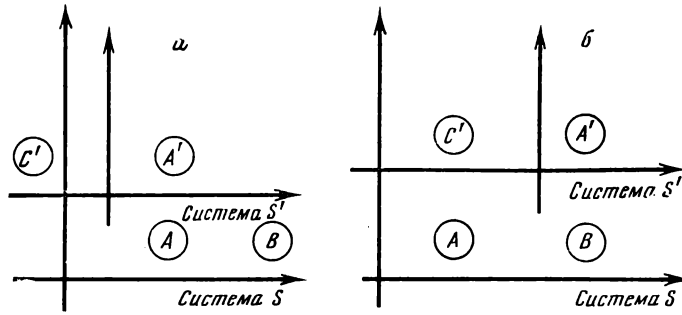


Рис. 2.2. К анализу процессов измерения времени

а — часы A и A' показывают одно и то же время; *б* — часы A' отстают по отношению к часам B, а часы A отстают по отношению к часам C

но-временными координатами того же события в другой инерциальной системе отсчета. Вместе с тем только благодаря этому утверждению преобразование Лоренца из чисто математической операции превращается в физический закон, а подлинное содержание релятивистской теории сводится к утверждению не только математической, но и физической ковариантности уравнений физики относительно преобразования Лоренца. В этом заключается сущность одного из постулатов теории относительности. То, что это утверждение нельзя считать «само собой разумеющимся», видно хотя бы из того, что еще Г. Фохт в 1887 г. установил инвариантность волнового уравнения относительно преобразований, совпадающих по существу с преобразованиями Лоренца. Однако для Г. Фохта преобразованные величины x'^1, x'^2, x'^3, t' были только математическими функциями, и он был совершенно далек от мысли, что как x^1, x^2, x^3, t, так и x'^1, x'^2, x'^3, t' имеют одинаковое физическое значение, каждое в своей системе отсчета. Для Лоренца координата t (местное время) была только некоторой функцией действительных физических координат x^1, x^2, x^3, t и только при более глубоком анализе исчезла разница между «местным временем» и «настоящим временем».

С физической точки зрения «местное время» Лоренца является просто временем движущейся инерциальной системы отсчета. Указанное обстоятельство подчеркивалось многими выдающимися физиками после выхода работы А. Эйнштейна [43] (см., например, [89]).

2.4.3. Анализ А. Эйнштейна основывался на экспериментально установленных свойствах электромагнитного поля. Предложенные им способы измерения координат явились не продуктом «свободного соглашения», а необходимым следствием вновь установленных физических закономерностей. Например, предложенный им способ синхронизации часов физически полностью обосновывался экспериментально установленной независимостью скорости света от скорости движения источника.

Таким образом, принятые в релятивистской механике методы измерения пространственно-временных координат оказались

пригодными, потому что они соответствуют объективной реальности и правильно ее отражают.

Из правильно понятых физических преобразований Лоренца с логической необходимостью следуют известные выводы об относительности длин, промежутков времени и одновременности.

Следовательно, утверждение, что присущие материальным телам и процессам свойства пространственной протяженности и длительности различно проявляются в разных системах отсчета, носит объективный характер.

Относительность длин и промежутков времени проявляется в самых различных процессах и, разумеется, не зависит ни от наблюдателя, ни от принятых методов измерения. Можно сказать, что относительность длин и промежутков времени проявляется во всех процессах, описываемых дифференциальными уравнениями, физически ковариантными относительно группы Лоренца.

2.5. Мировые линии движущихся материальных частиц. Собственное время

Допустим, что относительно инерциальной системы отсчета S движется материальная частица, закон движения которой описывается уравнением вида

$$x^k = x^k(t) \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2.67}$$

В таком случае для дифференциала интервала (или, что то же самое, для элемента длины мировой линии) получим

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} =$$

$$= c^2dt^2 - \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{dx^k(t)}{dt}\right)^2 dt^2 = c^2\left[1 - \frac{q(t)^2}{c^2}\right]dt^2, \tag{2.68}$$

откуда следует

$$ds = c\sqrt{1 - \frac{q(t)^2}{c^2}}\,dt. \tag{2.69}$$

Интегрируя (2.69), получим

$$s = c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1 - \frac{q(t)^2}{c^2}}\,dt. \tag{2.70}$$

Как ds, так, разумеется, и s (дифференциал длины и сама длина мировой линии частицы) являются инвариантами преобразования координат, т. е. они будут иметь одно и то же значение во всех системах отсчета. Следовательно, если переходим от инерциальной системы отсчета S к системе отсчета S', то получим

$$s = c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1 - \frac{q(t)^2}{c^2}}\,dt = c\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1}\sqrt{1 - \frac{\bar{q}(\bar{t})^2}{c^2}}\,d\bar{t}; \tag{2.71}$$

здесь величины $\bar{t}_0$, $\bar{t}_1$, $\bar{q}_1(\bar{t})$ получаются из величин t_0, t_1 и $q(t)$ при помощи преобразования Лоренца, связывающего системы отсчета S и S'.

Время, отсчитываемое часами, связанными с движущейся частицей, называется *собственным временем* этой частицы. Согласно (2.70) собственное время является инвариантом преобразования координат, так как оно пропорционально длине мировой линии, пройденной движущимися часами (множитель пропорциональности равен $1/c$). Этот вывод был полностью подтвержден на основе экспериментов по так называемому температурному красному смещению (температурное красное смещение не следует смешивать с гравитационным смещением). Эти эксперименты, основанные на эффекте Мёссбауэра, будут подробно рассмотрены ниже (см. п. 2.8).

Разумеется, не только длина, но и форма мировой линии в 4-мерном континууме являются абсолютными инвариантами любого преобразования координат (т. е. даже преобразования, переводящего данную инерциальную систему отсчета в некоторую неинерциальную систему отсчета). Мировую линию частицы можно было задать вообще не обращаясь к представлениям о каких-либо координатах. Для этой цели достаточно было бы задать главные радиусы кривизны и кручения мировой линии как функции параметра s. Конечно, при таком задании мировой линии она была описана с точностью до положения в 4-мерном пространственно-временном континууме.

Мировые линии всего множества частиц, составляющих нашу Вселенную, с этой точки зрения могли быть представлены в виде конгруэнции мировых линий, идущих от «вечности» до «вечности» и в известном смысле описывающих то, что происходило или может произойти в нашей Вселенной. Для определения подобной конгруэнции мировых линий необходимо было бы задать главные радиусы кривизны и кручения каждой мировой линии как функции параметра s и еще трех скалярных параметров.

Заметим, что итальянский математик Э. Чезаро построил подобную геометрию кривых в 2-мерном евклидовом пространстве, при этом никакие координаты вообще не вводились. Э. Чезаро назвал построенную геометрию натуральной геометрией.

Г. Минковский в своей работе [93], посвященной структуре пространства и времени, указывал, что законы физики получат наиболее совершенное выражение в виде геометрии конгруэнции (потока) мировых линий всех частиц Вселенной. Отметим, однако, что с квантовой точки зрения эта идея не осуществима, так как здесь не может быть приписана каждой частице определенная траектория как функции параметра s, играющего роль времени. Однако возможно построение статистической теории конгруэнций мировых линий.

Сделаем еще несколько заключительных замечаний. Мировая линия частицы, покоящейся в некоторой системе отсчета, очевидно, будет совпадать с осью времени этой системы отсчета. В другой системе отсчета эта частица уже будет иметь некоторую скорость v и для наблюдателей в новой системе отсчета мировая линия частицы представится в виде прямой линии, наклоненной к оси времени новой системы отсчета. На рис. 2.3 показа-

но движение частицы в 3-мерном евклидовом пространстве, а на рис. 2.4 показана мировая линия той же частицы. Таким образом, наблюдаемые траектории движущихся частиц являются проекциями на 3-мерную пространственно-подобную гиперповерхность мировой линии частиц в четырехмерном пространственно-временном континууме [2].

Обратим внимание на следующее. На оси времени рис. 2.4 поставлена величина ict, т. е. ось времени считается мнимой. В самом деле, как выше отмеча-

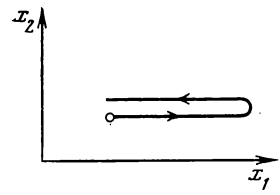


Рис. 2.3. Движение частицы в 3-мерном евклидовом пространстве

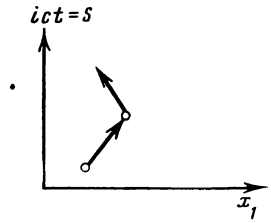


Рис. 2.4. Мировая линия движущейся частицы

лось, основную квадратичную форму пространственно-временного континуума можно записать как в виде

$$ds^2=c^2dt^2-dx^{1\,2}-dx^{2\,2}-dx^{3\,2},$$

так и в виде

$$ds^2=dx^{1\,2}+dx^{2\,2}+dx^{3\,2}-c^2dt^2. \tag{2.72}$$

В первом случае для покоящейся частицы ($dx^1=dx^2=dx^3=0$) величина s будет действительна. Во втором случае величина s для покоящейся частицы принимает мнимое значение, что и получило отражение на рис. 2.4. В дальнейшем будем иногда пользоваться формой (2.72), которая может оказаться в некоторых случаях более удобной. Последнее будет специально оговариваться.

2.6. Несколько замечаний об инвариантах группы Лоренца

В дальнейшем придется иметь дело с тензорными величинами, описывающими различные физические поля. Так, встретимся с тензором электромагнитного поля F_{ik}, с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и других полей T_{ik} и т. д. Из этих тензоров могут быть образованы различные инварианты или скаляры, которые будут сохранять свои значения при преобразованиях Лоренца, т. е. во всех инерциальных системах отсчета. В связи с этим сделаем несколько замечаний.

[2] Поверхность считается пространственно-подобной, если вектор, касательный к любой точке этой поверхности, пространственно-подобен. Аналогично определяется времени-подобная гиперповерхность.

Из того обстоятельства, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе отсчета пространственно-временные координаты преобразуются при помощи группы Лоренца, следует, что различные векторные и тензорные физические величины, служащие для описания различных физических полей, должны преобразовываться при помощи групп, гомоморфных группе Лоренца (см. п. 2.2).

Таким образом преобразуются, например, компоненты электромагнитного поля [56]: «Чисто магнитное поле постоянного магнита проявляется в движущейся по отношению к магниту системе координат как совокупность магнитного и электрического полей. Эта относительность полей ярко сказывается уже при малых скоростях, поэтому давно изучена и стала привычной».

Следует иметь в виду, что только в релятивистской физике стал понятен глубокий смысл этой относительности. Для понимания релятивистской теории фундаментальное значение имеет то обстоятельство, что для описания физических объектов и их свойств наряду с величинами физически относительными вводятся величины физически абсолютные, или инвариантные, т. е. величины, не зависящие от системы отсчета и состояния ее движения. Во избежание недоразумений заметим, что термин «абсолютный» всюду понимаем только в этом смысле. Другими словами, термин «абсолютный» употребляется как синоним термина «инвариантный».

Такими абсолютными величинами являются, например, интервал $s^2=x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-c^2t^2$, инварианты электромагнитного поля $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2$ и т. д.

Существенно важно то обстоятельство, что в теории относительности уравнения, описывающие различные процессы, имеют один и тот же вид во всех системах отсчета.

Итак, в релятивистской теории вовсе не утверждается, что свойства, присущие телам или процессам как таковым, относительны. В конце концов она показывает только то, как именно инвариантные свойства выступают в относительных проявлениях в различных системах отсчета. Но вместе с тем релятивистская теория показывает, каким образом из этих физически относительных величин можно получить характеризующие объекты — величины физически абсолютные. Другими словами, глубокий смысл этой теории заключается в том, что она указывает путь, позволяющий по физически относительному находить физически абсолютное или инвариантное [56].

2.7. Строение пространственно-временного континуума. Связь с законом причинности

Перейдем к рассмотрению некоторых существенных особенностей строения пространственно-временного континуума реального мира.

Пусть в начале координат некоторой инерциальной системы в момент времени $t=0$ произошло некоторое точечное событие, заключающееся, например, в испускании света. Для простоты

ограничимся рассмотрением одной пространственной координаты x и времени t, откладывая их на осях прямоугольных координат (рис. 2.5). Луч света, исходящий из точки O в момент времени $t=0$, изобразится в указанной системе отсчета прямыми AB или DC. Так как наибольшая возможная скорость движения материальной точки всегда меньше скорости света, то прямолинейное и равномерное движение такой точки, проходящей в момент $t=0$ через координату $x=0$, изобразится на рис. 2.5 прямой линией, наклоненной к оси времени t под углом, меньшим, чем углы, образуемые с этой осью прямыми AB и CD.

Таким образом, прямые, изображающие движение частиц, вылетают из точки O в момент $t=0$, должны лежать внутри областей AOC и DOB. Нетрудно убедиться, что интервал, связывающий любую точку в области AOC или DOB с начальной точкой, носит времениподобный характер, т. е. для любых точек в упомянутых областях имеет место соотношение $x^2-c^2t^2<0$.

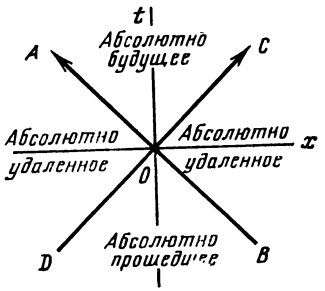


Рис. 2.5. К анализу строения пространственно-временного континуума

Рассмотрим детальнее особенности событий, изображаемых точками в области AOC. Как следует из неравенства, все эти события являются (по отношению к событию O) будущими событиями. Область AOC можно назвать (по отношению к событию O) областью абсолютно будущего, так как не существует системы отсчета, в которых события, изображаемые какой-либо точкой в области AOC, произошли бы раньше, чем событие O. Аналогично этому область DOB (см. рис. 2.5) можно назвать (по отношению к событию O) областью абсолютно прошедшего. В областях COB и AOD интервал, связывающий любую точку этих областей с точкой O, носит пространственно-подобный характер. Не существует системы отсчета, в которой события, изображаемые точкой O и какой-либо точкой из этих областей, происходили бы в одной и той же точке пространства. Однако в этих областях понятия «одновременно», «раньше» и «позже» приобретают полностью относительный характер. Существуют системы отсчета, в которых событие O предшествует какому-либо событию K, изображаемому точкой в области COB или AOD. Наоборот, в других системах отсчета событие O может происходить позже или одновременно с упомянутым событием K.

На первый взгляд может показаться, что относительность понятий «раньше», «позже» находится в резком противоречии с законом причинности, так как согласно этому закону причина всегда должна предшествовать следствию. Однако противоречие это только кажущееся. В самом деле, если скорость распро-

странения взаимодействий между различными телами не может превосходить скорости света, то интервал между событиями, которые можно определить как причину и следствие, всегда носит времени-подобный характер. Для таких событий, как отмечалось понятия «раньше» и «позже» являются абсолютными. Таким образом, принятые в теории относительности представления о пространственно-временном континууме находятся в полном соответствии с общим законом причинности.

2.8. Компоненты 4-скоростей

Компоненты скорости частиц в 3-мерном евклидовом пространстве определяются как

$$q^k = dx^k/dt. \tag{2.73}$$

Следует отметить, что в евклидовом пространстве в декартовых координатах исчезает различие между ко- и контравариантными составляющими векторов и тензоров. Поэтому составляющим векторов и тензоров в этом пространстве и в этих координатах будем приписывать только верхние индексы. Далее условимся считать, что если в произведении нескольких сомножителей встречаются два одинаковых верхних индекса, то по ним производится суммирование от одного до трех.

Таким образом, квадрат 3-мерной скорости может быть записан в виде

$$q^2 = q^k q^k = (q^k)^2 = (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2. \tag{2.74}$$

Компоненты 3-мерной скорости (2.73) не являются составляющими вектора в псевдоевклидовом пространстве. Единственный 4-вектор, который можно образовать из компонент скорости материальной точки (2.73), записывается следующим образом:

$$q^1/c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}};\quad q^2/c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}};\quad q^3/c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}};$$
$$i/\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}. \tag{2.75}$$

В дальнейшем в качестве компонент радиус-вектора в псевдоевклидовом пространстве будем принимать

$$x^1 = x^1;\quad x^2 = x^2;\quad x^3 = x^3;\quad x^0 = ict. \tag{2.76}$$

Нетрудно убедиться, что компоненты 4-скорости могут быть записаны также следующим образом:

$$u^i = dx^i/cd\tau, \text{ где } d\tau = \sqrt{1 - q^2/c^2}dt = ds/c. \tag{2.77}$$

Компоненты 4-скорости не являются независимыми, так как они тождественно удовлетворяют соотношению

$$u^i u_i = -1. \tag{2.78}$$

Компоненты 4-скорости преобразуются по формулам преобразования Лоренца как составляющие вектора в псевдоевклидовом пространстве.

2.9. Теорема сложения скоростей

Большое значение в релятивистской кинематике имеет теорема сложения скоростей. Представим себе материальную точку, которая движется относительно инерциальной системы S со скоростью

$$a^k = dx^k/dt. \tag{2.79}$$

Относительно другой инерциальной системы S' рассматриваемая материальная точка будет двигаться со скоростью

$$a'^k = dx'^k/dt' \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2.80}$$

Если система S' движется относительно системы S вдоль оси x со скоростью v, то, как это вытекает из преобразования Лоренца, связь между относительными скоростями a^k и a'^k дается следующими формулами [88]:

$$a^1 = (a'^1 + v)\Big/\left(1 + \frac{a'^1 v}{c^2}\right), \quad a^2 = \left(a'^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)\Big/\left(1 + \frac{a'^1 v}{c^2}\right),$$

$$a^3 = \left(a'^3\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)\Big/\left(1 + \frac{a'^1 v}{c^2}\right). \tag{2.81}$$

В частном случае, если частица движется параллельно оси x', из формул (2.81) следует

$$a^1 = (a'^1 + v)\Big/\left(1 + \frac{a'^1 v}{c^2}\right). \tag{2.82}$$

Пример 2. Допустим, что тело B движется вдоль оси x относительно тела A со скоростью 0,9 c, а тело C движется относительно тела B также со скоростью 0,9 c. Спрашивается, с какой скоростью тело C движется относительно тела A? Согласно элементарным представлениям (лежащим также в основании механики Ньютона) скорость тела C относительно тела A должна равняться

$$0{,}9\ c + 0{,}9\ c = 1{,}8\ c.$$

Ответ этот, однако, совершенно неверен. В соответствии с формулой (2.82) эта скорость будет равна

$$\frac{0{,}9c + 0{,}9c}{1 + (0{,}9c)^2/c^2} = 0{,}995c.$$

Как и следовало ожидать, относительная скорость тела C по отношению к телу A оказалась меньше c, так как никакое тело не может двигаться со скоростью, большей скорости света относительно инерциальной системы.

При малых скоростях движения различие между законом сложения скоростей, полученным из формулы (2.82), и классическим законом исчезает. Если $v \ll c$, то $a = a' + v$.

Аналогично рассматривается 4-вектор ускорения [7].

2.10. Общее преобразование Лоренца

Введение понятия вектора 4-скорости дает возможность в наиболее простом виде представить матрицу общего преобразования Лоренца [7, 91].

Допустим, что компоненты скорости движения инерциальной системы отсчета S' относительно инерциальной системы отсчета S имеют значения

$$u^k = dx^k/cd\tau \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{2.83}$$

Тогда общее преобразование Лоренца дается формулой

$$x'^k = a_p^k x^p. \tag{2.84}$$

Тензор $a_p{}^k$ может быть представлен в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{u_1 u^1}{1 - iu_0} & \dfrac{u_1 u^2}{1 - iu_0} & \dfrac{u_1 u^3}{1 - iu_0} & -iu_1 \\ \dfrac{u^2 u_1}{1 - iu_0} & 1 + \dfrac{u_2 u^2}{1 - iu_0} & \dfrac{u_2 u^3}{1 - iu_0} & -iu_2 \\ \dfrac{u^3 u_1}{1 - iu_0} & \dfrac{u^3 u_2}{1 - iu_0} & 1 + \dfrac{u_3 u^3}{1 - iu_0} & -iu_3 \\ iu_1 & iu_2 & iu_3 & -iu_0 \end{pmatrix}. \tag{2.85}$$

С помощью этой матрицы можно производить преобразование различных векторных и тензорных величин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. В частности, она используется в задачах инерциальной навигации.

Пример 3. Пусть в системе отсчета S' задан тензор

$$(T^{ik})' = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{e} \end{pmatrix}. \tag{2.86}$$

Этот же тензор в системе отсчета S будет иметь вид

$$T^{ik} = a_n^i a_m^k (T^{nm}) = (p + \mathrm{e})\, u^i u^k + p g^{ik}. \tag{2.87}$$

2.11. Преобразование волнового вектора и частоты. Продольные и поперечные эффекты Доплера

Рассмотрим в пространстве с метрикой $s^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-c^2t^2$ два вектора — радиус-вектор точки, заданной в этом пространстве (x^1, x^2, x^3, ct), и компоненты волнового 4-вектора $(k^1, k^2, k^3, \omega/c)$.

Скалярное произведение этих векторов

$$x^1k_1+x^2k_2+x^3k_3-\omega t \tag{2.88}$$

является инвариантом. Этот инвариант называется фазой плоской волны. Следовательно, при переходе к новой инерциальной системе отсчета компоненты волнового вектора и частоты преобразуются как компоненты 4-вектора;

$$k^1=\frac{k_1'+(v/c^2)\,\omega'}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\quad k^2=k'^2;\quad k^3=k'^3;\quad \omega=\frac{\omega'+k_1'v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{2.89}$$

Если источник света имеет в собственной системе отсчета частоту ω', то при движении по лучу зрения получим (излучатель находится в штрихованной системе)

$$\omega=\frac{\omega'(1-v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{2.90}$$

При движении источника перпендикулярно к лучу зрения получим

$$\omega=\frac{\omega'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{2.91}$$

Формулы (2.90) и (2.91) выражают продольный и поперечный эффекты Доплера.

При $\beta\ll 1$ можно написать для продольного эффекта

$$\omega\approx\omega'(1-v/c) \tag{2.92}$$

и для поперечного эффекта

$$\omega\approx\omega'. \tag{2.93}$$

Это классические формулы эффекта Доплера. В данном случае поперечный эффект Доплера не имеет места.

Классический эффект Доплера зависит, таким образом, от $\beta=v/c$, входящей в уравнение эффекта Доплера в первой степени. В релятивистском случае наряду с поправкой к продольному эффекту Доплера возникает еще поперечный эффект Доплера. Эти эффекты зависят уже в первом приближении от β^2 и поэтому при малых скоростях источника трудно наблюдаемы.

Тем не менее в тонких экспериментах П. Айвса и Д. Стилуэлла, использовавших в качестве источника излучения каналовые

лучи, формулы (2.90) и (2.91) получили хорошее подтверждение [91, 7].

Совершенно новую и исключительно точную возможность проверки релятивистских утверждений о «парадоксах времени» дал эффект Мёссбауэра, согласно которому смещение частоты у квантов, излучаемых ядрами на 1 К, может быть найдено по формуле

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right) = \frac{c_p}{2c^2}. \qquad (2.94)$$

Как указывает Г. Вертхейм [94], при быстром тепловом движении атомов в твердом теле из того факта, что энергия γ-квантов, испускаемых таким атомом, уменьшается с ростом его температуры, следует, что частота атома тем более понижается, или «ход времени для атома тем более замедляется», чем больше его скорость относительно неподвижного наблюдателя. Ускорения, испытываемые атомом в твердом теле, очень велики и превосходят в 10^{14} раз гравитационное ускорение у поверхности Земли, однако это никак не влияет на релятивистское замедление времени.

Таким образом, температурное смещение частоты, полученное на основе эффекта Мёссбауэра, дало прекрасное подтверждение релятивистского замедления времени. При этом было также показано, что релятивистское замедление времени зависит только от скорости, но не от (в широких пределах) ускорения источника излучения.

Известно, что наряду с температурным смещением существует гравитационное смещение частоты, которое также может быть получено экспериментально на основе эффекта Мёссбауэра. Этот эффект рассмотрим в разделе, посвященном ОТО.

Релятивистский эффект Доплера дал возможность установить, что все галактики удаляются с тем большей скоростью от нас, чем дальше они от нас находятся (закон Хаблла). Так были найдены космические объекты (например, группа галактик в созвездии Гидры), удаляющиеся от нас с гигантской скоростью— красное смещение этих галактик указывало на одну пятую скорости света. Сравнительно недавно для ряда квазаров (ЗСУ и др.) К. Шмидт нашел красное смещение, соответствующее трем пятым скорости света.

В заключение отметим, что существует прекрасное подтверждение релятивистского замедления времени. Например, короткоживущие элементарные частицы, обладающие большой скоростью, могут проходить в лабораторной системе отсчета расстояния на много порядков больше, чем произведение скорости света на их время жизни, измеренное для частиц, покоящихся в лабораторной системе. Понятно, что этот эффект является результатом замедления темпа всех процессов, происходящих с движущейся частицей, т. е. эффекта замедления времени.

2.12. О «парадоксе с часами» [7, 95, 108]

Суть «парадокса с часами» [95, 96, 7] заключается в следующем (рис. 2.6). Представим себе инерциальную систему отсчета S^A, в начале которой покоятся часы A_0. Допустим, что в момент времени $t^{A_0}=0$ мимо них пролетают часы B, показывающие в этот момент времени $t^B=0$. Допустим, далее, что часы B движутся с постоянной скоростью $(+v)$ в положительном направлении оси x^A системы S^A. В таком случае часы B при сравнении их показаний с показаниями часов системы S^A, мимо которых они в данный момент пролетают, должны отставать от этих часов в соответствии с формулой

$$t^B = \sqrt{1-\beta^2}\,t^A, \qquad \beta = v/c. \tag{2.95}$$

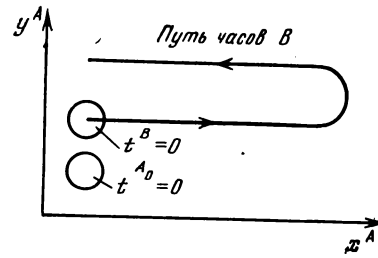


Рис. 2.6. К «парадоксу с часами»

Справедливость этой формулы является твердо установленным фактом. Если часы B, пролетев некоторое расстояние (сколь угодно большое) в системе S^A, поворачивают обратно и с постоянной скоростью $(-v)$ возвращаются к часам A_0, то в момент их повторной встречи с часами A_0 должно быть

$$t^{\text{B}}_{\text{встр}} = \sqrt{1-\beta^2}\; t^{\text{A}_0}_{\text{встр}}. \tag{2.96}$$

Рассмотрим весь этот процесс с точки зрения системы отсчета, жестко связанной с часами B. Пока часы B движутся в положительном направлении оси x_A, эта система отсчета строго инерциальна. Эта система отсчета будет строго инерциальной и при обратном движении часов B со скоростью $(-v)$. Следовательно, если пренебречь влиянием кратковременного ускорения часов B, возникшим при изменении направления их движения, то, казалось бы, придем к выводу, что часы A_0 должны все время отставать по отношению к часам системы отсчета, жестко связанной с часами B; следовательно, в момент повторной встречи $t_{\text{встр}}$ с часами B как будто бы должно быть

$$t^{\text{A}_0}_{\text{встр}} = \sqrt{1-\beta^2}\; t^{\text{B}}_{\text{встр}}. \tag{2.97}$$

Противоречие между формулами (2.96), (2.97) и составляет содержание «парадокса с часами». Противоречие в (2.96) и (2.97) состоит в том, что $t^{A_0}_{\text{встр}}$ и $t^{B}_{\text{встр}}$ поменялись местами.

Следует отметить, что при рассмотрении хода часов A_0 с точки зрения системы отсчета S^B все время сравниваем показания этих часов с теми часами системы S^B, мимо которых они в данный момент пролетают. Другими словами, сравнение показаний хода часов всегда происходит в одной и той же точке

пространства. Необходимо, однако, пояснить следующее обстоятельство. При выводе формулы (2.96) пренебрегали влиянием кратковременного ускорения часов B на показания их стрелок (в сущности говоря, такое же предположение было сделано при получении формулы (2.97)). По этому поводу необходимо отметить следующее.

1. Экспериментальные исследования, связанные с эффектом Мёссбауэра (температурное красное смещение), показали, что релятивистское замедление времени зависит только от скорости и не зависит от ускорения движущихся часов, если сравнивать их показания с показаниями неподвижных (в инерциальной системе отсчета) часов, мимо которых они в данный момент пролетают. Именно с такой ситуацией имели дело при изложении «парадокса с часами». Здесь сравнение показаний движущихся и неподвижных часов всегда происходит, как уже выше отмечалось, в одной и той же точке пространства.

Таким образом, изменение показаний часов B может вычисляться по формуле

$$t^B = t^B(t^A) = \int_0^{t^A} \sqrt{1 - \frac{v(t^A)^2}{c^2}}\, dt^A, \qquad (2.98)$$

если только ускорение часов B не превышает 10^{14} g. Обозначив теперь через δt^A время ускоренного движения часов B по часам системы S^A, легко заключить, что за это время стрелки часов B сместятся на величину

$$\delta t^B = \int_{t^A}^{t^A+\delta t^A} \sqrt{1 - \frac{v(t^A)^2}{c^2}}\, dt^A. \qquad (2.99)$$

Теперь совершенно ясно, что всегда можно выбрать такую положительную величину η, что при условии $\delta t^A < \eta$ будем иметь $\delta t^B < \varepsilon$, где ε — наперед заданная малая положительная величина, ограниченная только одним требованием: ускорение движущихся часов не должно превосходить указанного выше предела. Но есть все основания ожидать, что дальнейшие эксперименты по эффекту Мёссбауэра увеличат этот предел.

Еще раз подчеркнем, что от температурного красного смещения следует отличать гравитационное смещение, когда сравниваются показания часов, находящихся в различных точках пространства, причем между этими точками существует конечная разность гравитационного потенциала (см. гл. 3).

2. Во всяком случае изменение показания часов B, связанное с их кратковременным ускорением, может быть сделано как угодно малым по сравнению со временем их путешествия от часов A_0 и обратно. Для этого необходимо, чтобы длина пути часов B, начиная с момента их первой встречи и до момента второй встречи с часами A_0, была достаточно велика.

Для разъяснения парадокса необходимо показать, что формула (2.96) остается справедливой как с точки зрения системы отсчета S^A, так и с точки зрения системы отсчета S^B, жестко связанной с часами B.

Помимо изложенного выше «парадокса с часами», в литературе обсуждался еще так называемый обобщенный парадокс с часами, содержание которого будет изложено ниже.

2.12.1. Разъяснение В. Паули. В известной книге В. Паули [89], посвященной теории относительности, дается удивительное по своей наглядности разъяснение «парадокса с часами».

В. Паули прежде всего замечает, что промежутки времени, отсчитываемые часами, пропорциональны интегралам вдоль мировых линий, по которым двигались эти часы в пространственно-временном континууме. В результате получим

$$t^{A_0} = \frac{\text{длина мировой линии часов } A_0}{ic} = \frac{1}{ic}\int ds^{A_0}; \qquad (2.100)$$

$$t^{B} = \frac{\text{длина мировой линии часов } B}{ic} = \frac{1}{ic}\int ds^{B}. \qquad (2.101)$$

Мировые линии, проходимые часами A_0 и B, показаны на рис. 2.7. Применяя теорему Пифагора, можно написать

$$ict^{B}_{\text{встр}} \cong 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}ict^{A_0}_{\text{встр}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}vt^{A_0}_{\text{встр}}\right)^2}. \qquad (2.102)$$

Из (2.102) следует

$$t^{B}_{\text{встр}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; t^{A_0}_{\text{встр}}. \qquad (2.103)$$

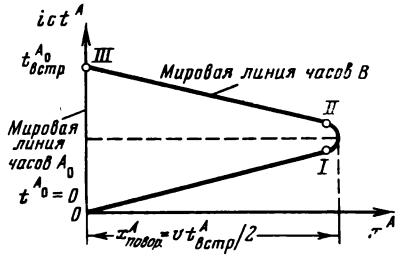


Рис. 2.7. Мировые линии часов A_0 и B

Так как интегралы (2.100), (2.101) являются инвариантными, то пришли бы к тому же результату независимо от системы отсчета, с точки зрения которой рассматривается изучаемый процесс. В. Паули подчеркивает, что интегралы (2.100), (2.101) дают собственное время рассматриваемых часов, т. е. время, отсчитываемое наблюдателем, постоянно имеющим ту же скорость, что и часы.

Сделаем несколько общих замечаний по поводу разъяснения В. Паули.

1. Выше принято, что время, показываемое часами, движущимися произвольным образом, равно длина мировой линии часов/ic. В. Паули замечает, что это может считаться справедливым, если часы движутся с не слишком большим ускорением (см. также [89]). Это предположение В. Паули вполне обосновано до весьма значительных ускорений. Здесь нелишне еще раз подчеркнуть, что, во всяком случае, изменение показания часов B, связанное с их кратковременным ускорением, может быть сделано как угодно малым по сравнению со временем их путешествия от часов A_0 и обратно.

2. Несмотря на то, что влиянием кратковременного ускорения часов B на их ход можно пренебречь, все же это ускорение имеет основное значение в разрешении «парадокса с часами», ибо благодаря этому ускорению изменилось направление мировой линии часов B и она приняла форму 0—I—II—III (см. рис. 2.7).

3. В псевдоевклидовом пространственно-временном континууме инвариантная длина ломаной линии 0—I—II—III оказывается меньше инвариантной длины прямой 0—III. Напомним, что свет в 4-мерном континууме вообще распространяется по линиям нулевой длины.

В заключение следует подчеркнуть существенную асимметрию в поведении часов A_0 и B. В самом деле, часы A_0 все время покоятся в инерциальной системе отсчета S^A, в то время как часы B сначала были связаны с инерциальной системой отсчета, имеющей скорость $+v$ по отношению к системе S^A, а затем — с инерциальной системой отсчета, имеющей скорость $-v$ по отношению к той же системе отсчета S^A.

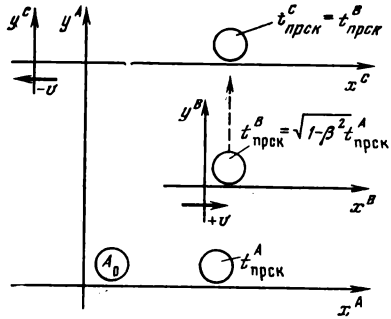
Так как В. Паули рассматривал «парадокс» в псевдоевклидовом пространстве СТО, то из указанной асимметрии следует, что мировая линия часов A_0 является геодезической этого пространства, в то время как мировая линия часов B таковой не является. Таким образом, системы отсчета S^A и S^B отнюдь не равноценны.

2.12.2. Метод трех инерциальных систем координат [7, 95]. Данное В. Паули разъяснение «парадокса с часами» основывалось на вычислении инвариантных длин мировых линий, пройденных как часами A_0, так и часами B. Вместе с тем можно поставить вопрос о полном расчете времени часов A_0 с точки зрения системы координат, жестко связанной с часами B. Такая постановка вопроса, сделанная в последние годы рядом авторов, вполне оправданна [7, 95]. Необходимо прямым расчетом показать, что с точки зрения системы отсчета, жестко связанной с часами B, должно быть справедливо соотношение (2.96). Ниже это будет сделано.

Рассматривая «парадокс с часами» с точки зрения СТО, необходимо оперировать исключительно с инерциальными системами отсчета. Поэтому необходимо прежде всего отметить, что часы B во время путешествия были вначале жестко связаны с инерциальной системой отсчета S^B, имеющей по отношению к системе S^A скорость $+v$, а затем с инерциальной системой отсчета S^C, имеющей по отношению к системе S^A скорость $-v$ [95,7].

В [97, с. 111] В. А. Брумберг отметил следующее: «Разъяснение парадокса заключается в том, что надо рассматривать не две, а три инерциальные системы: систему S, систему S', движущуюся относительно S со скоростью v, и систему S'', движущуюся относительно S со скоростью $-v$. В первой половине движения часы B покоятся в S', а во второй половине — в системе S''. Если вести все рассуждения в рамках системы S', то сначала часы A будут действительно отставать, но затем, на втором этапе, будут двигаться и часы A (со скоростью $-v$), и часы B (со скоростью $-2v/(1+v^2c^2)$). Окончательно отстанут именно часы B. Разумеется, этот результат одинаков во всех трех системах».

Заметим, что метод трех инерциальных систем отсчета впервые был опубликован И. И. Гольденблатом еще в 1961 г. в статье [95, 108].



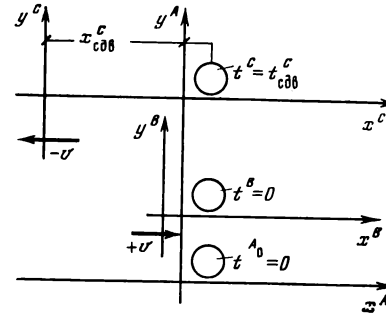


Рис. 2.8. К методу трех инерциальных систем отсчета

Рис. 2.9. Анализ процессов «сдвига времени»

Время перескока часов B из системы отсчета S^B в систему отсчета S^C по часам системы отсчета S^A обозначим через $t^A_{прск}$. Очевидно, время перескока по часам S^A должно удовлетворять соотношению

$$t^B_{прск} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^A_{прск}. \tag{2.104}$$

Координаты перескока $x^A_{прск}$ в системе S^A удовлетворяют соотношению

$$x^A_{прск} = v t^A_{прск}, \tag{2.105}$$

и, кроме того, в системе S^A

$$2t^A_{прск} = t^{A_0}_{встр}. \tag{2.106}$$

Теперь можно рассматривать весь процесс с точки зрения системы отсчета S^B или системы отсчета S^C, с которыми последовательно связаны часы B. Рассмотрим этот процесс с точки зрения системы отсчета S^C.

Что собой представляет система отсчета S^C? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо отметить следующее. Часы перескочили из системы отсчета S^B в систему S^C в тот момент, когда их показания удовлетворяли соотношению (2.104). Теперь необходимо принять, и это является наиболее существенным, что показания часов системы S^C, расположенных в том же месте, куда перескочили часы B, удовлетворяют соотношению

$$t^C_{прск} = t^B_{прск} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^A_{прск}. \tag{2.107}$$

Это соотношение является прямым следствием предположения о том, что кратковременное ускорение часов B не оказывает влияния (или не оказывает существенного влияния) на показания их стрелок (рис. 2.8). Вместе с тем, желая изучить ход часов A_0 с точки зрения системы S^C и, в частности, получить данные о по-

казаниях часов A_0 в момент их встречи с часами B, необходимо принять, что синхронизация часов в системе S^c удовлетворяет соотношению (2.106). Другими словами, необходимо принять, что часы B включились в световую синхронизацию часов системы S^c.

Следует отметить, что существует неограниченное множество систем отсчета S^c, движущихся относительно системы отсчета S^A со скоростью $-v$. Все эти системы отсчета отличаются друг от друга показаниями часов $t^C_{\text{сдв}}$, пролетающих помимо часов A_0 в тот момент, когда они показывают время $t^{A_0}=0$ (рис. 2.9). Величину $t^C_{\text{сдв}}$ удобно назвать «сдвигом времени» системы S^c по отношению к системе S^A.

Из всего указанного множества систем отсчета S^c необходимо, как это только что было разъяснено, выбрать такую систему отсчета, которая удовлетворяет соотношению (2.106). Было принято, что часы системы S^c в момент, когда их стрелки показывают время $t^C_{\text{сдв}}$ пролетают мимо часов A_0 системы S^A, показывающих время $t^{A_0}=0$. Допустим, что координата этих часов в системе S^c равна $x^C_{\text{сдв}}$ (см. рис. 2.9). В таком случае преобразованию Лоренца могут быть подвергнуты разности $(x^c - x^C_{\text{одв}})$ и $(t^c - t^C_{\text{сдв}})$. Перескок часов B в систему S^c характеризуется в этой системе параметрами $x^C_{\text{прск}}$ и $t^C_{\text{прск}}$. Это же событие в системе S^A характеризуется параметрами $x^A_{\text{прск}}$ и $t^A_{\text{прск}}$. Связь между этими параметрами дается преобразованиями Лоренца

$$x^A_{\text{прск}} = \frac{(x^C_{\text{прск}} - x^C_{\text{сдв}}) - v\,(t^C_{\text{прск}} - t^C_{\text{сдв}})}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{2.108}$$

$$t^A_{\text{прск}} = \frac{(t^C_{\text{прск}} - t^C_{\text{сдв}}) - \dfrac{v}{c^2}\,(x^C_{\text{прск}} - x^C_{\text{сдв}})}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.109}$$

Исключив из уравнений (2.108), (2.109) разность $(x^C_{\text{прск}} - x^C_{\text{одв}})$ и учитывая (2.105) и (2.107), получим

$$t^C_{\text{сдв}} = -\frac{2\beta^2 t^A_{\text{прск}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.110}$$

Рассмотрим теперь ход часов A_0 с точки зрения системы отсчета S^c, начиная с момента их первой встречи с часами B, т. е. с момента $t^{A_0}=0$, и кончая моментом $t^{A_0}=t^{A_0}_{\text{встр}}$, т. е. моментом их повторной встречи с часами B. Часы A_0 показывают время $t^{A_0}=0$ в тот момент, когда они пролетают мимо часов системы S^c, показывающих время

$$t^C_{\text{сдв}} = -\beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Пусть начиная с этого момента до момента встречи часов A_0 с часами B (или рядом с ними расположенными часами C в систе-

ме координат S^C) пройдет по часам системы S^C время Δt^C. Тогда можем написать

$$-\beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2} + \Delta t^C = t^C_{\text{встр}} = t^B_{\text{встр}}. \qquad (2.111)$$

Так как часы A_0 запаздывают по отношению к часам системы S^C, то должно иметь место равенство

$$t^{A_0}_{\text{встр}} = \Delta t^C \sqrt{1-\beta^2}. \qquad (2.112)$$

Исключив из (2.112) и (2.111) время Δt^C, получим

$$t^C_{\text{встр}} = t^B_{\text{встр}} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^{A_0}_{\text{встр}}. \qquad (2.113)$$

При рассмотрении процесса с точки зрения системы S^A была получена формула (2.96), совпадающая с (2.113).

Таким образом, несмотря на запаздывание часов A_0 по отношению к часам системы S^C (формула (2.112)), в момент встречи часов A_0 и B имеет место неравенство $t^{A_0} > t^B$. Парадокс разъясняется наличием определенного сдвига времени $t^C_{\text{сдв}}$ той системы отсчета S^C, в синхронизацию которой включились часы B после их перескока. Следовательно, для того чтобы можно было сделать определенное заключение о поведении часов, нужно сравнивать не только показания отдельных пар часов, но и весь ход времени в двух движущихся друг относительно друга системах отсчета, для чего, в свою очередь, необходимо знать величину сдвига времени, определение которого дано выше.

Необходимо также обратить внимание на следующее. Выше рассматривался с точки зрения системы отсчета S^C ход часов A_0, начиная с момента $t_A = 0$ (т. е. с момента их первой встречи с часами B) и кончая моментом $t^{A_0}_{\text{встр}}$ (т. е. моментом их повторной встречи с часами B или рядом с ними расположенными часами системы S^C). Напомним, что часы B в момент $t^B_{\text{прск}}$ перескочили в систему S^C, причем благодаря наличию у системы S^C параметра сдвига времени по отношению к системе S^A часы B автоматически включились в синхронизацию часов в этой системе.

Было отмечено, что рассмотрение хода часов A_0 с точки зрения системы S^C приводит к тому же результату, что и рассмотрение хода часов B с точки зрения системы отсчета S^A. Понятно, что тот же результат получится, если рассматривать весь процесс с точки зрения системы отсчета S^B.

Рассматривая поведение часов A_0 начиная с момента $t^{A_0} = 0$ до момента $t^A = t^{A_0}_{\text{встр}}$ в системе отсчета S^C, вывели формулу (2.111), т. е. определили показание часов в момент их повторной встречи с часами A_0.

Однако можно рассмотреть поведение часов A_0 в той же системе S^C и вычислить непосредственно величину $t^{A_0}_{\text{встр}}$. Часы A_0 относительно системы отсчета S^C движутся все время в одном направлении со скоростью $+v$. В тот момент, когда часы A_0 показывают время $t^{A_0} = 0$, часы в системе S^C, мимо которых в данный момент пролетают часы A_0, показывают (как это было выведено выше) время $t^C_{\text{сдв}}$:

$$t^C_{\text{сдв}} = -\beta^2 t^A_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (2.114)$$

Следовательно, по часам системы отсчета S^C время путешествия часов A_0 от момента, когда они показывали $t^{A_0}=0$ до момента $t^{A_0}_{\text{встр}}$ должно равняться

$$t^C_{\text{встр}} - (-\beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2}). \tag{2.115}$$

Так как часы A_0, движущиеся относительно системы отсчета S^C, запаздывают по отношению к часам этой системы, то должно иметь место равенство

$$[t^C_{\text{встр}} - (-\beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2})]\sqrt{1-\beta^2} = t^{A_0}_{\text{встр}}. \tag{2.116}$$

После элементарных преобразований [7] получим

$$t^C_{\text{встр}} = t^B_{\text{встр}} = t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.117}$$

Таким образом, опять получили тот же результат, когда рассматривали весь процесс в системе отсчета S^A.

Возможно, однако, комбинированное рассмотрение. Можно, например, рассматривать ход часов A_0 в системе отсчета S^B вплоть до момента $t^B_{\text{прск}}$ и начиная с этого момента рассматривать ход часов A_0 уже с точки зрения системы отсчета S^C. Во время движения часов A_0 на первом этапе своего пути они запаздывают по отношению к часам системы S^B, т. е.

$$t_1^{A_0} = t^B_{\text{прск}}\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.118}$$

Здесь $t_1^{A_0}$ — время, отсчитанное часами A_0 в конце первого этапа своего пути.

Далее рассмотрим ход часов A_0 с точки зрения системы отсчета S^C. Стрелки часов в этой системе, мимо которых пролетают в данный момент часы A_0, будут показывать время

$$t^B_{\text{прск}} - \beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.119}$$

Формула (2.119) легко получается из преобразования Лоренца с учетом параметра сдвига времени. Как указывалось выше, это преобразование будет иметь вид

$$x^C - x^C_{\text{сдв}} = \frac{x^A + vt^A}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\quad t^C - t^C_{\text{сдв}} = \frac{(t^A + (v/c^2)\,x^A)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

В нашем случае $x^A=0$ и $t^A=t_1^{A_0}$, поэтому

$$t^C = t^C_{\text{сдв}} + t_1^{A_0}/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Учитывая формулу (2.110) для величины $t^C_{\text{сдв}}$ и формулу (2.118) для величины $t_1^{A_0}$, получим в правой части написанного равенства выражение, совпадающее с (2.119). На втором этапе своего пути часы A_0 запаздывают по отношению к часам системы S^C, т. е.

$$t_2^{A_0} = [t^B_{\text{встр}} - (t^B_{\text{прск}} - \beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}})/\sqrt{1-\beta^2}]\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.120}$$

Здесь $t_2^{A_0}$ — время, отсчитываемое часами A_0 на втором этапе своего пути. Кроме того, как и раньше, $t^B_{\text{встр}} = t^C_{\text{встр}}$.

Складывая (2.118) и (2.120), получим

$$t^{A_0}_{\text{встр}} = t_1^{A_0} + t_2^{A_0} = t^B_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 t^{A_0}_{\text{встр}}, \tag{2.121}$$

откуда следует формула (2.96) или (2.117), т. е. тот же результат, который получили с точки зрения системы S^A.

Следует отметить, что возможны также и другие комбинированные подходы, на которых мы останавливаться не будем.

В заключение обратим внимание на то обстоятельство, что изложенное выше разъяснение «парадокса с часами» основано на использовании трех систем отсчета S^A, S^B и S^C, которые все время остаются инерциальными. Кратковременное ускорение испытывают только изолированные часы B.

Особое внимание следует обратить на тот факт, что фиксирование момента $t^B_{\text{прск}}$, связанного с моментом $t^{A_0}_{\text{прск}}$ соотношением $t^B_{\text{прск}} = t^{A_0}_{\text{прск}}\sqrt{1-\beta^2}$, а также последующее требование о включении в синхронизацию часов системы S^C, перескакивающих в нее часов B, предопределяет величину $t^C_{\text{сдв}}$ и все последующие расчеты.

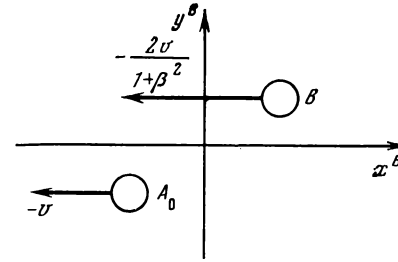


Рис. 2.10. К методу двух инерциальных систем отсчета

Несмотря на элементарность разъяснения приведенного выше «парадокса с часами», оно все же требует значительных усилий для его восприятия. Это связано с тем, что на каждом шаге рассуждений необходимо отказаться от понятия об абсолютном течении времени и помнить, что ход времени, так же как и понятие одновременности, суть понятия относительные, зависящие от системы отсчета.

2.12.3. Разъяснение «парадокса с часами» методом двух инерциальных систем отсчета [7]. Рассмотрим поведение часов A_0 в описанной выше системе «парадокса с часами» с точки зрения поведения часов в системе отсчета S^B (рис. 2.10). Часы A_0 будут все время двигаться в отрицательном направлении оси x^B системы S^B. Что же касается часов B, расположенных в начале координат системы S^B до момента времени $t^B_{\text{прск}} = {}^1/_2 t^B_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}$, то они будут покоиться в системе отсчета S^B. Далее, начиная с этого момента часы B начнут двигаться в отрицательном направлении оси x^B системы S^B со скоростью $-2v/(1+\beta^2)$. Здесь используется релятивистский закон сложения скоростей (см. п. 2.9). Часы B будут двигаться относительно системы S^A со скоростью $(-v)$, в то время как система S^B будет двигаться относительно системы S^A со скоростью $(+v)$.

Так как скорость часов B относительно системы S^B, равная $-2v/(1+\beta^2)$, будет по абсолютной величине больше скорости часов A_0 относительно этой же системы отсчета (эта скорость равна $(-v)$), то в конечном счете часы B догоняют A_0 и необхо-

димо в момент встречи зафиксировать показания обоих часов. Обозначим через Δt^B время (по часам системы S^B), которое необходимо затратить часам B, чтобы догнать часы A_0. Рассчитаем эту величину. Прежде всего заметим, что расстояние от часов B (в момент начала их движения относительно системы S^B) до часов A_0 будет в системе S^B равно

$$v\frac{1}{2}t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}.$$

В самом деле, в течение времени $1/2t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}$ часы A_0 удалялись от часов B со скоростью v. Теперь можно написать следующее уравнение для момента встречи часов B и A_0:

$$\frac{2v}{1+\beta^2}\Delta t^B = v\frac{1}{2}t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}+v\Delta t^B, \tag{2.122}$$

откуда

$$\Delta t^B_{\text{встр}} = t^{A_0}_{\text{встр}}(1+\beta^2)/2\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.123}$$

Вычислим показания часов B в момент их встречи с часами A_0. Как видно, часы B в момент начала их движения относительно S^B показывали время $1/2t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}$. Далее, они начали двигаться относительно системы S^B со скоростью $-2v/(1+\beta^2)$ в течение времени Δt^B (по часам системы S^B). Ясно, что во время своего движения относительно системы S^B часы B запаздывают относительно часов этой системы. Итак, для момента времени встречи часов A_0 и B можем написать

$$\frac{1}{2}t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2}+\Delta t^B\sqrt{1-\beta_1^2} = t^B_{\text{встр}}, \tag{2.124}$$

где

$$\sqrt{1-\beta_1^2} = \sqrt{1-\frac{4v^2}{(1+\beta^2)^2}} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}. \tag{2.125}$$

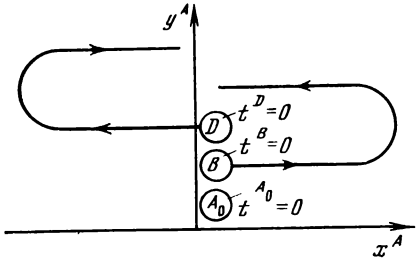
Теперь, подставив в (2.124) вместо Δt^B его значение по формуле (2.123) и вместо $\sqrt{1-\beta_1^2}$ его значение согласно (2.125), в результате получим

$$t^{A_0}_{\text{встр}}\sqrt{1-\beta^2} = t^B_{\text{встр}}. \tag{2.126}$$

Итак, пришли к тому же самому результату, который получили при рассмотрении всего этого процесса с точки зрения системы S^A.

Здесь нелишне еще раз подчеркнуть, что из приведенных рассуждений следует вывод о чисто кинематическом характере «парадокса с часами». Идея приведенного здесь разъяснения предложена В. А. Брумбергом [97].

2.12.4. Обобщенный «парадокс с часами» и его разъяснение по методу Паули [7, 95]. Рассмотрим теперь так называемый



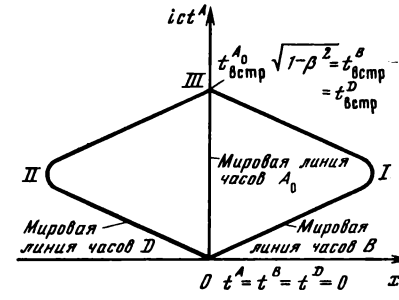


Рис. 2.11. Обобщенный «парадокс с часами»

Рис. 2.12. Мировые линии часов A_0, B и D

обобщенный «парадокс с часами» (схема «парадокса» изображена на рис. 2.11).

Часы B и часы D, пролетая мимо часов A_0, показывают одно и то же время: $t^B=t^D=t^{A_0}=0$. Предполагается, что путь часов D является зеркальным отражением пути часов B относительно оси Oy. Следовательно, в системе отсчета S^A в момент повторной встречи часов B и часов D с часами A_0 должно быть

$$t^B_{\text{встр}} = t^D_{\text{встр}} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^{A_0}_{\text{встр}}. \tag{2.127}$$

«Парадокс» возникает, если рассмотрим весь этот процесс с точки зрения системы отсчета, жестко связанной с часами B или часами D. Обобщенный «парадокс с часами» разрешается так же, как и обычный «парадокс». На рис. 2.12 показаны мировые линии часов A_0, B и D. Очевидно, мировая линия часов A_0 изображается прямой 0—III, часов B — ломаной 0—I—III и часов D — ломаной 0—II—III.

В свете изложенного выше рис. 2.12 дает наглядное разрешение обобщенного «парадокса с часами». В самом деле, длины мировых линий, пройденных часами A_0, B и D с точностью до числителя ic, с одной стороны, равны показаниям часов A_0, B и D в момент их повторной встречи, а так как длины мировых линий этих часов, с другой стороны, являются инвариантами, то, очевидно, придем к тому же самому результату (2.127), рассматривая весь процесс с точки зрения любой системы отсчета. Непосредственное вычисление дает

$$t^B_{\text{встр}} = t^D_{\text{встр}} = \frac{1}{ic}\int\limits_{0-\text{I}-\text{III}} ds^B = \frac{1}{ic}\int\limits_{0-\text{II}-\text{III}} ds^D. \tag{2.128}$$

Но, применяя теорему Пифагора, можем написать

$$ict^B_{\text{встр}} \approx 2\sqrt{\left(\frac{ict^{A_0}_{\text{встр}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{vt^{A_0}_{\text{встр}}}{2}\right)^2} \approx ict^D_{\text{встр}}. \tag{2.129}$$

Учитывая (2.129) и (2.124), получим

$$t^B_{\text{встр}} = t^D_{\text{встр}} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^{A_0}_{\text{встр}}, \tag{2.130}$$

т. е. пришли к формуле (2.127).

В заключение заметим, что в свое время А. Эйнштейн предложил разъяснение «парадокса с часами». Он предположил, что кратковременное ускорение испытывают не отдельные изолированные часы (перескакивающие в другую инерциальную систему отсчета), а целиком одна из систем координат, участвующих в рассмотрении этого процесса. Таким образом, А. Эйнштейн вводил неинерциальную систему отсчета, а данное им разъяснение основывалось на зависимости темпа хода часов от гравитационного потенциала (эффект гравитационного смещения). А. Эйнштейн дал свое разъяснение чисто качественно, не приводя каких-либо расчетов. Подробное разъяснение с необходимыми расчетами дано в [7, 95].

2.13. Неоднородная группа Лоренца [7, 95]

2.13.1. Параметры сдвига координат и времени. Обычно утверждают, что время t^B, показываемое движущимися часами, связано со временем покоящихся часов t^A, мимо которых они в данный момент пролетают, соотношением

$$t^B = \sqrt{1-\beta^2}\, t^A. \tag{2.131}$$

Это соотношение (рис. 2.13) совершенно справедливо при условии, что в тот момент, когда показания движущихся часов $t^B = 0$, они пролетали мимо покоящихся часов A_0 в системе S^A, также показывающих в этот момент время $t^{A_0}=0$ (напоминаем, что часы A_0 расположены в начале системы отсчета S^A, как это показано на рис. 2.14).

В ситуации, показанной на рис. 2.15, взамен формулы (2.131) следует писать

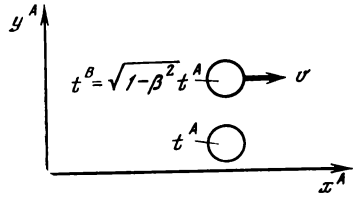
$$t^B = t^B_{\text{сдв}} + \sqrt{1-\beta^2}\, t^A \tag{2.132}$$

(см. рис. 2.16). И аналогично, если будет иметь место ситуация, показанная на рис. 2.17, то справедливой будет формула

$$t^B = \sqrt{1-\beta^2}\,(t^A - t^{A_0}_{\text{сдв}}) \tag{2.133}$$

(см. рис. 2.18).

В общем случае необходимо ввести параметры сдвига координаты $x^A_{\text{сдв}}$ и времени $t^A_{\text{сдв}}$ (рис. 2.19), которые могут быть определены как координаты и показания часов в «неподвижной» инерциальной системе отсчета S^B, мимо которых в данный момент пролетают часы инерциальной системы отсчета S^B, расположенные в точке $x^{B_0}=0$ и показывающие время $t^{B_0}=0$ (см. рис. 2. 19).



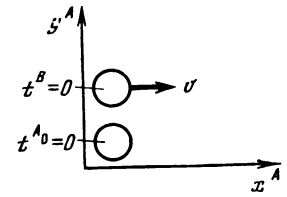
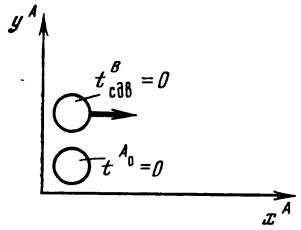


Рис. 2.13. К анализу движущихся часов

Рис. 2.14. Расположение часов A_0 в системе S^A при $t^B=0$



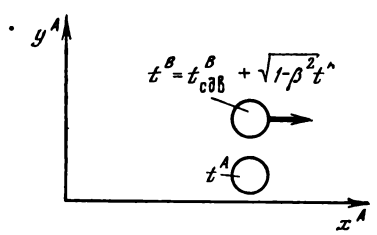
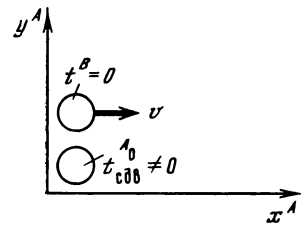


Рис. 2.15. Расположение часов A_0 в системе S^A при $t^B_{\text{сдв}}=0$

Рис. 2.16. К вычислению t^B



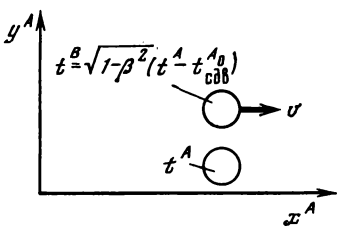
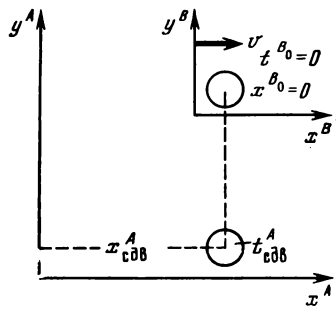


Рис. 2.17. Расположение часов A_0

Рис. 2.18. К вычислению t^B

Это определение аналогично следующему. Параметры $x^A_{\text{сдв}}$ и $t^A_{\text{сдв}}$ означают координату и показания часов в движущейся системе отсчета S^A, которые в данный момент пролетают мимо часов B^0 неподвижной системы отсчета S^B, расположенных в точке $x^B=0$ и показывающих время $t^B{}_0=0$. В обоих случаях параметры $x^A_{\text{одв}}$ и $t^A_{\text{одв}}$ измеряются в системе отсчета S^A. Аналогично могут быть определены параметры $x^B_{\text{одв}}$ и $t^B_{\text{сдв}}$, которые должны измеряться в системе отсчета S^B (рис. 2.20).

Параметры $x^A_{\text{сдв}}$ и $t^A_{\text{сдв}}$ могут быть также определены как координаты начала отсчета системы S^B, измеренные в системе отсчета S^A в псевдоевклидовом пространстве $s^2=(x^A)^2-c^2(t^A)^2$.



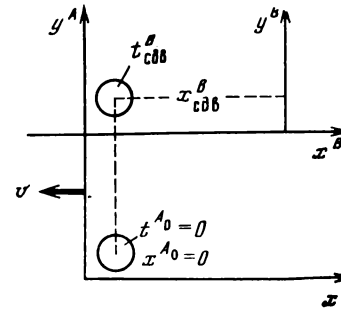
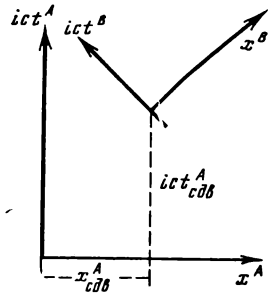


Рис. 2.19. Введение параметров $x^A_{сдв}$ и $t^A_{сдв}$

Рис. 2.20. К вычислению параметров $x^B_{одв}$ и $t^B_{одв}$ в системе S^B



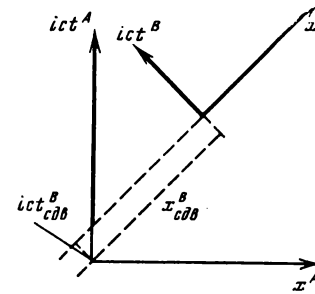


Рис. 2.21. К определению параметров $x^B_{одв}$ и $t^B_{сдв}$

Рис. 2.22. Вычисление параметров $x^B_{сдв}$ и $t^B_{сдв}$

Аналогично могут быть определены параметры $x^B_{сдв}$ и $t^B_{сдв}$ (рис. 2.21, 2.22). В общем случае $x^A_{сдв} \neq x^B_{сдв}$ и $t^A_{сдв} \neq t^B_{сдв}$.

2.13.2. Преобразование Лоренца для отличных от нуля параметров сдвига координат и времени (неоднородная группа Лоренца) [7]. Из рис. 2.20 следует, что преобразованию Лоренца должны быть подвергнуты $(x^B - x^B_{сдв})$ и $(t^B - t^B_{сдв})$. Тогда имеем

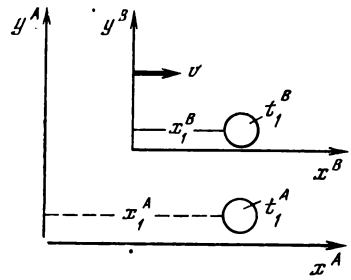
$$x^A = \frac{(x^B - x^B_{сдв}) + v\,(t^B - t^B_{одв})}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (2.134)$$

$$t^A = \frac{(t^B - t^B_{сдв}) + (v/c^2)\,(x^B - x^B_{сдв})}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или

$$x^B - x^B_{сдв} = \frac{x^A - vt^A}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t^B - t^B_{сдв} = \frac{t^A - (v/c^2)\,x^A}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.135)$$

Таким образом, пришли к неоднородной группе Лоренца.



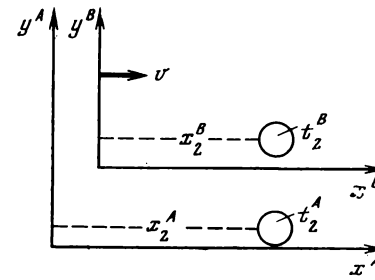


Рис. 2.23. Анализ движения часов B

Рис. 2.24. Вычисление параметров $x^B_{\text{сдв}}$ и $t^B_{\text{одв}}$

Найдем теперь связь между параметрами $x^A_{\text{сдв}}$, $t^A_{\text{сдв}}$ и $x^B_{\text{сдв}}$, $t^B_{\text{сдв}}$. Как видно из рис. 2.19 и 2.20, для нахождения $x^A_{\text{сдв}}$ и $t^A_{\text{сдв}}$ достаточно в уравнение (2.107) подставить $x^B = 0$ и $t^B = 0$. В самом деле, $x^A_{\text{сдв}}$ и $t^A_{\text{сдв}}$ определяются как координаты часов и показываемое ими время в системе S^A в тот момент, когда мимо них пролетают часы системы S^B, расположенные в точке $x^B = 0$ и показывающие время $t^B = 0$. Итак, имеем

$$x^A_{\text{сдв}} = \frac{-x^B_{\text{одв}} - vt^B_{\text{одв}}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t^A_{\text{сдв}} = \frac{-t^B_{\text{одв}} - (v/c^2)\,x^B_{\text{одв}}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.136}$$

Интересно отметить, что параметры $x^A_{\text{сдв}}$, $t^A_{\text{сдв}}$ и параметры $x^B_{\text{сдв}}$, $t^B_{\text{сдв}}$ с точностью до знака связаны друг с другом преобразованием Лоренца. Заметим также, что если $v > 0$, $x^B_{\text{сдв}} > 0$ и $t^B_{\text{сдв}} > 0$, то, как видно из (2.136), $x^A_{\text{сдв}} < 0$ и $t^A_{\text{сдв}} < 0$, и наоборот. Здесь v — скорость системы S^B относительно системы S^A.

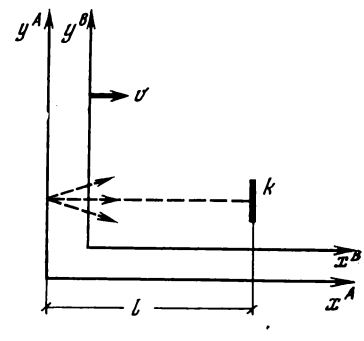


Рис. 2.25. Анализ световых сигналов

2.13.3. Некоторые примеры задач, не разрешимые без введения неоднородной группы Лоренца. В заключение рассмотрим две задачи, решение которых вообще невозможно без введения параметров сдвига координат и времени.

Задача 1. Пусть часы движущейся системы отсчета S^B, расположенные в точке x_1^B, показывают время t_1^B (рис. 2.23) в тот момент, когда они пролетают мимом часов системы S^A, расположенных в точке x_1^A и показывающих время t_1^A. Спрашивается, какой будет координата x_2^B и показания t_2^B часов,

расположенных в системе S^B, в тот момент, когда они пролетают мимо часов системы S^A, расположенных в точке x_2^A и показывающих время t_2^A (рис. 2.24)? Скорость v системы S^B относительно системы S^A задана.

Для решения задачи найдем прежде всего параметры $x^B_{\text{сдв}}$ и $t^B_{\text{сдв}}$. Подставив известные значения x_1^A, t_1^A и x_1^B, t_1^B в уравнения (2.135), получим

$$x^B_{\text{сдв}} = x_1^B - \left(\frac{x_1^A - vt_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \qquad t^B_{\text{одв}} = t_1^B - \frac{t_1^A - (v/c^2)\,x_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.137}$$

Таким образом, параметры $x^B_{\text{сдв}}$ и $t^B_{\text{сдв}}$ найдены. Подставив теперь в уравнения (2.135) известные величины $x^B_{\text{сдв}}$ и $t^B_{\text{сдв}}$, x_2^A и t_2^A, найдем

$$\begin{aligned} x_2^B &= \left(x_1^B - \frac{x_1^A - vt_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{x_2^A - vt_2^A}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ t_2^B &= \left(t_1^B - \frac{t_1^A - (v/c^2)\,x_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{t_2^A - (v/c^2)\,x_2^A}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Итак, задача решена. Следует еще раз подчеркнуть, что без введения параметров $x^B_{\text{сдв}}$ и $t^B_{\text{сдв}}$ эта задача вообще не могла бы быть решена.

Задача 2. Пусть в покоящейся системе отсчета S^A в момент времени $t^{A_0}=0$ в точке $x^A=0$ на оси x^A испущен световой сигнал. Этот сигнал достигает зеркала k (рис. 2.25) и отражается от него в момент времени

$$t^A_{\text{отр}} = l/c, \tag{2.139}$$

где l — расстояние от зеркала до начала координат в системе S^A.

Рассмотрим теперь то же явление в системе отсчета S^B, движущейся прямолинейно и равномерно со скоростью v относительно системы S^A (рис. 2.25).

Допустим, что параметры сдвига координат и времени системы S^B относительно системы S^A равны нулю. В таком случае пространственное расстояние l с точки зрения системы S^B будет равно

$$l\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.140}$$

Далее, так как зеркало k в системе S^B движется навстречу световому импульсу, то для момента отражения имеем

$$t^B_{\text{отр}} = l\sqrt{1-\beta^2}/(v+c). \tag{2.141}$$

Так как параметр сдвига времени системы S^B относительно системы S^A равен нулю, то, казалось бы, можно сделать ошибоч-

ное заключение о том, что должно быть

$$t^B_{\text{отр}} = \sqrt{1-\beta^2}\, t^A_{\text{отр}}. \tag{2.142}$$

В действительности, однако, как это следует из (2.141),

$$t^B_{\text{отр}} \neq \sqrt{1-\beta^2}\, t^A_{\text{отр}}.$$

Требуется разъяснить возникшее противоречие. Эта задача разрешается совершенно элементарно. Дело в том, что формула

$$t^B = \sqrt{1-\beta^2}\, t^A \tag{2.143}$$

может применяться к движущимся часам B при сравнении их показаний с показаниями часов системы S^A, мимо которых они в данный момент пролетают, и при условии, что часы B показывали время $t^B=0$ в тот момент, когда они пролетали мимо часов A_0, расположенных в начале системы отсчета S^A и показывающих время $t^A=0$. Вместе с тем формула (2.142) совершенно неприменима к случайной паре часов систем S^A и S^B, оказавшихся в данный момент в одной и той же точке пространства. Поэтому эта формула неприменима к сравнению показаний часов $t^B_{\text{отр}}$ и $t^A_{\text{отр}}$. Правильный ответ, т. е. формулу (2.141), легко получить, применяя преобразование Лоренца.

Отражение от зеркала в системе S^A характеризуется координатами

$$x^A = l \quad \text{и} \quad t^A_{\text{отр}} = l/c. \tag{2.144}$$

Это же событие в системе S^B будет иметь координаты [3]

$$x^B = \frac{l - v t^A_{\text{отр}}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \tag{2.145}$$

$$t^B_{\text{отр}} = \frac{t^A_{\text{отр}} - vl/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t^A_{\text{отр}}(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l(1-\beta)}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Возвращаясь теперь к формуле (2.141), получим

$$t^B_{\text{отр}} = \frac{l}{c}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{c}\,\frac{(1-\beta^2)}{(1+\beta)\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{c}\,\frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{2.146}$$

Итак, формула (2.141) совпадает со второй формулой (2.145).

Можно было бы рассмотреть много аналогичных задач, связанных с релятивистским замедлением времени. Однако ограничимся здесь приведенными примерами.

В заключение сделаем еще несколько замечаний. В общем виде неоднородная группа Лоренца может быть записана в виде

---

[3] Предполагается, что параметры сдвига координат и времени равны нулю.

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Формальные свойства этой группы и, в частности, матрицы Λ можно найти в [61—66].

2.14. О возможности существования сверхсветовых скоростей в кинематике СТО

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета S^A и S^B. Допустим, что система отсчета S^B движется относительно S^A с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x^A. Обе системы отсчета связаны преобразованием Лоренца

$$x^B = \frac{x^A - vt^A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t^B = \frac{t^A - (v/c^2)\,x^A}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$x^A = \frac{x^B + vt^B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t^A = \frac{t^B + (v/c^2)\,x^B}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Допустим теперь, что в системе отсчета S^A (одновременно по часам системы S^A) в момент $t^A=0$ вспыхивают электрические лампочки, расположенные вдоль оси x^A на равных друг от друга расстояниях. Это может быть достигнуто, если каждую из лампочек соединить с часами, снабженными устройством, замыкающим электрический контакт в момент, когда стрелки часов показывают время $t^A=0$. Таким образом, вспышки каждой из лампочек происходят независимо друг от друга.

В системе отсчета S^B вспышки лампочек отнюдь не будут одновременными, а именно лампочка, имеющая в системе отсчета S^A координату x^A, вспыхивает по часам системы S^B в момент t^B, определяемый формулой $t^B=-(vx^A/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}$. Таким образом, в системе отсчета S^B вспышки лампочек представляются в виде некоторого волнового процесса, распространяющегося в отрицательном направлении x^B.

Определим скорость распространения этого волнового процесса. Разность времени вспышек двух лампочек Δt^B (по часам системы S^B) будет равна $\Delta t^B=(-v/c^2\sqrt{1-\beta^2})\Delta x^A$, где Δx^A — расстояние между двумя указанными лампочками в системе S^A. Но так как $\Delta x^B=\Delta x^A/\sqrt{1-\beta^2}$, то $|\Delta x^B/\Delta t^B|=c^2/v>c$, поскольку $v<c$. Итак, рассматриваемая волна распространяется в системе S^B со сверхсветовой скоростью.

Разумеется, здесь нет никакого противоречия с теорией относительности, так как при этом от лампочки к лампочке нет передачи ни энергии, ни импульса, а следовательно, нет и передачи информации. Следовательно, в данном случае имеем дело с *объектом второго рода* по данной в гл. 1 классификации. Более подробно подобные вопросы и их связь с законом причинности рассмотрены в гл. 3.

2.15. Об общем источнике «парадоксов», возникающих в теории относительности

С психологической точки зрения представляется крайне интересным, что «парадокс с часами» — эта «мнимая» проблема науки — до настоящего времени продолжает привлекать к себе внимание многих авторов, несмотря на то, что этот «парадокс» был полностью объяснен еще в первых работах по теории относительности.

Эта ситуация прекрасно охарактеризована Д. В. Скобельцыным [98]: «То, что в действительности теория относительности в применении к данной задаче не приводит к внутренне противоречивым результатам, было выяснено еще свыше полувека тому назад. Тем не менее за последние десять лет неожиданно снова вернулись к обсуждению этого старого вопроса даже на страницах специальных научных журналов. Статьи на эту тему все еще продолжают появляться.

Автор может сослаться также на некоторые свои воспоминания о встречах в 1957—1958 гг. с зарубежными физиками и тех отзвуках на возникшую вновь дискуссию, о которых ему пришлось тогда слышать. Так, летом 1957 г. мы встретились с группой физиков разных стран, направляющихся на первую Пагуошскую конференцию ученых. Припоминаю, что еще в самолете на пути в местечко Пагуош в Канаде один известный физик, прибывший из Австралии, спросил меня, знаем ли мы о том, что вопрос о парадоксе часов и основах теории относительности вновь подвергся ревизии.

После этого, когда в 1958 г. в Лондоне я встретился с одним очень известным английским физиком и со своей стороны упомянул о парадоксе часов, мой собеседник, шутя, обронил характерную фразу: „Моих умственных способностей недостаточно для того, чтобы во всем этом разобраться"... Примерно тогда же с одним известным советским физиком-теоретиком я услышал и такой отзыв: «Не понимаю, почему сейчас снова вернулись к этому старому вопросу. Все ведь в этом вопросе столь же ясно, как, например, то, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками».

Авторы работ по «парадоксам с часами» считали крайне удивительным, что кратковременное ускорение движущихся часов B (см. рис. 2.6), которое способно оказать пренебрежимо малое влияние на показания стрелок часов, в то же время может оказать весьма существенное влияние на величину отставания часов B по отношению к часам A в момент их возвращения к часам A.

Следует признать, что это обстоятельство действительно представляется крайне парадоксальным при «трехмерном» рассмотрении этого вопроса.

Если же обратиться, как этого требует теория относительности, к 4-мерному рассмотрению мировых линий часов A и B, то между мировыми линиями часов A и B (см. рис. 2.7) имеет место существенная асимметрия, заключающаяся в следующем: а) мировая линия часов A является прямой линией, т. е. геодезической 4-мерного континуума пространства-времени; б) мировая

линия часов B является ломаной линией и, следовательно, не является геодезической 4-мерного континуума, причем в 4-мерном пространственно-временном континууме длина ломаной линии меньше длины прямой.

Эта резкая асимметрия мировых линий часов A и B становится очевидной только при рассмотрении проблемы в 4-мерном пространственно-временном континууме. Как выше было показано, В. Паули использовал эту асимметрию для совершенно очевидного разъяснения «парадокса с часами».

В действительности многие кинематические парадоксы в теории относительности возникают вследствие того, что при изложении содержания «парадокса» упускают из виду необходимость строго релятивистского рассмотрения проблемы во всех ее звеньях (4-мерный характер пространственно-временного континуума, относительность хода времени и пространственных расстояний в разных системах отсчета и т. д.).

В более сложных «парадоксах», возникающих в динамике, имеют место также и другие отступления от релятивистской постановки вопроса. Например, вводятся недопустимые в теории относительности твердые тела или деформирующиеся тела, законы деформации которых описываются нерелятивистскими уравнениями и т. п. Другими словами, «парадоксы» возникают всегда, когда в цепи рассуждений (умышленно или по инерции мышления) вводится классический, т. е. нерелятивистский, подход к решению проблемы.

В заключение отметим, что необходимость 4-мерного рассмотрения физических проблем подчеркивается следующим весьма важным замечанием Р. Куранта [99, с. 512]: «Сферические волны для любых линий временного типа существуют только в случаях двух и четырех переменных и притом только для дифференциальных уравнений, эквивалентных волновому уравнению. Если удастся доказать это предположение, то этим будет установлено особое, существенно важное отличительное свойство четырехмерного пространственно-временного многообразия. Однако уже то обстоятельство, что наше утверждение справедливо в случае постоянных коэффициентов и нетрудно доказывается в этом случае, является, как мне кажется, сам по себе довольно существенным отличительным свойством четырехмерного мира».

2.16. Замечания общего и исторического характера

Первая работа А. Эйнштейна [43], в которой были изложены основные положения СТО, сразу привлекла к себе внимание выдающихся физиков того времени. Это объяснялось революционным характером этой статьи, произведенной в ней «крутой ломкой» фундаментальных понятий классической физики, а также обилием изложенных в этой статье новых и казавшихся крайне парадоксальными результатов.

Появление этой статьи естественно явилось источником острых дискуссий по всем затронутым в ней вопросам. И хотя в настоящее время теория отно-

сительности может считаться признанной всеми ведущими физиками, тем не менее отголоски этих дискуссий продолжаются до сих пор. Для оценки духовной ситуации, возникшей в физике в первые годы после создания специальной теории относительности, весьма существенное значение имеет одно примечание Г. Лоренца к его статье, опубликованной в 1912 г. [100]: «Можно заметить, что в этой статье мне не удалось в полной мере получить формулы преобразования теории относительности Эйнштейна. Ни равенство (7), ни формула (8) не имеют того вида, который дан Эйнштейном, вследствие чего мне не удалось уничтожить член $=wu_x'/c^2$ из первой формулы (9) и, таким образом, привести уравнения (9) точно к виду, справедливому для покоящейся системы. С этим обстоятельством связана беспомощность некоторых дальнейших рассуждений в этой работе. Заслуга Эйнштейна состоит в том, что он первый высказал принцип относительности в виде всеобщего строго и точно действующего закона. К этому я добавлю еще, что Фохт уже в 1887 г. (Göttingen Nachrichten, с. 41) в работе «Über das Dopplescher Prinzep» применил к формулам вида $\Delta\psi - 1/c^2(\partial^2\psi/\partial t^2) = 0$ преобразование, которое эквивалентно преобразованию, содержащемуся в равенствах (4) и (5) (примечание Г. А. Лоренца, 1912 г.)».

Статья Эйнштейна [43], посвященная теории относительности, вышла в свет в 1905 г., а несколько позже А. Пуанкаре опубликовал статью [101], посвященную вопросам, близким к тем, которые рассматривались А. Эйнштейном.

Приведем две цитаты из статьи А. Пуанкаре [101]: «Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе без того, чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменяются в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть преобразованиями Лоренца; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют, таким образом, точное изображение одна другой... Следует поэтому вернуться к теории Лоренца; однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы, объясняющей одновременно сжатие одной и постоянство двух других осей. Я пытался определить эту силу и нашел, что она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, действующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона».

Из приведенных цитат видно различие обоих подходов. В то время как для А. Эйнштейна относительный характер пространственных расстояний и хода времени в различных системах отсчета являлся проявлением свойств самого пространственно-временного континуума, для А. Пуанкаре соответствующие эффекты должны были объясняться с точки зрения динамики, и он искал силы, которые могли бы дать адекватное объяснение этих эффектов.

В заключение приведем весьма характерную цитату из статьи Р. А. Милликена «К семидесятилетию Альберта Эйнштейна» [102]: «Именно здесь проявилась характерная для Эйнштейна смелость подхода, ибо отличительной чертой современного научного мышления является тот факт, что оно начинает с отбрасывания всех априорных представлений о природе реальности (или о законченной картине строения Вселенной), характерных практически для всей греческой философии, а также для всего средневекового мышления;

вместо этого современное научное мышление берет в качестве отправного пункта прочно установленные, тщательно проверенные экспериментальные факты...».

2.17. Вариационный принцип в релятивистской динамике [88]

Для вывода основных уравнений динамики частицы можно воспользоваться вариационным принципом, согласно которому интеграл действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt \tag{2.147}$$

должен быть экстремален.

Необходимо заметить, что подынтегральное выражение $\mathscr{L}$ в (2.147) должно быть скаляром или инвариантом, содержащим производные от координат по времени не выше первой степени. Только при этом условии приходим к уравнениям релятивистской механики, которые при $c \to \infty$ переходят в уравнения Ньютона.

Нетрудно убедиться, что с учетом (2.69) следующее конкретное выражение удовлетворяет всем приведенным условиям и, таким образом, приводит к выражениям для лагранжиана

$$\mathscr{L}\, dt = -mc\, ds = -mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2}\, dt. \tag{2.148}$$

Из соотношений

$$\sum_{i=1,2,3} p_i q^i - \mathscr{L} = \mathscr{E},\quad p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i},\quad q_i = \frac{dx_i}{dt}$$

следует (см. [88]), что энергия свободной частицы

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}. \tag{2.149}$$

Используя вариационные уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^i/dt)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i} = 0 \tag{2.150}$$

и соотношение (2.148), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}\right) = 0 \qquad (\dot{x}^i = q_i), \tag{2.151}$$

т. е. уравнения движения Эйнштейна для свободной частицы.

Уравнениям движения можно придать также форму, предложенную Г. Минковским [89].

В качестве примера применения вариационного принципа рассмотрим вывод уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Ниже предполагается, что читатель знаком с основами классической электродинамики Максвелла (краткое изложение этой теории см. в следующем разделе).

Наряду с рассмотренным случаем для заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, должны ввести в рассмотрение 4-вектор потенциал электромагнитного поля A_i.

Пример 1. Согласно (2.147), (2.148) вариационный принцип (принцип Гамильтона) записывается следующим образом:

$$\delta S = \delta \int_a^b (-mc)\, ds. \tag{2.152}$$

Если частица движется в электромагнитном поле, то вариационный принцип (2.152) должен быть обобщен путем прибавления к подынтегральному выражению в формуле (2.152) членов, отражающих воздействие электромагнитного поля на движущуюся частицу. Уже известно, что воздействие электромагнитного поля на заряженную частицу может быть описано с помощью 4-вектора потенциала электромагнитного поля $A_i (i=0, 1, 2, 3)$, причем связь с 3-мерными обозначениями следующая: $A_0 = i\varphi^0$, $A_i = A_i$ $(i=1, 2, 3)$.

Подынтегральное выражение (2.152) (лангранжиан) должно быть инвариантом к преобразованиям Лоренца. Простейший инвариант, который можно образовать из компонент 4-потенциала A_i и дифференциалов координат, следующий:

$$A_0 dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3, \tag{2.153}$$

или

$$-\varphi^0 c dt + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3. \tag{2.154}$$

Таким образом, естественно предположить, что вариационный принцип для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int \left[-mc ds + \frac{e}{c} (A_0 dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3) \right], \tag{2.155}$$

где e — величина заряда (например, электрона) движущейся частицы.

Необходимо подчеркнуть, что на сформулированный принцип следует смотреть как на гипотезу, которая, как известно, получила блестящее экспериментальное подтверждение (современные ускорители заряженных частиц). Учитывая, что $ds = c\sqrt{1 - q^2/c^2}\, dt$, вариационному принципу можно придать следующую форму:

$$\delta S = \delta \int \left[-mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} + \frac{e}{c} (A_1 q^1 + A_2 q^2 + A_3 q^3) - e\varphi \right] dt. \tag{2.156}$$

Следовательно, лагранжиан для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - q^2/c^2} + \frac{e}{c} (A_1 q^1 + A_2 q^2 + A_3 q^3) - e\varphi. \tag{2.157}$$

Пространственно подобные компоненты вектора-импульса могут быть определены как производные от лагранжиана по соответствующим компонентам 3-мерной скорости. Выполнив вычисления, получим

$$P_i = \frac{m q_i}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{2.158}$$

Располагая лагранжианом (2.157), можно, воспользовавшись уравнениями Лагранжа (2.150), написать следующее уравнение для движения заряженной частицы в электромагнитном поле (подробно см. [88]):

$$\frac{dp}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[q\boldsymbol{H}], \tag{2.159}$$

где $\boldsymbol{E} = (-1/c \cdot \partial A/\partial t) - \operatorname{grad}\varphi^0$ — напряженность электрического поля; $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} A$ — напряженность магнитного поля.

Выражение, стоящее в правой части формулы (2.159), носит название *силы Лоренца.*

По аналогии с классической механикой функцию Гамильтона при учете (2.158) можно вычислить следующим образом:

$$H = \sum_{i=1,2,3,0} p_i q^i - \mathscr{L} =$$

$$= c\sqrt{m^2c^2 + \left(P_1 - \frac{e}{c}A_1\right)^2 + \left(P_2 - \frac{e}{c}A_2\right)^2 + \left(P_3 - \frac{e}{c}A_3\right)^2} + e\varphi^0. \tag{2.160}$$

Для того чтобы перейти к уравнению Гамильтона — Якоби, необходимо заменить H на $\partial S/\partial ct$, а P_i — на $\partial S/\partial x^i$. В результате получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{m^2c^2 + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} - \frac{e}{c}A_i\right)\right]^2} + e\varphi^0 = 0. \tag{2.161}$$

Ниже в п. 2.21 будет показан другой метод вывода релятивистских уравнений Гамильтона — Якоби и их связь с классическими уравнениями.

2.18. 4-вектор энергии-импульса

В п. 2.8 было введено понятие вектора 4-скорости движущейся частицы. Контрвариантные компоненты этого вектора определяются следующим образом:

$$u^i = dx^i/ds \qquad (i = 1, 2, 3, 0), \tag{2.162}$$

где ds — элемент мировой линии, по которой движется частица. В 3-мерной записи компоненты 4-скорости записываются в виде

$$\frac{q_1}{c\sqrt{1 - q^2/c^2}}; \quad \frac{q_2}{c\sqrt{1 - q^2/c^2}}; \quad \frac{q_3}{c\sqrt{1 - q^2/c^2}}; \quad \frac{i}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}. \tag{2.163}$$

Здесь $q_i = dx^i/dt$ являются компонентами 3-мерной скорости движущейся частицы. Заметим, что q_i не являются компонентами вектора в псевдоевклидовом пространстве СТО. Во избежание недоразумений необходимо помнить это обстоятельство. По поводу (2.163) А. Эйнштейн в [43] замечает, что этот 4-вектор является единственным 4-вектором, который можно образовать из

компонент скорости материальной точки, записанных в 3-мерном виде.

Если теперь при помощи формул, приведенных в п. 2.2 и выражения для контрвариантных компонент 4-скорости (2.162) образовать ковариантные компоненты 4-скорости u_i, то получим (для $x^0=ict$ все $u_i=u^i$)

$$u_iu^i=-1. \tag{2.164}$$

Введем теперь по аналогии с классической механикой ко- и контрвариантные компоненты 4-импульса частицы следующим образом:

$$p_i=mcu_i; \quad p^i=mcu^i. \tag{2.165}$$

Учитывая (2.164) и (2.165), легко получить соотношение

$$p_1p^1+p_2p^2+p_3p^3+p_0p^0+m^2c^2=0. \tag{2.166}$$

4-вектор с компонентами (p_1, p_2, p_3, p_0) носит название *вектора энергии-импульса частицы.*

В 3-мерной форме записи эти компоненты имеют вид

$$p_1=\frac{mq_1}{\sqrt{1-q^2/c^2}}; \quad p_2=\frac{mq_2}{\sqrt{1-q^2/c^2}}; \quad p_3=\frac{mq_3}{\sqrt{1-q^2/c^2}}. \tag{2.167}$$

При $c\to\infty$ три пространственные компоненты 4-импульса

$$mcu^i \quad (i=1, 2, 3) \tag{2.168}$$

принимают ньютоновские значения. Четвертая компонента

$$p_0=mcu_0 \tag{2.169}$$

имеет согласно (2.149) значение

$$cp_0=i\mathscr{E}, \quad p_0=i\mathscr{E}/c. \tag{2.170}$$

Здесь энергия частицы $\mathscr{E}$ равна (формула (2.149))

$$\mathscr{E}=p_0c/i=mc^2/\sqrt{1-q^2/c^2}. \tag{2.171}$$

Выражение (2.170) является четвертой компонентой 4-вектора энергии-импульса в 3-мерной записи. Этот вектор имеет исключительно важное значение в релятивистской динамике. Поэтому остановимся на нем несколько подробнее.

Допустим, что $q/c\ll 1$. Тогда приближенно имеем

$$\mathscr{E}\approx mc^2+{}^1/_2mq^2. \tag{2.172}$$

Итак, в первом приближении полная энергия частицы складывается из так называемой энергии покоя $\mathscr{E}=mc^2$ и кинетической энергии частицы в ее классическом понимании (в случае, если $q/c\ll 1$). В самом общем случае, если $q=0$, приходим к фундаментальному соотношению вида

$$\mathscr{E}=mc^2. \tag{2.173}$$

Из соотношения (2.173) следует, что покоящаяся частица необходимо обладает внутренней или собственной энергией, равной $\mathscr{E}$.

2.19. Уравнения движения

По аналогии с классической механикой можно дать следующие уравнения движения в 4-мерной записи:

$$F_i = dp_i/d\tau; \quad \tau = s/c. \tag{2.174}$$

Таким образом, здесь вводится вектор 4-силы F_i, равный производным от 4-вектора энергии-импульса частицы по собственному времени частицы. В 3-мерной записи первые три компоненты для (2.174) имеют вид [103]

$$F_i = \frac{m\dot{q}_i}{1 - q^2/c^2} + \frac{mq\dot{q}q_i}{c^2(1 - q^2/c^2)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.175}$$

Нетрудно убедиться, что при $(q/c) \ll 1$ эти выражения переходят в известные выражения классической механики Ньютона $m\dot{q}^i$. Четвертая компонента уравнений (2.174) в 3-мерной записи имеет вид

$$F_0 = -\frac{mq\dot{q}}{(1 - q^2/c^2)^2}. \tag{2.176}$$

При $(q/c) \ll 1$ выражение (2.176) стремится к величине работы, совершаемой за единицу времени, взятой со знаком минус. Вместе с тем уравнениям движения можно, согласно Эйнштейну [43б, с. 44], придать следующую форму:

$$K_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{mq_i}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}\right) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2.177}$$

где K — вектор 3-мерной силы.

Инвариантность уравнений (2.177) не является непосредственно очевидной, так как ни компоненты 3-мерной скорости q_i, ни компоненты 3-мерной силы K_i не являются векторами в псевдоевклидовом пространственно-временном континууме СТО. Тем не менее эти уравнения правильны; однако, они, как замечает П. Бергман [103, с. 154], обладают весьма сложными трансформационными свойствами, на которых не будем останавливаться. Отметим только, что компоненты 3-мерной силы K_i в общем случае уже не совпадают с направлением 3-мерного ускорения, за исключением случаев, когда направление силы совпадает с направлением движения частицы или перпендикулярно к нему.

Еще раз обратим внимание, что в 4-мерном пространственно-временном континууме СТО ни компоненты сил K_i, ни компоненты ускорения $\dot{q}_i$ не являются компонентами каких-либо векторов. Между компонентами K_i и компонентами 4-вектора F_i су-

ществуют следующие связи:

$$F_l = \frac{K_l}{\sqrt{1-q^2/c^2}}; \quad F_0 = \frac{iK_0}{c^2\sqrt{1-q^2/c^2}}. \tag{2.178}$$

Приведем еще формулы преобразования компонент 4-вектора p_i при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$p_1 = \frac{p_1' + (v/c^2)\,\mathscr{E}'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad p_2 = p_2'; \quad \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + vp_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{2.179}$$

2.20. Момент импульса и координаты центра тяжести системы частиц

Наряду с понятиями энергии и импульса в релятивистской механике может быть введено понятие момента импульса. Моменту импульса соответствует следующий антисимметричный 4-тензор [88]:

$$M^{ik} = x^i p^k - x^k p^i. \tag{2.180}$$

Для системы частиц

$$M^{ik} = \sum_\alpha (x_\alpha^i p_\alpha^k - x_\alpha^k p_\alpha^i). \tag{2.181}$$

Тензор (2.181) сохраняется для всякой замкнутой системы частиц.

Рассматривая замкнутую систему частиц, можно доказать, что точка с радиус-вектором

$$R = \sum_\alpha E_\alpha r_\alpha \Big/ \sum_\alpha E_\alpha \tag{2.182}$$

движется прямолинейно с равномерной скоростью [88]

$$\bar{v} = c^2 \sum_\alpha p_\alpha \Big/ \sum_\alpha E_\alpha. \tag{2.183}$$

Здесь E_α и p_α — энергия и импульс частицы, положение которой определяется радиус-вектором r_α. Скорость, вычисленная по формуле (2.183), есть скорость движения системы частиц как целого.

Как при свободном движении системы взаимодействующих материальных точек, так и при их столкновениях или распадах имеет место закон сохранения 4-импульса. Этот закон будет рассмотрен подробно в п. 2.22, посвященном приложениям теории относительности к элементарным частицам.

2.21. Уравнение Гамильтона — Якоби и метод характеристик

2.21.1. О характеристиках гиперболических дифференциальных уравнений. В дальнейшем будем пользоваться понятием характеристик гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Напомним, что под характеристической поверхностью заданной системы дифференциальных уравнений

$$\varphi=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t) \tag{2.184}$$

понимают поверхность, на которой могут существовать разрывы старших производных решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. При этом под старшими производными понимаются производные, входящие в рассматриваемую систему уравнений и определяющие ее порядок [104]. Характеристические поверхности являются уравнениями распространения фронта волны нестационарного решения рассматриваемой системы уравнений.

Приведем теперь уравнения характеристических поверхностей или характеристик для систем линейных уравнений в частных производных [99, 104, 105].

Рассмотрим систему уравнений первого порядка линейных относительно неизвестных функций u_j следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\Phi_i(x_k,\ u_s)=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ m). \tag{2.185}$$

Здесь коэффициенты a_{ij} зависят только от n координат $x_1, \ldots, x_n$.

В данном случае задача Коши формулируется следующим образом. В пространстве независимых переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается поверхность

$$\omega_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0. \tag{2.186}$$

На этой поверхности задаются начальные значения искомых функций

$$u_j=u_j(x_1,\ \ldots,\ x_n) \qquad (j=1, 2,\ \ldots,\ m). \tag{2.187}$$

Требуется найти значения u_j в некоторой области, примыкающей к начальной поверхности.

Рассмотрим вначале в качестве исходной поверхности (2.186) плоскость $x_1=0$, т. е. положим

$$\omega_1=x_1=0. \tag{2.188}$$

Запишем начальные данные на этой поверхности в следующем виде:

$$u_j\big|_{x_1=0}=\varphi_j(x_2,\ \ldots,\ x_n) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2.189}$$

Очевидно, что приведенные начальные данные дают возможность вычислить на поверхности $x_1=0$ все производные первого порядка $\partial u_j/\partial x_k$ $(k=1, 2, \ldots, n,$ $j=2, 3, \ldots, m)$, кроме производных по координате x_1, т. е. $\partial u_j/\partial x_1$.

Подставим в (2.185) начальные данные искомых функций на поверхности $x_1=0$ и их производных по координате $(x_2, \ldots, x_n)$. Дальше может оказаться, что полученная таким образом система уравнений (линейная относительно $\partial u_j/\partial x_1$) разрешима относительно $\partial u_j/\partial x_1$. В этом случае будем иметь на по-

верхности $x_1 = 0$ значения всех производных du_j/dx_k. В противном случае плоскость $x_1 = 0$ называется *характеристической* или *характеристикой* рассматриваемой линейной системы уравнений.

Указанное определение обобщается следующим образом. Если поверхность ω_1 (см. уравнение (2.186)) с заданными на ней начальными данными и исходными уравнениями (2.185) не дает возможности однозначно определить все производные первого порядка от искомых функций на этой поверхности, то такая поверхность называется *характеристической или характеристикой* (*характеристическим многообразием*) рассматриваемой системы линейных дифференциальных уравнений.

Введем новую систему координат

$$x_k' = \omega_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.190}$$

Здесь предполагается, что последовательность $(n-1)$ функций $\omega_2, \ldots, \omega_n$ выбрана таким образом, что приведенная система уравнений (2.190) однозначно разрешима относительно x_k. Очевидно следующее соотношение:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_s'} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}. \tag{2.191}$$

Подставим (2.191) в (2.186). При этом ограничимся только членами уравнения, содержащими du_j/dx_1, так как остальные производные известны из (2.191). В результате получим

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_1'} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{2.192}$$

Производные du_j/dx_1' не могут быть однозначно определены на поверхности

$$x_1' = \omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.193}$$

если определитель системы (2.192) тождественно равен нулю (здесь величины du_j/dx_1' рассматриваются как неизвестные).

Введем следующее обозначение:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k'}. \tag{2.194}$$

В результате получим следующее нелинейное уравнение первого порядка для характеристической поверхности $\omega_1 = 0$:

$$|\omega_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1m} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \ldots & \omega_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.195}$$

Очевидно, что уравнение (2.195) первого порядка будет m-й степени относительно производных $\partial\omega_1/\partial x_k$.

Обратим внимание, что, выписывая уравнение характеристик, будем писать вместо $\omega_1(x_1, .., x_n)$ функцию $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

Пример 1. Рассмотрим систему двух линейных уравнений для двух неизвестных функций u_j, зависящих от двух переменных x_1, x_2.

$$\left(a_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{11}^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_1 + \left(a_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_2 + \ldots = 0;$$

$$\left(a_{21}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{21}^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_1 + \left(a_{22}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22}^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_2 + \ldots = 0. \tag{2.196}$$

Воспользовавшись (2.194) и (2.195), получим следующее дифференциальное уравнение для характеристик:

$$\begin{vmatrix} \left(a_{11}^1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_{11}^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) & \left(a_{12}^1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_{12}^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \\ \left(a_{21}^1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_{21}^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) & \left(a_{22}^1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_{12}^2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.197}$$

В заключение отметим, что любое решение системы (2.185) можно представить в виде $\omega_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$, т. е. имеем не одну характеристику (когда $c = 0$), а семейство характеристик, соответствующих различным значениям постоянной c.

Перейдем теперь к рассмотрению случая линейных относительно старших производных уравнений второго порядка

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} + \ldots = 0. \tag{2.198}$$

Предполагается, что $a_{if}^{lk} = a_{lf}^{kl}$.

Зададим начальные данные Коши на гиперплоскости $x_1 = 0$ в виде

$$u_j|_{x_1=0} = \varphi_j(x_2, \ldots, x_n); \quad \left.\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \psi_j(x_2, \ldots, x_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.199}$$

На этой гиперплоскости известны все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\partial^2 u_j / \partial x_1^2$. Если эти последние производные не могут быть найдены из исходных уравнений, то плоскость $x_1 = 0$ будет характеристической.

Повторяя почти дословно рассуждения, относящиеся к уравнениям первого порядка, можно записать уравнение для характеристического многообразия в следующем виде:

$$|\omega'_{ij}| = \begin{vmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \ldots & \omega'_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega'_{m1} & \omega'_{m2} & \ldots & \omega'_{mm} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.200}$$

где

$$\omega'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_l}. \tag{2.201}$$

Рассмотрим теперь общую систему линейных уравнений вида

$$\sum_{r,k_0,k_1,\ldots,k_n} A_i^{(k_0,\ldots,k_n)} \frac{\partial^{n_r} u_r}{\partial x_{n_0}^{k_0}, \ldots, \partial x_n^{k_n}} + \ldots + f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

$$(i, r = 1, 2, \ldots, N). \qquad (2.201')$$

Поверхность (см. Г. И. Петровский [99, 104])

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2.202)$$

будет характеристической поверхностью или характеристикой уравнения (2.201′), если в каждой точке этой поверхности

$$\left\| \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_r} A_i^{(k_0,k_1,\ldots,k_n)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{k_1} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right\| = 0. \qquad (2.203)$$

Отметим, что если характеристики системы дифференциальных уравнений действительны, то такая система уравнений называется *гиперболической*. Поэтому уравнения современной физики, в которой описываются распространяющиеся в пространстве и времени процессы, носят гиперболический характер, если скорость распространения этих процессов не является бесконечной. Понятие характеристических поверхностей для систем (2.201′) тесно связано с проблемой единственности решения задачи Коши.

Пусть задана поверхность в виде

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0; \qquad (2.204)$$

скорость перемещения поверхности (2.204) может быть определена из уравнения [99, 104, 105]

$$v = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial\varphi/\partial x_i)^2}}. \qquad (2.205)$$

Выражение (2.205) справедливо для скорости распространения любой поверхности.

Пример 2. Рассмотрим характеристическую поверхность

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_0) = c, \qquad (2.206)$$

заданную в 4-мерном пространственно-временном континууме. Поскольку характеристическая поверхность является поверхностью разрыва старших производных рассматриваемого дифференциального уравнения и, следовательно, поверхности фронта волны, очень большое значение приобретает вопрос о скорости распространения этой поверхности в пространственно-временном континууме.

Пусть задана некоторая поверхность $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)=0$. Из (2.205) и [104, с. 542] следует, что скорость распространения фронта волны будет определяться в следующем виде:

$$v=-\frac{\partial\varphi/\partial t}{g}; \qquad g=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{2.207}$$

Рассмотрим теперь нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для одной функции S, зависящей от $n+1$ переменных:

$$S=S(x_1, \ldots, x_n, t). \tag{2.208}$$

Введем обозначения

$$\partial S/\partial t=p; \qquad \partial S/\partial x_i=p_i. \tag{2.209}$$

Допустим, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет первый порядок и ему можно придать вид

$$p+H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n)=0, \tag{2.210}$$

т. е. уравнение разрешено относительно $\partial S/\partial t$. В таком случае можно показать [99], что уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (i=1, 2, \ldots n),$$

$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H; \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.211}$$

Уравнения (2.210), соответствующие функции $H(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n)2n+1$ переменных, называются *канонической системой* дифференциальных уравнений.

2.21.2. Об уравнениях Гамильтона — Якоби. Рассмотрим поле движущихся в 3-мерном евклидовом пространстве невзаимодействующих частиц. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ скорости двух бесконечно близких частиц отличаются друг от друга бесконечно мало как по величине, так и по направлению.

Если описанное состояние имеет место в начальный момент времени, то, исходя из уравнений как классической, так и релятивистской механики, оно сохранится на все последующие времена. Другими словами, первоначально непрерывное распределение координат и скоростей движущихся частиц останется непрерывным в течение всего времени их движения. Это обстоятельство дает возможность рассматривать поток движущихся невзаимодействующих частиц (поток экземпляров) как течение некоторой экземплярной жидкости [106].

Предположим, что внешнее силовое поле, действующее на каждую частицу, имеет потенциал S, так что существует соот-

ношение

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3,); \qquad p_0 = \frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{i\mathscr{E}}{c}. \tag{2.212}$$

Подставив соотношение (2.212) в равенство

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 + m^2c^2 = 0, \tag{2.213}$$

получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{2.214}$$

Выражение (2.214) является релятивистским уравнением Гамильтона — Якоби.

Пример 3. Рассмотрим теперь переход от релятивистского к классическому случаю. В этом случае $p_i = (\partial S/\partial x_i) \ll 1$, а поэтому при $(v/c) \ll 1$ импульс $\partial S/\partial x_i$ может быть записан в виде mv_i; следовательно, в рассматриваемом приближении

$$m^2c^2 \geqslant \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]. \tag{2.215}$$

Итак, имеем

$$\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2} \cong$$

$$\cong mc + \frac{1}{2mc}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]. \tag{2.216}$$

Учитывая выражение (2.216), можно перейти к приближенному уравнению Гамильтона — Якоби при $(v/c) \ll 1$ следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right] + mc^2 = 0. \tag{2.217}$$

Что касается члена mc^2, то его можно не учитывать, так как добавление к уравнению Гамильтона — Якоби аддитивной постоянной не влияет на вытекающие из него уравнения движения.

Если произвести замену

$$S = S^* - mc^2t, \tag{2.218}$$

то последнее уравнение точно преобразуется для S^* в классическое уравнение Гамильтона—Якоби. Заметим, что такое преобразование вполне законно, так как в классическом случае не только S^*, но и t являются скалярами. В рассматриваемом случае, т. е. применительно к уравнению (2.214), преобразование (2.218), конечно, было бы совершенно недопустимо.

При наличии электромагнитных полей уравнение Гамильтона — Якоби принимает вид

$$\sum_{j=1,2,3,0}\left(\frac{\partial S}{\partial x^j} - \frac{e}{c}A_j\right)^2 + m^2c^2 = 0, \tag{2.219}$$

где A_j—4-вектор потенциал электромагнитного поля (см. п. 2.24).

Учитывая, что $x_0=ict$, $A_0=i\varphi^0$, уравнение (2.219) можно представить в виде

$$\sum_{j=1,2,3}\left(\frac{\partial S}{\partial x^j}-\frac{e}{c}A_j\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi^0\right)^2+m^2c^2=0. \qquad (2.220)$$

Разрешив (2.220) относительно $\partial S/\partial t$, получим

$$\partial S/\partial t=H, \qquad (2.221)$$

где

$$H=c\sqrt{\sum_{j=1,2,3}\left(\frac{\partial S}{\partial x^j}-\frac{e}{c}A_j\right)^2+m^2c^2}+e\varphi^0. \qquad (2.222)$$

Функция (2.222) носит название *функции Гамильтона.*

Заметим, что в классическом (дорелятивистском) случае уравнение Гамильтона — Якоби для N взаимодействующих частиц может быть записано в явном виде (см. ниже). Однако в релятивистском случае эта проблема ждет своего решения [107].

Отметим следующее. В механике сплошных сред различают лагранжевый и эйлеровый подход описания среды [106]. При лагранжевом подходе к описанию среды следят за движением каждой частицы среды. Причем координаты частицы в каждый момент времени зависят от ее начальных координат (т. е. момент $t=0$) и данного момента времени. При эйлеровом описании движения среды наблюдают за тем, что происходит в данном элементе объема 3-мерного пространства. В этом случае наблюдают за различными частицами, попадающими в данный элемент объема в разные моменты времени. При лагранжевом описании скорость каждой частицы среды является функцией ее начальных координат и времени. При эйлеровом описании скорость движения каждой частицы среды является функцией времени и координат той точки среды, в которой она в данный момент находится.

То же самое относится ко всем другим механическим функциям, описывающим движение среды.

В методе Гамильтона — Якоби пользуемся эйлеровым описанием потока экземпляров невзаимодействующих частиц. Поэтому импульс частицы в этом методе оказывается функцией координат точки пространства, в которой в данный момент частица находится. Следовательно, в фиксированной точке пространства импульс $p_i=\partial S/\partial x^i$ относится не к одной частице, а к различным частицам, которые в данный момент времени оказываются в фиксированной точке.

Аналогичные замечания можно сделать относительно всех других функций, входящих в уравнение Гамильтона — Якоби.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\partial S/\partial t+H=0. \qquad (2.223)$$

Здесь H — плотность энергии, отнесенная к единице объема, расположенного в окрестности данной точки пространства. В случае свободной частицы

или движения частицы в консервативном поле энергия H каждой частицы должна сохраняться. Однако рассматривая плотность энергии H в окрестности данной точки, будем каждый раз иметь дело с новыми частицами, поступающими в данный элемент объема. Поэтому H может меняться со временем даже в консервативном случае. Таким образом, член $\partial S/\partial t$ учитывает это изменение и, следовательно, уравнение Гамильтона—Якоби выражает закон сохранения энергии в потоке «экземплярной жидкости» в эйлеровом представлении.

В релятивистской механике в случае свободных частиц или консервативного поля возможно аналогичное толкование.

2.21.3. Характеристики уравнений Гамильтона — Якоби и их физический смысл. Уравнению (2.213) можно придать вид (2.221) при $e=0$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2+m^2c^2}. \tag{2.224}$$

Таким образом, согласно (2.222) функция Гамильтона $H(\ldots)$ имеет вид

$$H = c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2+m^2c^2}. \tag{2.225}$$

Воспользовавшись уравнением характеристик (2.211) для общей системы, получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=0. \tag{2.226}$$

Пример 5. В качестве простейшего примера вывода (2.226) рассмотрим одномерное движение частицы. Уравнение Гамильтона—Якоби в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+c\sqrt{m^2c^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}=0; \quad H=c\sqrt{m^2c^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}. \tag{2.227}$$

Таким образом, можно написать уравнения характеристик, т. е. уравнения движения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial(\partial S/\partial x)}=\frac{c\partial S/\partial x}{\sqrt{m^2c^2+(\partial S/\partial x)^2}}; \tag{2.228}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=-\frac{\partial H}{\partial x}=0. \tag{2.229}$$

Из уравнения (2.228) видно, что dx/dt не является импульсом, поскольку при выводе уравнения Гамильтона—Якоби было принято, что импульс равняется $p=\partial S/\partial x$.

Можно, однако, решить уравнение (2.228) относительно $\partial S/\partial x$ и полученный результат подставить в (2.229). В результате получим

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.230}$$

Здесь $v = dx/dt$. Из формулы (2.230) видно, что $\partial S/\partial x$ действительно равняется импульсу. Подставив полученное значение для $\partial S/\partial x$ в выражение (2.229), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = 0, \tag{2.231}$$

т. е. уравнение движения (2.226).

Аналогично получаются уравнения (2.226) для 3-мерного случая.

Таким образом, *уравнения движения (2.226) для свободной частицы являются одновременно уравнениями характеристик для уравнений Гамильтона—Якоби.*

Следует отметить, что рассмотренный выше метод вывода уравнений движения на основе характеристик уравнений Гамильтона—Якоби справедлив и в классической области. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 6. Классическое (нерелятивистское) уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right] + U = 0. \tag{2.232}$$

В данном случае

$$H\left(x^1, x^2, x^3, \frac{\partial S}{\partial x^1}, \frac{\partial S}{\partial x^2}, \ldots\right) = \\ = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right] + U. \tag{2.233}$$

Уравнение для характеристик будет иметь вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\,(\partial S/\partial x^i)} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right); \tag{2.234}$$

$$\frac{d\,(\partial S/\partial x^i)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}, \tag{2.235}$$

откуда следует

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.236}$$

Таким образом, получили уравнение движения Ньютона. Итак, *если задано уравнение Гамильтона—Якоби для некоторой механической системы, то соответствующее уравнение для характеристик последнего совпадает с уравнениями движения этой системы.*

В заключение представим уравнение Гамильтона—Якоби в иной, необходимой при дальнейшем рассмотрении (см. гл. 4) форме

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}-\frac{e}{c}A_i\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi^0\right)^2+m^2c^2=0. \tag{2.237}$$

2.21.4. Модифицированное уравнение Гамильтона — Якоби и волновое представление классической механики. Рассмотрим релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби (2.214). Допустим, что уравнение (2.214) имеет зависящее от одного параметра Ω_0 неявное решение

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, t)=\Omega_0=\text{const}. \tag{2.238}$$

Тогда

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}+\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x_k}=0; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{2.239}$$

Отсюда следует [109]

$$\frac{\partial S}{\partial x_k}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x_k}\Big/\frac{\partial\Omega}{\partial S}; \quad \frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Big/\frac{\partial\Omega}{\partial S}. \tag{2.240}$$

Подставив (2.240) в (2.214), получим

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2=0. \tag{2.241}$$

Уравнение (2.241) будем называть трансформированным уравнением Гамильтона — Якоби, которое можно рассматривать как уравнение характеристик для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+m^2c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{2.242}$$

Полученное волновое уравнение (2.242) будем называть *классическим* (т. е. не квантовым) *волновым уравнением.* Так как уравнением его характеристик является модифицированное уравнение Гамильтона — Якоби, то, следовательно, его бихарактеристики являются уравнениями траекторий движения частиц. Получаем, таким образом, *волновое представление классической релятивистской механики* (подробнее см. гл. 4).

* Пример 7. В классической (ньютоновской) механике уравнение Гамильтона—Якоби для одной частицы, находящейся в заданном потенциальном поле $U(x^1, x^2, x^3, t)$, имеет вид (2.232). Путем преобразования (2.240) уравнение (2.232) представляется в модифицированном виде

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial S}\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}\right)^2+U(x^1, x^2, x^3, t)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2=0. \tag{2.243}$$

Будем теперь рассматривать уравнение (2.243) как уравнение характеристического многообразия для линейного волнового уравнения, содержащего только старшие производные. Нетрудно убедиться, что это волновое уравнение будет иметь вид

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial S}+\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{i2}}+U\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{2.244}$$

В уравнении (2.244) функция $\varphi(x^1, x^2, x^3, t, S)$ зависит от пяти координат. Следует, однако, иметь в виду, что последняя, пятая координата $S=S(x^1, x^2, x^3, t)$ не является независимой. Она является инвариантной функцией четырех координат x^1, x^2, x^3, t. Поэтому при преобразованиях Галилея функция S не изменяется.

Уравнение (2.244) является волновым представлением классической (ньютоновской) механики, так как его характеристическим многообразием является модифицированное уравнение Гамильтона—Якоби, а его бихарактеристиками являются уравнения движения частиц.

Что касается функции φ, то ее физический смысл будет обсужден в гл. 4.

2.22. Уравнение Гамильтона — Якоби в релятивистской динамике и сила Лоренца

Наряду с 4-вектором $\partial S/\partial x^i$ для случая заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, необходимо ввести в рассмотрение 4-вектор потенциал электромагнитного поля A_i (см. ниже). Как было показано, можно обобщить уравнения Гамильтона — Якоби для свободной частицы на случай частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле. Это приводит к следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}-\frac{e}{c}A_1\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}-\frac{e}{c}A_2\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}-\frac{e}{c}A_3\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}-\frac{e}{c}A_0\right)^2+m^2c^2=0. \tag{2.245}$$

Если учесть, что $A_0=i\varphi^0$ и $x^0=ict$, то получим форму (2.237).

Приведем уравнение (2.245) к виду (2.221), (2.222), т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial t}=$$
$$=c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}-\frac{e}{c}A_1\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}-\frac{e}{c}A_2\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}-\frac{e}{c}A_3\right)^2+m^2c^2}+eA_0. \tag{2.246}$$

Воспользовавшись (2.211), можно написать уравнения характеристик для выражения (2.246), т. е. уравнения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. В 3-мер-

ных обозначениях они будут иметь вид

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \tag{2.247}$$

совпадающий с (2.159).

Таким образом, вычисление характеристик уравнений Гамильтона — Якоби (2.245) дает не только возможность написать уравнения движения (2.247) для заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, но и вывести конкретное выражение для силы Лоренца: $e\ \boldsymbol{E} + (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$. Следовательно, уже в рамках классической механики достигаем полного описания механической системы с помощью одной функции — действия $S(x^1, x^2, x^3, t)$. Что касается уравнения Гамильтона — Якоби, то оно заключает в себе информацию не только о движении частиц, но и о действующих на эти частицы силах; в частности, о силах, носящих не механический характер, т. е. таких, как сила Лоренца.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим движение заряженной частицы в постоянном кулоновом поле, т. е. движение заряда e в поле, создаваемом зарядом e′. Для этого случая уравнение Гамильтона—Якоби принимает следующий вид [88]:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0; \tag{2.248}$$

здесь $\alpha = ee'$; r — расстояние между центрами тяжести заряженных частиц.

Рассмотрим решение S в виде $S = -\mathscr{E}t + M\varphi + f(r)$, где $\mathscr{E}$ и M — постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы.

В результате получим

$$S = -\mathscr{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(\mathscr{E} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}\,dr. \tag{2.249}$$

В соответствии с общим методом уравнения Гамильтона—Якоби траектория определяется из соотношения $\partial S/\partial M = \text{const}$ [88]. В нашем случае это соотношение принимает вид

$$(c^2M^2 - \alpha^2)\frac{1}{r} = \\ = c\sqrt{(M\mathscr{E})^2 - m^2c^2(M^2c^2 - \alpha^2)}\cos\left(\varphi\sqrt{1 - \frac{d^2}{c^2M^2}}\right) - \mathscr{E}\alpha, M_c > |\alpha|; \tag{2.250}$$

$$(\alpha^2 - c^2M^2)\frac{1}{r} = \\ = \pm c\sqrt{(M\mathscr{E})^2 + m^2c^2(\alpha^2 - M^2c^2)}\,\mathrm{ch}\left(\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2} - 1}\right) + \\ + \mathscr{E}\alpha, M_c < |\alpha|; \tag{2.251}$$

$$\frac{2}{r}\mathscr{E}\alpha = \mathscr{E}^2 - m^2c^4 - \varphi^2\left(\frac{\mathscr{E}\alpha}{cM}\right)^2; \qquad M_c = |\alpha|. \tag{2.252}$$

Подробный анализ полученных выражений показывает [88], что в то время как в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновом поле происходит по замкнутым орбитам, в релятивистской механике кулоново поле теряет это свойство. В этом случае вместо эллипсов получаются орбиты в виде незамкнутых «розеток».

2.23. Приложение теории относительности к элементарным частицам. Релятивистские катастрофы

2.23.1. Энергия движущегося тела, как уже знаем, будет равна

$$\mathscr{E}=Mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{2.253}$$

Таким образом, она (в противоположность классической механике) всегда положительна. Энергия тела как целого складывается из внутренней энергии его составных частей, их кинетической энергии и энергии их взаимодействия [110], т. е.

$$Mc^2 \neq \sum m_i c^2, \tag{2.254}$$

где m_i — массы отдельных частиц, входящих в состав тела. Из этой формулы следует, что

$$M \neq \sum m_i. \tag{2.255}$$

Итак, масса тела как целого не равна сумме масс его частей, т. е. закон сохранения массы в его обычном понимании оказывается несправедливым.

Представим себе сложное тело, распадающееся на две части, скорости которых обозначим v_1 и v_2. Принимая, что части, на которые распалось тело, не взаимодействуют друг с другом, из закона сохранения энергии будем иметь

$$Mc^2 = \frac{M_1c^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{M_2c^2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}. \tag{2.256}$$

Приведенное уравнение справедливо, если выполняется неравенство

$$\Delta M = M - M_1 - M_2 > 0. \tag{2.257}$$

Величина ΔM носит название дефекта массы. Итак, тело может самопроизвольно распадаться на отдельные части, если дефект его массы положителен. Если дефект массы тела отрицателен, то тело может быть разделено на отдельные части при подводе энергии не меньше, чем ΔMc^2.

Рассмотрим задачу о столкновениях элементарных частиц. Представим закон сохранения энергии в следующем виде:

$$E_1+E_2=E_1'+E_2'. \tag{2.258}$$

Здесь E_1 и E_2 — энергия сталкивающихся частиц, находящихся на столь больших расстояниях, что энергией их взаимодействия можно пренебречь; E_1' и E_2' — энергия разлетающихся частиц после столкновения, когда они находятся на столь большом расстоянии друг от друга, что взаимодействие между ними практически прекратилось.

Кинетическая энергия в теории относительности определяется следующим образом [110]:

$$T = E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \qquad (2.259)$$

По закону сохранения энергии (2.258) для двух сталкивающихся частиц

$$(m_1+m_2-m_1-m_2)\,c^2 = -(T_1+T_2-T_1'-T_2'). \qquad (2.260)$$

Здесь m_1 и m_2 — массы частиц; T_1 и T_2 — кинетические энергии частиц до столкновения; m_1', m_2', T_1', T_2' — массы и кинетические энергии частиц, образовавшихся в результате столкновения.

Из уравнения (2.260) следует, что при столкновении частиц энергия покоя полностью или частично превращается в кинетическую энергию частиц, в частности, может случиться, что в результате столкновения общая кинетическая энергия частиц может увеличиться за счет уменьшения общей энергии покоя частиц.

Легко убедиться, что энергия частицы может быть представлена следующим образом (см. (2.165) и (2.149)):

$$\mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}, \qquad (2.261)$$

где импульс

$$p = mv/\sqrt{1-v^2/c^2}. \qquad (2.262)$$

Если сталкиваются несколько частиц, то их полный импульс до столкновения должен равняться их полному импульсу после столкновения.

Для того чтобы проиллюстрировать применение законов сохранения в теории элементарных частиц, рассмотрим следующую задачу [110]. Пусть частица A, имеющая массу покоя m и обладающая импульсом p, падает на покоящуюся частицу $Б$, имеющую массу M. Возможно ли, чтобы вся энергия частицы A (включая и энергию покоя) превратилась в кинетическую энергию частицы $Б$? Для ответа на этот вопрос напишем условие сохранения энергии и импульса [110]

$$Mc^2 + \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = \sqrt{M^2c^4 + c^2p^2}. \qquad (2.263)$$

Возведя это выражение в квадрат, после ряда преобразований получим

$$m^2c^4 + 2Mc^2\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = 0.$$

Это равенство не может быть выполнено, так как все слагаемые, стоящие в его левой части, положительны. Следовательно, рассматриваемая реакция невозможна, так как она противоречит законам сохранения энергии.

В дальнейшем под термином «частица» будем понимать как вещественную частицу (т. е. частицу с отличной от нуля массой покоя) с 4-импульсом

$$p_k = \frac{mv_k}{\sqrt{1-\beta_k^2}} \quad (k=1,2,3); \qquad p_0 = \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{iE}{c}, \tag{2.264}$$

так и фотон с 4-импульсом [110]

$$p_k = \frac{h\nu}{c} n_k \quad (k=1,2,3); \qquad p_0 = \frac{ih\nu}{c}. \tag{2.265}$$

Под термином «катастрофа» будем понимать процесс столкновения нескольких частиц. Если катастрофа носит релятивистский характер, то, как известно, в результате катастрофы могут возникнуть новые частицы, причем их число может отличаться от числа частиц до столкновения. Под термином «катастрофа» будем понимать также самопроизвольный распад (взрыв), в результате которого одна частица распадается на несколько частиц.

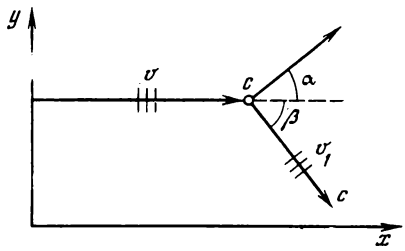


Рис. 2.26. К эффекту Комптона

В качестве интересной иллюстрации релятивистского закона сохранения энергии 4-импульса можно привести теорию эффекта Комптона [91]. Итак, рассмотрим «столкновение» свободного электрона и γ-кванта. Задача заключается в определении длины волны (или частоты) γ-кванта и скорости электрона после соударения.

Релятивистский закон сохранения 4-импульса дает возможность решить эту задачу не зная характера сил взаимодействия в процессе столкновения. Предположим, что в системе координат x, y электрон покоится, а γ-квант движется вдоль оси x (рис. 2.26). Очевидно, до соударения полная энергия и полный импульс были равны

$$E = mc^2 + h\nu; \qquad p = h\nu/c. \tag{2.266}$$

Вместе с тем после соударения направление движения электрона изменится, так же как изменится направление движения γ-кванта. Оба эти направления будут определяться углами α и β, как это показано на рис. 2.26.

После соударения имеем

$$\overline{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-q^2/c^2}} + h\bar{\nu}; \tag{2.267}$$

$$\bar{p}_1 = \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mq}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\cos\alpha; \quad \bar{p}_2 = -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mq}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\sin\alpha.$$

В соответствии с законом сохранения энергии и импульса следует записать

$$mc^2 + h\nu = \frac{mc^2}{\sqrt{1-q^2/c^2}} + h\bar{\nu};$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\bar{\nu}}{c}\cos\beta + \frac{mq}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\cos\alpha; \quad 0 = -\frac{h\bar{\nu}}{c}\sin\beta + \frac{mq}{\sqrt{1-q^2/c^2}}\sin\alpha. \tag{2.268}$$

Из приведенных уравнений легко получить следующее окончательное выражение:

$$\bar{\lambda} - \lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\beta}{2}. \tag{2.269}$$

Здесь λ — длина волны фотона до соударения; $\bar{\lambda}$ — длина волны фотона после соударения.

Таким образом, приведенная формула дает длину волны $\bar{\lambda}$ в зависимости от угла рассеяния.

Релятивистская теория эффекта Комптона получила, как известно, подтверждение в весьма точных экспериментах, проведенных многими авторами. Как видно из (2.269), при рассеивании γ-кванта в обратном направлении имеет место наибольшее изменение длины волны $\bar{\lambda}$, которое равно удвоенному значению так называемой комптоновской длины волны h/mc.

2.23.2. Рассмотрим теперь закон сохранения энергии и импульса более подробно. Этот закон может быть записан в следующей аналитической форме [111]:

$$\sum \frac{m'v_k'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} + \sum \frac{h\nu'}{c} n_k' = \sum \frac{mv_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \sum \frac{h\nu}{c} n_k; \tag{2.270}$$

$$\sum \frac{m'c^2}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} + \sum h\nu' = \sum \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \sum h\nu. \tag{2.271}$$

Здесь суммирование в правой части ведется по всем частицам (включая фотоны) до катастрофы, а в левой части — после катастрофы. При этом, разумеется, число частиц до и после катастрофы может быть различным. Понятно также, что левые и правые части уравнений (2.270) и (2.271) относятся к частицам, находящимся на столь больших расстояниях друг от друга, что их взаимодействием можно пренебречь. Заметим, наконец, что уравнение (2.270) выражает собой закон сохранения релятивистского импульса, а уравнение (2.271) — закон сохранения энергии.

2.23.3. Полезно рассмотреть релятивистскую катастрофу в пространстве импульсов (p_1, p_2, p_3, p_0), как это изложено Дж. Л. Сингом [111]. В этом пространстве каждой частице со-

поставляется вектор (p_1, p_2, p_3, p_0). Компоненты этого вектора не являются независимыми. Они связаны, как уже знаем, следующими соотношениями:

для вещественной частицы $(x^0 = ict)$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 = -m^2c^2; \tag{2.272}$$

для фотона

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 = 0. \tag{2.273}$$

Итак, пространство импульсов имеет ту же метрическую структуру, что и пространство-время Минковского (рис. 2.27, *а*). Однако начало координат в этом пространстве не является произвольным и оно может быть физически выделено. Релятивистская катастрофа в пространстве импульсов может быть истолкована очень просто, а именно равнодействующий вектор системы частиц до катастрофы должен совпадать с равнодействующим вектором системы частиц, образовавшихся после катастрофы. На рис. 2.27, *б* этот процесс изображен наглядно. Здесь две частицы (сплошные линии) после столкновения распадаются на три частицы (пунктирные линии).

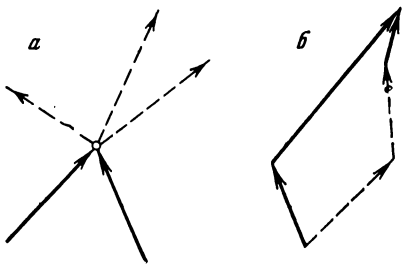


Рис. 2.27. Процесс столкновения частиц

а — в пространстве-времени Минковского; *б* — в пространстве-времени импульсов

Заметим теперь, что для описания процесса столкновения имеется только четыре уравнения (2.270) и (2.271). Таким образом, ни количество вновь образующихся частиц, ни их массы, ни импульсы не могут быть, вообще говоря, предсказаны на основе этих уравнений. Только в единственном случае, когда образуется одна частица, ее импульс и масса могут быть вычислены по уравнениям

$$p_k' = \sum p_k, \qquad M' = -p_k' p_k'. \tag{2.274}$$

Скажем еще несколько слов по поводу упругого и неупругого столкновения.

В случае неупругого столкновения все сталкивающиеся частицы образуют одну частицу с 4-импульсом p_k' и собственной массой M', величины которых можно вычислять по уравнениям (2.274). В случае двух сталкивающихся частиц a и b имеем

$$M'^2 = -(p_r^a + p_r^b)(p_r^a + p_r^b) = M_a^2 + M_b^2 - 2p_r^a p_r^b. \tag{2.275}$$

Здесь M_a и M_b — собственные массы; $p_r{}^a$ и $p_r{}^b$—4-импульсы частиц. Если две движущиеся частицы являются фотонами с ча-

стотами ν_a и ν_b и сталкиваются в направлении единственных векторов n_k^a и n_k^b, то

$$M'^2 = 2\frac{h^2\nu_a\nu_b}{c^4}(1 - n_k^a n_k^b) = 4\frac{h^2\nu_a\nu_b}{c^4}\sin^2\frac{\nu}{2}. \qquad (2.276)$$

Здесь ν — угол между направлениями движения сталкивающихся фотонов. Уравнение (2.276), очевидно, описывает рождение вещественной частицы электромагнитным полем (вещественная частица возникает в результате столкновения двух фотонов). Если $\nu_a = \nu_b = \nu$ и $\nu = \pi$, то

$$M'c^2 = 2h\nu. \qquad (2.277)$$

В случае абсолютно упругого удара число частиц остается неизменным и собственная масса каждой частицы тоже остается неизменной. Видим, таким образом, какую громадную роль играют идеи теории относительности в современной теории элементарных частиц.

Отметим, что СТО сыграла основное значение в теоретическом предсказании существования мезонов как квантов внутриядерных сил. Как следует из теории относительности, средний импульс, переносимый полем, имеет величину порядка произведения скорости света на массу кванта этого поля. Исходя из размеров ядер атомов, Я. Юкава в 1935 г. предсказал, что должны существовать частицы-кванты поля внутриядерных сил, имеющих массу, примерно в 200 раз большую массы электрона. Эта величина позднее была уточнена и, как известно, эти частицы были экспериментально обнаружены К. Д. Андерсоном и С. Г. Неддермяном.

Теория относительности дала возможность предсказать существование одной из самых удивительных элементарных частиц — нейтрино. Г. И. Копылов [112] указывает: «...отцом кинематики следует считать В. Паули. Открывая нейтрино, он открыл и кинематику. Он поверил в сохраняемость энергии сильнее прочих людей — на ладони у него, как у фокусника, внезапно засверкала самая поразительная из частиц».

Сделаем одно принципиальное замечание. Классическая физика пыталась свести все наблюдаемые явления к чисто механическим процессам, т. е. к наглядным картинам движения ансамбля материальных частиц в пространстве и времени. Вместе с тем теория относительности делает невозможным такое сведение к механическим представлениям. Уже знаменитое соотношение между массой и энергией $\mathcal{E} = mc^2$ само по себе не наглядно и приводит к выводу, что целое не состоит из частей (дефект массы и связанная с ним энергия связи).

Итак, подлинно физическая, наглядная, макроскопическая модель явлений, происходящих в микромире, невозможна.

Все подобные модели, как отмечалось выше, носят приближенный и относительный характер. Этот вывод, вытекающий из основных положений теории относительности, связан с характерной для современной физики взаимосвязи понятий массы и энергии, целого и части, элементарности и сложности, обычной реальности и виртуальности применительно к частицам и т. д.

В заключение еще раз отметим, что в данном разделе ограничились только иллюстрацией применения релятивистских за-

конов сохранения в теории элементарных частиц. Другие вопросы этой сложной и исключительно важной теории современной физики здесь не рассматривались.

2.24. Экспериментальное подтверждение релятивистской динамики

2.24.1. Зависимость массы частицы от скорости ее движения. Из изложенного выше следует, что масса движущейся частицы m связана с массой покоя m_0 этой же частицы следующей формулой:

$$m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (2.278)$$

Эта формула проверялась в экспериментах многих исследователей, изучавших движение заряженных частиц в электромагнитном поле (Н. Герлах, И. Кауфман, П. Бюхерер, Ф. Нейман, И. Гюи и Н. Лаванши и др.). Вместе с тем наиболее полным подтверждением (2.278) являются современные ускорители заряженных частиц. Таким образом, зависимость массы частицы от скорости ее движения (2.278) является твердо установленным фактом.

2.24.2. Упругое столкновение двух частиц. При упругом столкновении двух частиц их массы покоя не меняются. В частном случае, когда одна из частиц покоится, траектории частиц образуют угол, который может быть определен по формуле (2.269).

Эксперименты, проводимые Г. Чампионом, К. Кюри, Н. Лепренс — Ринге и другими, подтвердили справедливость этой формулы. В одном из экспериментов зафиксировано столкновение движущегося электрона, для которого $(v/c)=\beta=0{,}968$ с практически покоящимся электроном; при этом угол, под которым расходятся электроны, равен 60°; для $\beta=0{,}93$ этот угол оказался равным 72°. Полученные экспериментальные результаты находятся в хорошем согласии с теоретическими результатами [7].

2.24.3. Эффект Комптона. Как известно, при падении потока рентгеновских лучей на металлическую пластинку происходит рассеяние этих лучей в различных направлениях.

С классической точки зрения это явление объясняется следующим образом. Падающая электромагнитная волна приводит к колебаниям электронов, находящихся в металлической пластинке. По классическим представлениям частота колебаний электронов должна совпадать с частотой падающей волны и, так как колеблющиеся электроны сами являются источником излучения, следовало бы ожидать, что рассеянные рентгеновские лучи имеют ту же частоту, что и падающие. Вместе с тем опыт показывает, что частота рассеянных лучей зависит от угла рассеяния. Это явление, открытое в 1923 г., носит название *эффекта Комптона.*

С релятивистской точки зрения (см. рис. 2.26) падающий фотон рассеивается под углом φ. Электрон также получает допол-

нительный импульс и начинает двигаться под некоторым углом ψ по отношению к направлению падающего фотона. Из релятивистских законов сохранения энергии и импульса можно вывести частоту расеянного фотона в зависимости от угла рассеяния.

Приведенные формулы для частоты или длины рассеянной волны в зависимости от угла рассеяния хорошо подтверждаются экспериментом.

2.24.4. Дефект массы, ядерная энергия и баланс ядерных реакций. Как выше было показано, энергия $\mathscr{E}$ частицы определяется выражением

$$\mathscr{E} = mc^2/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.279}$$

Для покоящейся частицы имеем

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{2.280}$$

Предполагая, что имеем дело с малыми скоростями, будем пользоваться выражением (2.280). Закономерности, выраженные соотношением (2.279), лежат в основе всех процессов, связанных с освобождением внутриатомной энергии, что является блестящим подтверждением одного из выводов теории относительности.

Пример 1. Рассмотрим одну из ооновных реакций, используемых в водородных бомбах. Как известно, ядра атомов состоят из положительно заряженных частиц (протонов) и нейтральных частиц (нейтронов). При весьма высоких температурах (порядка 10^8 К) происходят реакции превращения ядер атомов легких элементов в ядра атомов более тяжелых элементов. При взрыве водородной бомбы происходит слияние ядра атома тяжелого водорода (дейтерия) и ядра атома сверхтяжелого водорода (трития); в результате образуется ядро атома гелия и вылетает один нейтрон.

Эту реакцию можно записать следующим образом:

$$H_1^2 + H_1^3 = He_2^4 + n_0^1.$$

Масса ядра атома дейтерия m_{H_1} равна 2,014408 атомных единиц массы (а. е. м.), масса атома трития $m_{H_1} = 3{,}01700$ а. е. м., масса ядра атома гелия $m_{He_2} = 4{,}00390$ а. е. м. и, наконец, масса нейтрона $m_{H_0} = 1{,}00893$ а. е. м.

Таким образом, при этой реакции происходит следующее изменение массы: $\Delta m = 2{,}014708 + 3{,}01700 - 4{,}00390 - 1{,}00893 = 0{,}0189$ а. е. м. $= 3{,}0 \cdot 10^{-26}$ г. Это изменение массы, как мы уже знаем, называется дефектом массы. Следовательно, в соответствии с формулой (2.280) выделяется энергия, равная

$$\Delta E = 3{,}0 \cdot 10^{-26} \cdot 9 \cdot 10^{20} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}.$$

При реакции слияния 1 г дейтерия и трития выделяется следующее количество энергии: $2{,}7 \cdot 10^{-5}(6{,}023 \cdot 10^{23})/5 = 3{,}3 \cdot 10^{11}$ Дж. Эта энергия соответствует энергии, выделяющейся при сжигании 9 т угля [109].

Другие результаты экспериментальной проверки СТО можно найти в [7, 92, 113 и др.].

Глава 3

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ СИСТЕМАМИ

(Релятивистская теория электромагнитного и гравитационного полей)

Физическую основу процессов управления релятивистскими системами составляют законы СТО и ОТО (теории гравитационного поля), которые обладают рядом специфических свойств и требуют для их исследования соответствующего математического аппарата.

В данном разделе излагаются основы релятивистской теории электромагнитного и гравитационного полей и соответствующего в смысле проблемы Вундгейлера математического объекта. Приводятся некоторые результаты экспериментальной проверки релятивистских эффектов, которые необходимо учитывать при разработке моделей процессов и алгоритмов управления.

Модель управления релятивистскими системами иллюстрируется на примере задачи инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов.

3.1. Электромагнитное поле Максвелла. Предварительные замечания

Основная физическая модель теории электромагнитного поля приводит к уравнениям Максвелла, которые, как это было установлено только через несколько десятилетий, оказались релятивистски инвариантными. Этот факт тем более замечателен, что А. Максвелл, конечно, ничего не знал ни о преобразованиях Лоренца, ни о релятивистской инвариантности вообще.

Таким образом, электромагнитная теория Максвелла является полностью релятивистской теорией. Следовательно, все бесчисленные эксперименты, подтверждающие теорию Максвелла, подтверждают одновременно также теорию относительности.

Любопытно отметить, что в свое время Г. Герц пытался видоизменить уравнения Максвелла таким образом, чтобы они оказались инвариантными относительно преобразований Галилея. Однако уравнения Герца оказались в противоречии с известными еще в то время экспериментами.

Здесь будет довольно подробно изложена основная модель

этой теории в традиционной, тензорной, внешней и спинорной формах. Будут также приведены релятивистские формы преобразования для электромагнитных потенциалов, напряженностей электромагнитного поля и т. д. [7, 88].

3.2. Уравнения Максвелла в традиционной форме и обозначениях

Модель классической электродинамики основана на девяти фундаментальных экспериментах и двух гипотезах Максвелла. В книге Г. Скиллинга [114] эти девять фундаментальных экспериментов описываются следующим образом: опыт 1) установлено, что вокруг тела с электрическим зарядом существует силовое поле; опыт 2) установлено, что электрическое поле потенциально (ротор равен нулю); опыт 3) дивергенция электрического поля пропорциональна плотности заряда; опыт 4) установлено влияние диэлектрической среды; опыт 5) установлен закон Ома; опыт 6) установлено существование магнитного поля; опыт 7) установлено, что изменение магнитного поля индуцирует электрическое поле; опыт 8) установлено, что магнитостатическое поле соленоидально (дивергенция равна нулю); опыт 9) установлено, что ротор магнитостатического поля пропорционален плотности тока.

Кроме того, предполагалось, что дивергенция динамического электрического поля пропорциональна плотности заряда и дивергенция динамического магнитного поля равна нулю. В опытах 3) и 4) эти предположения были доказаны только для статических полей соответственно.

Отметим теперь следующее. Произведение $\varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}$ называют *током смещения*. А. Максвелл высказал исключительно важную гипотезу, что токи смещения создают магнитные поля так же, как и обычные токи проводимости. В обычных условиях обнаружить токи смещения трудно ввиду крайне малой их величины. Положение существенно меняется в случае, например, приборов высокой и сверхвысокой частоты. В этих случаях токи смещения и создаваемые ими магнитные поля принимают большие значения.

Только введенная А. Максвеллом гипотеза о существовании токов смещения и создаваемых ими магнитных полях дала возможность подтвердить закон сохранения энергии. В частности, если пренебречь джоулевым теплом, то только благодаря гипотезе Максвелла удалось установить, что энергия, теряемая излучающей системой внутри замкнутой поверхности, в точности равна энергии, излучаемой через эту поверхность. Таковы в общих чертах качественные особенности модели классической электродинамики Максвелла.

Следует, однако, особо подчеркнуть, что существуют определенные границы применимости электродинамики Максвелла. Л. Д. Ландау и И. М. Лифшиц в [88] указывают: «Заметим, что ввиду бесконечности получающихся из элект-

родинамики «собственной» энергии и массы в рамках самой классической электродинамики нельзя поставить вопрос о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией)... С чисто формальной точки зрения конечность массы электрона можно трактовать путем введения бесконечной отрицательной массы неэлектромагнитного происхождения, компенсирующей бесконечность электромагнитной массы («перенормировка» массы). Мы увидим, однако, в дальнейшем (§ 75), что этим способом не ликвидируются все внутренние противоречия классической электродинамики».

Вместе с тем движущийся заряд создает электромагнитное поле, которое в свою очередь оказывает действие на движущийся заряд. Это действие на движущийся заряд называют силой торможения, которая вычисляется по следующей формуле [88]:

$$f = (2e^2/3c^3)\dot{V}.$$

По этому поводу в [88] указывается: «Надо, однако, иметь в виду, что описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия. Уравнение движения заряда в отсутствие внешнего поля, на который действует только сила (75,8), имеет вид

$$m\dot{V} = (2e^2/3c^3)\ddot{V}.$$

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $V = \text{const}$, еще решение, при котором ускорение $\dot{V}$ пропорционально $\exp\{3mc^3t/2e^2\}$, т. е. неограниченно возрастает со временем. Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться». Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости формулы (75,8).

Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию. Корни этой трудности находятся в действительности в упоминавшейся ранее (§ 37) бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц. Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» не электромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы. Поскольку, однако, вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь...

Таким образом, формула (75,8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2. Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. § 3.7).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой eE, находим условие

$$H \ll m^2c^4/e^3. \qquad (75,12)$$

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико. Поля порядка m^2c^4/e^3 тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям. И здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой вследствие квантовых эффектов уже при значительно меньших полях (при полях порядка m^2c^3/he, где h — постоянная Планка)... Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. В предыдущем параграфе было показано, что полученные выражения для торможения излучением применимы лишь в таких полях, величина которых в системе отсчета, в которой частица покоится (система K_0) мала по сравнению с m^2c^4/e^3. Пусть F есть порядок величины внешнего поля в системе отсчета K, в которой частица движется со скоростью v. Тогда в системе K_0 поле имеет порядок величины $F\sqrt{1-v^2/c^2}$ (см. формулы преобразования в § 24). Поэтому F должно удовлетворять условию

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1-v^2/c^2}} \ll 1. \tag{76,5}$$

Между тем отношение силы торможения (76,4) к внешней силе ($\sim eF$) по порядку величины есть

$$e^2F/\left[m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right],$$

и мы видим, что соблюдение условия (76,5) не препятствует тому, что сила торможения может оказаться (при достаточно большой энергии частицы) большой по сравнению с обычной лоренцевой силой, действующей на заряд в электромагнитном поле. Таким образом, для ультрарелятивистской частицы может иметь место случай, когда торможение излучением является основной действующей на нее силой».

В традиционных обозначениях фундаментальные уравнения Максвелла могут быть записаны как в интегральной, так и в дифференциальной формах [115].

В интегральной форме соотношение между токами и магнитным полем

$$\oint\limits_{(C)} H dS = \int\limits_{\Sigma} j d\sigma + \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial D}{\partial t} d\sigma; \tag{3.1}$$

закон индукции

$$\int\limits_{(C)} E dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma} B d\sigma; \tag{3.2}$$

вихревой характер поля E (отдельные магнитные полюсы или заряды не могут существовать) для любой замкнутой поверхности S

$$\int\limits_{(S)} B d\sigma = 0; \tag{3.3}$$

соотношение между электрическими зарядами и электрическим

полем (невихревая часть поля)

$$\oint D d\mathbf{S} = \int \rho d\tau \tag{3.4}$$

и соотношения, отражающие электрические (ε) и магнитные (μ) свойства среды,

$$B = \mu\mu_0 H \text{ и } D = \varepsilon\varepsilon_0 E. \tag{3.5}$$

В дифференциальной форме .

$$\begin{aligned} &\text{rot}\, \boldsymbol{H} = j + \partial \boldsymbol{D}/\partial t; \quad \text{div}\, \boldsymbol{B} = 0; \\ &\text{rot}\, \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t; \quad \text{div}\, \boldsymbol{D} = \rho; \end{aligned} \tag{3.6}$$

здесь $\boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ (для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$).

Уравнения (3.6) — уравнения Максвелла; $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля; $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля; $\boldsymbol{B}$ — вектор магнитной индукции; j — плотность тока; μ — коэффициент магнитной проницаемости; ε — коэффициент электрической проницаемости (для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$).

В заключение полезно привести одну цитату из упоминавшейся книги Г. Скиллинга [114, с. 115], в которой с предельной ясностью характеризуется сущность открытия А. Максвелла: «Известно из опыта, что ток *проводимости* (курсив Г. Скиллинга) создает магнитное поле; математически *общий ток* удобнее всего выражать в виде суммы тока проводимости и тока *смещения*, поэтому возникает вопрос: не создает ли также и ток смещения, подобно току проводимости, магнитное поле. Во времена Максвелла экспериментальная техника не давала возможности с помощью непосредственного исследования подтвердить или опровергнуть это положение, так как подлежащие исследованию величины очень малы. Но эта гипотеза привела к фундаментально важному заключению, ибо Максвелл показал, что если она справедлива, то энергия должна передаваться в виде электромагнитных волн».

3.3. Тензорная форма электродинамики Максвелла

3.3.1. Прежде всего необходимо заметить, что три компоненты напряженностей электрического поля E_x, E_y, E_z и три компоненты напряженностей магнитного поля H_x, H_y, H_z не могут рассматриваться как два вектора в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве СТО. В самом деле, в этом пространстве могут существовать векторы, имеющие по четыре компоненты.

Электрическое и магнитное поля тесно связаны между собой. Так, хорошо известно, что чисто магнитное поле, покоящееся в заданной инерциальной системе отсчета магнита, становится электромагнитным полем в другой инерциальной системе отсчета, движущейся по отношению к исходной прямолинейно и равномерно. Следовательно, как с физической, так и с математической точек зрения шесть компонент электрического и

магнитного полей естественно рассматривать как компоненты антисимметричного тензора второй валентности.

Хорошо известно, что антисимметричный тензор второй валентности в псевдоевклидовом пространстве имеет именно шесть компонент и не существует другого тензорного объекта, который обладал бы этим свойством (ниже $x^0 = ict$, поэтому $F_{ik} = F^{ik}$).

Поэтому А. Эйнштейн сделал предположение, что компоненты электрического и магнитного полей могут быть представлены как компоненты антисимметричного тензора второй валентности [1]

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{10} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{20} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{30} \\ F_{01} & F_{02} & F_{03} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} = F_{ik}. \tag{3.7}$$

Теперь первую и вторую группы уравнений Максвелла (3.6) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0; \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k} = j_i, \tag{3.9}$$

где j_i — компоненты вектора 4-тока.

Первой группе уравнений Максвелла (3.8) можно также придать вид

$$\Theta_{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \tag{3.10}$$

где Θ_{iklm} — единичный полностью антисимметричный псевдотензор.

Легко видеть, что написанные уравнения ковариантны относительно группы преобразований Лоренца (см. п. 2.2.). При традиционной записи уравнений Максвелла доказательство их ковариантности относительно группы преобразований Лоренца требует крайне громоздких выкладок. При тензорной записи этих уравнений их релятивистская инвариантность становится непосредственно очевидной. Отмеченное обстоятельство является одним из существеннейших преимуществ использования тензорного аппарата в современной теории физических полей по сравнению с традиционным подходом к этой теории.

---

[1] Так как в дальнейшем взята мнимая координата $x^0 = ict$, то, как отмечалось в главе 2, в этом случае различия между ко- и контравариантными компонентами пропадают. Поэтому ниже для всех введенных величин (кроме координат) индексы будем писать внизу.

Следует подчеркнуть, что уравнения (3.8) и (3.9) имеют различную геометрическую природу: уравнения (3.8) никак не связаны с наличием псевдоевклидовой метрики, в то время как вторая пара уравнений Максвелла (3.9) требует для своего описания псевдоевклидовой метрики. Более подробно геометрическая природа уравнений Максвелла рассмотрена в п. 3.5.3.

Компоненты j_i в (3.9) должны удовлетворять условию непрерывности

$$\frac{\partial j_i}{\partial x^i} = 0 \text{ или } \frac{\partial j_1}{\partial x^1} + \frac{\partial j_2}{\partial x^2} + \frac{\partial j_3}{\partial x^3} + \frac{\partial j_0}{\partial x} = 0, \qquad x^0 = ict. \tag{3.11}$$

Если ток образуется движением одного точечного заряда, то

$$j_i = e\bar{v}\delta(r - r_0), \qquad j_0 = ice\delta(r - r_0) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.12}$$

где r_0 — координата заряда в данный момент; $\delta(r - r_0)$ — 3-мерная дельта-функция Дирака; $\bar{v}$ — 3-мерная скорость.

Решение уравнений Максвелла будем искать в виде

$$F_{ik} = (\partial A_i/\partial x^k - \partial A_k/\partial x^i). \tag{3.13}$$

При подстановке (3.13) в уравнения Максвелла первая их группа удовлетворяется тождественно. Что же касается второй группы уравнений Максвелла, то она приводит к следующим уравнениям для потенциала A_i:

$$\Box A_i - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_n}{\partial x^n}\right) = j_i; \tag{3.14}$$

здесь $\Box = \partial^2/\partial x^{12} + \partial^2/\partial x^{22} + \partial^2/\partial x^{32} - 1/c^2 \cdot \partial^2/\partial t^2$ — оператор Даламбера.

Если взять дивергенцию от обеих частей равенства (3.14), то нетрудно убедиться, что левая часть при этом обратится тождественно в нуль, т. е. приходим к уравнениям непрерывности для тока (3.11).

В электродинамике [88] четыре уравнения для потенциалов заменяют следующими пятью уравнениями:

$$\Box A_i = j_i, \tag{3.15}$$

$$\partial A_n/\partial x^n = 0. \tag{3.16}$$

Здесь необходимо сделать следующее важное замечание. Для шести функций F_{ik} (напряженностей электромагнитного поля) существует восемь уравнений Максвелла (четыре уравнения первой группы (3.8) и четыре уравнения второй группы (3.9)). Нетрудно, однако, убедиться, что восемь уравнений Максвелла не являются независимыми. В самом деле, если в первой группе (3.8) уравнений взять производную $\partial/\partial x^1$ от первого уравнения, $\partial/\partial x^2$ от второго уравнения и $\partial/\partial x^3$ от третьего уравнения и минус $(1/c)(\partial/\partial t)$ от четвертого уравнения и полученные таким образом уравнения сложить, то эта сумма будет тождественно равна нулю. Из этого следует, что четвертое уравнение первой группы Максвелла является дифференциальным следствием

первых трех этой группы. То же самое можно сказать о второй группе уравнений Максвелла (3.9), если только соблюдается закон сохранения заряда (3.11).

Для единичного заряда уравнения (3.15), (3.16) имеют решение (Лиенар—Вихерт)

$$A_0 = \frac{e}{(R - VR/c)}; \qquad A_i = \frac{eV}{c\,(R - VR/c)} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.17}$$

Здесь R — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения p; V — 3-мерная скорость; все величины в правых частях равенств (3.17) должны быть взяты в момент времени t', который определяется из уравнения

$$t' + R(t')/c = t, \tag{3.18}$$

где t — момент наблюдения; $R(t')$ — расстояние от заряда до точки наблюдения, являющееся заданной функцией времени.

Отметим, что решение для потенциалов в виде (3.17) называют потенциалами Лиенара — Вихерта.

Преобразования Лоренца для 4-вектора (x^1, x^2, x^3, x^0) дают возможность написать формулы преобразования для любых векторных или тензорных величин, встречающихся в релятивистской теории поля.

Пример 1. Рассмотрим законы преобразования для 4-вектора электромагнитного потенциала и тензора электромагнитного поля, в частности, когда одна из инерциальных систем отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью V вдоль оси x.

Вначале запишем преобразования в 3-мерных обозначениях [88]

$$A_x = \frac{A'_x + (V/c)\,\varphi'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + (V/c)\,A'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \tag{3.19}$$

$$H_x = H'_x; \quad H_y = \frac{H'_y - (V/c)\,E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad H_z = \frac{H'_z + (V/c)\,E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{3.20}$$

В 4-мерном представлении можно записать

$$A_1 = \frac{A'_1 - i\,(V/c)\,A'_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad A_2 = A'_2; \quad A_3 = A'_3; \quad A_0 = \frac{A'_0 + i\,(V/c)\,A'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{3.21}$$

Аналогично в 4-мерном представлении компоненты электромагнитного поля запишутся как

$$F_{12} = \frac{F'_{12} - i\,(V/c)\,F'_{02}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad F_{02} = \frac{F'_{02} + i\,(V/c)\,F'_{12}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};$$

$$F_{13} = \frac{F'_{13} - i\,(V/c)\,F'_{03}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad F_{03} = \frac{F'_{03} + i\,(V/c)\,F'_{13}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{3.22}$$

3.3.2. Введем теперь важное понятие о тензоре энергии-импульса электромагнитного поля. Этот тензор можно определить следующим образом [88]:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl} - \frac{1}{4}F_{lm}F_{lm}g_{ik}\right). \tag{3.23}$$

Воспользовавшись уравнениями Максвелла (3.8), (3.9), нетрудно убедиться в справедливости существования следующих четырех тождеств:

$$\partial T_{ik}/\partial x^k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{3.24}$$

Проинтегрировав (3.24) по 3-мерному объему V_1 и воспользовавшись теоремой Гаусса—Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int\limits_{V_1} T_{00}dV = -\oint\limits_F (T_{01}n_1 + T_{02}n_2 + T_{03}n_3)\,dF;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int\limits_{V_1} \frac{\partial T_{0k}}{\partial x^0}\,dV = -\oint\limits_F (T_{1k}n_1 + T_{2k}n_2 + T_{3k}n_3)\,dF \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{3.25}$$

Здесь T_{00} имеет смысл плотности энергии поля, а T_{k0} имеет смысл плотности импульса поля. В соответствии с этим выражение

$$T_{01}n_1 + T_{02}n_2 + T_{03}n_3 \tag{3.26}$$

представляет собой вектор плотности потока энергии, т. е. *вектор Умова—Пойнтинга.*

И соответственно выражение

$$T_{1k}n_1 + T_{2k}n_2 + T_{3k}n_3 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3.27}$$

— вектор плотности потока импульса.

Таким образом, уравнения (3.24), (3.25) представляют собой дифференциальную и интегральную формы законов сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля соответственно.

Другая запись законов сохранения в виде внешних форм приведена ниже в п. 3.5.3.

В заключение приведем в развернутом виде в традиционных обозначениях выражения для компонент тензора энергии-импульса и для вектора плотности потока энергии Умова—Пойнтинга [88]:

$$T_{xx} = \frac{1}{8\pi}(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2),$$

$$T_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_xE_y + H_xH_y), \tag{3.28'}$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)\right\}. \tag{3.28}$$

Заметим, что тензор энергии-импульса (3.28) называют также *максвелловским тензором напряжений.*

Вектор Умова—Пойнтинга в традиционных обозначениях имеет вид

$$S = \frac{c}{4\pi}[EH]. \tag{3.29}$$

3.4. Характеристики уравнений Максвелла

В соответствии с общей теорией, изложенной в главе 4, уравнение характеристик для уравнений Максвелла должно иметь вид

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^0}\right)^2\right]^3 = 0. \tag{3.30}$$

Уравнение (3.30) является уравнением эйконала, возведенного в куб.

При составлении уравнений характеристик уравнений Максвелла (3.8), (3.9) возникают определенные трудности.

Из уравнения характеристик (3.30) следует, что волновое поле для фотона должно описываться шестью функциями, носящими тензорный характер, т. е. уравнениями (3.8), (3.9). Каждая из систем уравнений (3.8), (3.9) состоит из четырех уравнений, т. е. имеем восемь уравнений для шести функций F_{ik}. Но, как хорошо известно, последнее уравнение системы (3.8) и последнее уравнение системы (3.9) являются дифференциальными следствиями первых трех. Поэтому, казалось бы, можно ограничиться (так обычно и поступают) первыми тремя уравнениями системы (3.8) и первыми тремя уравнениями системы (3.9). Очень многие авторы выводили уравнение характеристического многообразия для указанных шести уравнений Максвелла. Так, в широко известной монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [99], а также монографиях многих других авторов, например [104], приводится следующее характеристическое многообразие для уравнений Максвелла:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2 = 0. \tag{3.31}$$

Приведенное характеристическое многообразие (3.31) не совпадает с приведенным выше (3.30), т. е. оно не удовлетворяет сформулированным нами в главе 4 требованиям. Кроме того, как легко убедиться, оно релятивистски неинвариантно.

Вместе с тем, как это следует из самой физической модели, характеристическое многообразие обязательно должно быть релятивистски инвариантно. Чтобы понять, в чем здесь дело, следует обратить внимание, что первая группа уравнений Максвелла (3.8) выражает равенство нулю четырех компонент псевдовектора или полностью антисимметричного тензора третьей валентности, а вторая группа уравнений (3.9) выражает равенство нулю всех компонент 4-вектора в псевдоевклидовом пространстве, причем, как отмеча-

лось выше, последние уравнения обеих групп являются дифференциальными следствиями первых трех уравнений обеих групп соответственно. При выводе уравнения характеристического многообразия ограничивались, как видели, только тремя компонентами псевдовектора (3.8) и тремя компонентами 4-вектора (3.9). При этом не учитывалась четвертая времени-подобная компонента псевдовектора (3.8) и четвертая времени-подобная компонента 4-вектора (3.9). Теперь становится совершенно ясным, почему в [99, 104], а также в других работах не было получено релятивистски инвариантное уравнение характеристического многообразия уравнений Максвелла.

Имеется еще несколько возможностей составления дополнительных характеристических многообразий, которые совместно с приведенным выше (3.31) образуют релятивистски инвариантное многообразие. Рассмотрим эти возможности. В обеих группах уравнений (3.8) и (3.9) заменим первые уравнения (т. е. компоненты векторов в направлении x^1) последними уравнениями, т. е. времени-подобными компонентами этого же вектора, и выведем для полученной таким образом системы характеристическое многообразие. Затем повторим подобную же операцию, заменив вторые уравнения в обеих группах времени-подобными компонентами векторов, т. е. последними уравнениями каждой из групп. И, наконец, это же проделаем для третьих уравнений обеих групп, заменив их времени-подобными векторами. Всякие другие комбинации уравнений нарушали бы релятивистскую инвариантность.

С учетом приведенного выше характеристического многообразия (3.31) получим следующую систему из четырех характеристических многообразий:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2=0;\\
&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2=0;\\
&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2=0;\\
&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2=0.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Стоящие в левой части (3.32) выражения являются квадратами компонент 4-вектора. Сумма квадратов компонент 4-вектора должна дать длину 4-вектора, т. е. инвариант. Складывая приведенные выше соотношения в (3.32), получим

$$
\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^3=0. \tag{3.33}
$$

Это и есть истинное характеристическое многообразие уравнений Максвелла (3.8), (3.9), что отвечает сформулированному общему требованию и совпадает с (3.30).

Итак, полученное соотношение (3.33) является действитель-

ным релятивистски-инвариантным характеристическим многообразием уравнений Максвелла. Заметим, что изложенный выше метод можно применять для нахождения характеристических многообразий аналогичных сверхопределенных систем.

Таким образом, характеристическое многообразие уравнений Максвелла — уравнение Гамильтона—Якоби ($m=0$), возведенное в куб, что согласуется с квантовым постулатом, изложенным в главе 4.

Отметим, что В. А. Фок [56] также получил (совершенно другим методом) характеристическое многообразие в виде (3.30), но не возведенное в степень 3. Аналогичное (не возведенное в степень 3) характеристическое многообразие уравнений Максвелла приведено в работе В. Гийемина и С. Стернберга [116, с. 127], в которой уравнения Максвелла рассматривались с позиции внешних форм Картана (см. ниже п. 3.5). Вместе с тем в нашем случае эта степень имеет принципиальное значение, так как указывает, что уравнения Максвелла удовлетворяют требованиям квантового постулата (см. подробнее гл. 4).

Вычислим теперь скорость распространения характеристической поверхности (т. е. фронта волны). Воспользовавшись общим методом, изложенным в гл. 2, получим из формулы (2.207)

$$v^2 = \frac{(\partial\Omega/\partial t)^2}{\sum\limits_{i=1}^{3}(\partial\Omega/\partial x^i)^2} = \frac{(\partial\Omega/\partial t,^2}{1/c^2\,\partial\Omega/\partial t)^2} = c^2. \tag{3.34}$$

Таким образом, приходим к выводу, что скорость распространения фронта волны (характеристической поверхности) уравнений Максвелла должна равняться постоянной c, входящей в эти уравнения.

3.5. Заключительные замечания о модели электромагнитного поля Максвелла

3.5.1. Выше была описана физическая модель классической электродинамики Максвелла. Эта модель включает в себя описание на содержательном физическом языке девяти основных экспериментов и двух гипотез Максвелла, связанных с существованием и магнитными свойствами токов смещения. Были также указаны физические границы применимости этой модели.

Полученные Ф. Максвеллом уравнения оказались релятивистски инвариантными. Этот факт тем более замечателен, поскольку во времена Ф. Максвелла никакого представления о релятивистской инвариантности не было вообще. Необозримое количество физических явлений, вытекающих из уравнений Максвелла, в последующие годы полностью обнаруживались и подтверждались экспериментами.

Например, на основе уравнений Максвелла было предсказано существование электромагнитных волн. Создание электродинамики Максвелла являет-

ся одним из ярких примеров проявления гениальной интуиции за всю историю науки. Можно с уверенностью сказать, что само создание теории относительности было бы невозможным, если бы не существовала электродинамика Максвелла. Вместе с тем ввиду релятивистской инвариантности уравнений Максвелла все явления и процессы, подтверждающие электродинамику Максвелла, одновременно являются экспериментальным подтверждением теории относительности.

Громадное значение теории Максвелла в истории науки заключается также в том, что это первая физическая теория, не сводимая к механике. Выше этот вопрос был подробно рассмотрен на основе математической модели. Здесь ограничимся несколькими замечаниями по поводу физической интерпретации электродинамики Максвелла.

Электромагнитное поле не может быть наглядно представлено в виде некоторой гипотетической среды, деформации которой были бы способны объяснить электромагнитные явления.

Невозможность механического истолкования электромагнитных волновых процессов, описываемых уравнениями Максвелла, была осознана только после продолжавшихся несколько десятилетий безуспешных попыток дать механическую модель среды, волновые процессы в которой могли бы быть истолкованы как электромагнитные явления (такие попытки были предприняты еще самим Максвеллом). Нельзя представить себе распространение электромагнитных волн в виде волнового движения в упругой или какой-либо иной среде, которая может рассматриваться как чисто механическая система.

Для того чтобы это было вполне ясно, напомним об одном электромагнитном явлении. Как известно, чисто магнитное поле, созданное, например, покоящимся в системе отсчета S_1 постоянным магнитом, проявляет себя как электромагнитное поле в системе отсчета S_2, движущейся прямолинейно и равномерно относительно системы отсчета S_1. В этом отношении небезынтересно одно замечание А. Эйнштейна [43]: «Вначале физики еще не отдавали себе полного отчета в революционизирующем характере теории поля. Сам Максвелл еще был убежден в том, что электродинамические процессы можно рассматривать как движение эфира, и даже использовал механику при выводе уравнений поля. Однако со временем стали все более отчетливо понимать, что сведение уравнений электромагнитного поля к уравнениям механики невозможно. В этих условиях стремление к созданию единого фундамента всей физики заставило изменить подход к проблеме на прямо противоположный и сводить уравнения механики к электромагнитным уравнениям». Поэтому в настоящее время попытки построить подобные модели относятся к мнимым проблемам науки.

3.5.2. Ранее отмечалось, что формальная сторона одной и той же физической модели электродинамики Максвелла, т. е. ее математическая модель, может быть представлена в различных формах. Известны две традиционные так называемые векторные модели (дифференциальная и интегральная), подробно описанные в п. 3.2; в п. 3.3 была описана тензорная форма этой же физической модели. Следует отметить, что тензорная форма уравнений Максвелла ближе к сущности физической модели, так как здесь электромагнитное поле описывается не с помощью

двух различных «векторов» $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, а с помощью одного антисимметричного тензора второй валентности.

Термин «вектор» брался в кавычки, так как, строго говоря, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не являются векторами в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве теории относительности. В действительности (подчеркнем это еще раз) $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ являются компонентами единого антисимметричного тензора второй валентности F_{ik}. Только благодаря этому обстоятельству представляется возможным написать правильные уравнения преобразований электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Таким образом, при построении математических моделей той или иной теории совершенно необходимы строгие определения входящих в эти модели величин (векторов, тензоров той или иной валентности, спиноров и т. д.). Это требование следует рассматривать как требование математической и физической строгости, необходимые при построении физических и математических моделей любых теорий [7, 39].

Помимо приведенных математических моделей электродинамики Максвелла, существует так называемая спинорная модель. В табл. 3.1, заимствованной из книги Ю. Б. Румера [109], приведены традиционная «векторная», дифференциальная, тензорная и спинорная формы записи модели электромагнитного поля (для читателя, знакомого с элементарными основами спинорного исчисления). Отметим здесь, что основы спинорного исчисления можно найти в [116, 117].

3.5.3. Отмеченное в п. 3.3.1 различие в геометрическом содержании первой и второй пар уравнений Максвелла нашло свое отражение при анализе модели электромагнитного поля, записанной на языке внешних дифференциальных форм [116, 118, 119].

Введение аппарата внешних дифференциальных форм в анализ модели электромагнитного поля объясняется следующим обстоятельством. Используемый при анализе физических законов тензорный аппарат требует введения несингулярных координатных систем, в которых задаются компоненты векторов или тензоров. В общем случае, однако, задания только одной несингулярной координатной системы недостаточно для того, чтобы покрыть многообразие, не эквивалентное топологически открытому множеству в евклидовом пространстве. Этот факт непосредственно следует из определения дифференцируемого многообразия [116, 118—120]. Из этого следует, в частности, что в произвольном дифференцируемом многообразии невозможно описать электромагнитное поле, задав его компоненты F_{ij} в какой-либо только одной конкретной системе отсчета [119, с. 56].

Поэтому рассмотрим один из вариантов описания модели электромагнитного поля Максвелла в произвольном многообразии при произвольном выборе координатных систем на основе перехода к бескоординатной записи полей на многообразии через внешние дифференциальные p-формы [116, 118, 119].

С точки зрения представлений современной геометрии описание геометрических свойств модели электромагнитного поля Максвелла можно условно разбить на три этапа, которые Ю. И. Манин в [121, с. 6] характеризует следую-

Таблица 3.1

Векторная форма	Тензорная форма	Спинорная форма
Напряжение поля		
$\mathbf{E}, \mathbf{H}$	F_{ik}	$f_{\lambda\mu}$
Плотность заряда и тока		
ρ, j	j^i	$s_{\lambda\dot{\mu}}$
Потенциалы		
φ, A	A_i	$\varphi_{\lambda\dot{\mu}}$
Первая система уравнений Максвелла		
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j,\\ \mathrm{div}\mathbf{E}=4\pi\rho\end{array}\right\}$	$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k}=4\pi j^i$	$\frac{1}{2}(\partial_{\lambda\dot{\sigma}} f_{\rho}^{\dot{\sigma}} + \partial_{\rho\dot{\sigma}} f_{\lambda}^{\dot{\sigma}}) = s_{\lambda\dot{\rho}}$
Вторая система уравнений Максвелла		
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rot}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0,\\ \mathrm{div}\mathbf{H}=0,\end{array}\right\}$ $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$	$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0$	$\partial_{\lambda\dot{\sigma}} f_{\rho}^{\dot{\sigma}} - \partial_{\rho\dot{\sigma}} f_{\lambda}^{\dot{\sigma}} = 0$
Соотношение между напряжением поля и потенциалами, эквивалентное второй системе уравнений Максвелла		
$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$	$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$	$f_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}(\partial_{\lambda\dot{\sigma}}\varphi_{\mu}^{\dot{\sigma}} + \partial_{\mu\dot{\sigma}}\varphi_{\lambda}^{\dot{\sigma}})$
Тензор энергии-импульса		
$T_{xx}=\frac{1}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2}(H_x^2-H_y^2-H_z^2)$, $T_{xy}=E_xE_y+H_xH_y$, $T_{xz}=E_xE_z+H_xH_z$, $T_{yy}=\frac{1}{2}(E_y^2-E_x^2-E_z^2)+\frac{1}{2}(H_y^2-H_x^2-H_z^2)$, $T_{yz}=E_yE_z+H_yH_z$, $T_{zz}=\frac{1}{2}(E_z^2-E_x^2-E_y^2)+\frac{1}{2}(H_z^2-H_y^2-H_x^2)$, где T_x, T_y, T_z – компоненты вектора Умова–Пойтинга	$T^{ik}=F_{\sigma}^{i}F^{\sigma k}-\frac{1}{4}\delta^{ik}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$	$t_{\lambda\mu\dot{\nu}\dot{\rho}}=\frac{1}{4}f_{\lambda\mu}f_{\dot{\nu}\dot{\rho}}$

щим образом: «Развитие представлений о том, как нужно математически описывать классическое (не квантованное!) электромагнитное поле в вакууме, можно схематически разбить на три этапа (я говорю лишь о периоде после Максвелла).

Первый этап. Поле Максвелла — это совокупность двух полей в пространстве, меняющихся со временем. Первое — поле векторов **E** (электрическое), второе — поле аксиальных векторов **B** (магнитного потока).

Второй этап. Поле Максвелла — это замкнутая внешняя вторая форма F в пространстве-времени.

Третий этап. Поле Максвелла — это связность на векторном расслоении над пространством-временем; связность, для которой F является формой кривизны».

Первый этап был рассмотрен в пп. 3.2 и 3.3. Обсуждаемая здесь модель соответствует второму этапу.

Напомним предварительно некоторые математические определения и результаты исчислений кососимметрических тензоров и внешних форм [55, 116, 118, 119, 120], необходимых при анализе модели электромагнитного поля Максвелла.

Согласно [118, с. 157] кососимметрическим тензором типа $(0, \kappa)$ называется тензор $T_{i_1 \dots i_\kappa}$, такой, что выполняется соотношение

$$T_{\sigma(i_1 \dots i_k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, T_{i_1 \dots i_k}. \tag{3.35}$$

В (3.35) знак перестановок $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$. Отметим, что данное определение не зависит от выбора системы координат, так как операция перестановки индексов носит тензорный характер.

Кососимметрическому тензору $T_{i_1 \dots i_\kappa}$ соответствует внешняя дифференциальная форма, которая по определению имеет вид

$$T_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \tag{3.36}$$

где выражение $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ кососимметрично относительно перестановки индексов, т. е.

$$dx^{\sigma(i_1} \wedge \dots dx^{i_k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Нетрудно заметить, что операция внешнего умножения $\wedge$ обобщает операцию векторного произведения на случай умножения векторов и антисимметричных тензоров произвольного ранга таким образом, что после умножения получаются снова антисимметричные тензоры.

Определим теперь компоненты $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ кососимметрического тензора типа $(0, n)$ $T_{i_1 \dots i_n}$ в n-мерном пространстве

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1, \text{ при } \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = +1; \\ -1 \text{ при } \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = -1. \end{cases} \tag{3.37}$$

В приведенных обозначениях

$$T_{i_1 \dots i_n} = T_{12 \dots n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}.$$

Определим оператор «$*$» (звездочка Ходжа), который вводится на дифференциальных формах любого многообразия с метрикой. Оператор Ходжа в

общем случае представляет собой комбинацию операторов, сопряженных к операторам (левого и правого) $\wedge$ внешнего умножения — левого внутреннего $\lrcorner$ и правого внутреннего $\llcorner$ умножения [116]. Операции внутреннего умножения рассматриваются как аналоги частного дифференцирования по i-й переменной во внешней алгебре. Эти операции определяются через понятие операции спаривания $\langle|\rangle$ пространств $\bigwedge^p(V)$ и $\bigwedge^p(V^*)$ внешних p-форм [116] в виде

$$\langle x \mid u \lrcorner y^* \rangle = \langle u \wedge x \mid y^* \rangle; \quad \langle x \llcorner u^* \mid y^* \rangle = \langle x \mid u^* \wedge y^* \rangle \tag{3.38}$$

для всех $u, x \in \bigwedge(V)$, $y^* \in \bigwedge(V^*)$.

Пример 2. Можно показать [116], что

$$u_1 \lrcorner (u_2 \wedge y^*) = (u_2 \wedge u_1) \lrcorner y^*; \qquad e_i \lrcorner (e_j \lrcorner y^*) = -e_j \lrcorner (e_i \lrcorner y^*);$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge (e_i \lrcorner y^*) = r y^*, \qquad y^* \in \bigwedge^r(V^*);$$

$$x \lrcorner (y_1^* \wedge y_2^*) = (x \lrcorner y_1^*) \wedge y_2^* + (-1)^p y_1^* \wedge (x \lrcorner y_2^*), \tag{3.39}$$

$$x \in V; \qquad y_1^* \in \bigwedge^p(V^*); \qquad y_2^* \in \bigwedge^q(V^*).$$

С операцией внутреннего умножения на языке дифференциальной геометрии непосредственно связано линейное отображение $e^{\perp}: \bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{n-k}(V^*)$, которое определяется в виде

$$e^{\perp}(x) = x \lrcorner e^*. \tag{3.40}$$

Это отображение является изоморфизмом $\bigwedge^k(V)$ на $\bigwedge^{n-k}(V^*)$, переводящее разложимые элементы в разложимые (см. теорему 4.5 [116]).

Таким образом, выбор e определяет по (3.40) изоморфизм $\bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{n-k}(V^*)$, а скалярное произведение определяет изоморфизм $\bigwedge^{n-k}(V^*)$ на $\bigwedge^{n-k}(V)$. Комбинация этих изоморфизмов приводит к оператору Ходжа

$$*\bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{n-k}(V). \tag{3.41}$$

В нашем случае в присутствии метрики g_{ij} оператор $*$ отождествляет по (3.41) кососимметрические тензоры типа $(0, k)$ и $(0, n-k)$. Пусть $g = \det(g_{ij})$. Если $T_{i_1 \dots i_k}$ — кососимметрический тензор типа $(0, k)$, то $*T$ означает кососимметрический тензор типа $(0, n-k)$, т. е. имеем

$$(*T)_{i_{k+1} \dots i_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \dots i_n} T^{i_1 \dots i_k}, \tag{3.42}$$

где $T^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 l_1} \dots g^{i_k l_k} T_{l_1 \dots l_k}$ — соответствующий тензору $T_{i_1 \dots i_k}$ тензор типа $(k, 0)$; $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ определяется по (3.37). Так как $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ в n-мерном пространстве является тензором относительно замены координат с положительным якобианом, то $*T$ также будет тензором относительно таких замен. Из (3.42) непосредственно видна кососимметричность тензора $*T$.

Имеет место соотношение

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) T. \tag{3.43}$$

Следует отметить, что квадрат оператора Ходжа $*$ равен -1.

Пример 3 [118]. Действие оператора $*$ в 3-мерном евклидовом пространстве (x, y, z) имеет вид

$$*dx = dy \wedge dz; \qquad *dy = -dx \wedge dz; \qquad *dz = dx \wedge dy.$$

В 4-мерном псевдоевклидовом пространстве имеем

$$*(dx\wedge dy)=-cdz\wedge dt, \quad *(dx\wedge cdt)=dy\wedge dz;$$
$$*(dx\wedge dz)=cdy\wedge dt; \quad *(dy\wedge cdt)=-dx\wedge dz;$$
$$*(dy\wedge dz)=-cdx\wedge dt; \quad *(dz\wedge cdt)=dx\wedge dy.$$

Пример 4. Любой ковектор (первая форма) имеет вид

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz.$$

Тогда

$$*\,\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy; \quad *\,(*)\omega=\omega.$$

Если f — скаляр, то $*\,f=fdx\wedge dy\wedge dz$ является формой третьего ранга, а $*\,(fdx\wedge dy\wedge dz)=f$.

Пример 5. Допустим, что

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p} T_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p};$$

$$\omega_2=\sum_{j_1<\ldots<j_p} S_{j_1\ldots j_p}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p};$$

$$\{\omega_1,\omega_2\}=\frac{1}{p!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_pj_p}T_{i_1\ldots i_p}S_{j_1\ldots j_p}.$$

Тогда

$$\omega_1\wedge *\omega_2=\{\omega_1,\omega_2\}\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Векторы электрического **E** и магнитного **H** полей, как следует из п. 3.3, имеют вид

$$E_{0\alpha}=F_{0\alpha}, \quad (\alpha=1,2,3); \quad H^1=F_{23}, H^2=F_{31}, H^3=F_{12}. \tag{3.44}$$

Матрица F_{ik} имеет вид (3.7). На языке внешних дифференциальных форм выражения (3.44) принимают компактный вид:

$$F=\sum_{i<j}F_{ij}dx^i\wedge dx^j=E_\alpha dx^0\wedge dx^\alpha+H^1dx^2\wedge dx^3+$$
$$+H^2dx^3\wedge dx^1+H^3dx^1\wedge dx^2. \tag{3.45}$$

Пример 6. Для формы (3.45) имеет место

$$*F=-\sum_{\alpha=1}^{3}H^\alpha dx^0\wedge dx^\alpha+E_1dx^2\wedge dx^3+$$
$$+E_2dx^3\wedge dx^1+E_3dx^1\wedge dx^2. \tag{3.46}$$

Оператор $*$ инвариантен относительно преобразований неоднородной группы Лоренца. В частности, эти преобразования, как отмечалось, сохраняют инвариантной квадратичную форму $\langle F, F\rangle$, которая в терминах внешних форм записывается в следующем виде:

$$\langle F,F\rangle=-*(F\wedge *+iF\wedge F)=-1/2(F_{ik}F^{ki}+i\varepsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl}). \tag{3.47}$$

Форма (3.47) в координатах $z^\alpha = E_\alpha + iH^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ принимает вид

$$\langle F, F\rangle = -\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2 + 2i\langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\rangle = (\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (z^\alpha)^2. \quad (3.48)$$

Из (3.48) следует, таким образом, что форма (3.47) является скалярным квадратом комплексного 3-вектора $\boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ [118, с. 188]. Величины $\mathrm{Re}\langle F, F\rangle = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2$, $1/2\,\mathrm{Im}\langle F, F\rangle = \langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\rangle$, как отмечалось в п. 3.3, являются инвариантами электромагнитного поля.

В общем случае, если $T_{i_1 \ldots i_k}$ — кососимметрический по всем индексам тензор в n-мерном пространстве с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, $i_q = (1, \ldots, n)$, то его градиентом $(dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}}$, как известно (см. Приложение 1), называется кососимметрический тензор типа $(0, k+1)$ с компонентами

$$(dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^q \frac{\partial T_{j_1 \ldots j_{q-1} j_{q+1} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}}. \quad (3.49)$$

Пример 7. Допустим, что $T = (T_i)$ — ковектор. Тогда

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} = -(dT)_{ji}. \quad (3.50)$$

Таким образом, $(dT)_{ij}$ — ротор ковекторного поля — кососимметрический тензор типа (0,2). Если $n = 3$ (пространство евклидово), то тензору (3.50) сопоставляют вектор $\eta^k = *(dT)$ или $\eta^i = 1/2\varepsilon^{ijk}(dT)_{jk}$.

Тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ соответствует форма (3.36)

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.51)$$

Дифференцирование внешней формы (3.51) (форма $d\omega$ степени $k+1$) определяется в виде

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.52)$$

Имеют место следующие важные соотношения:

$$d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_{k+1}} (dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}; \quad (3.53)$$

$$d(dT) = 0, \qquad d(d\omega) = 0; \quad (3.54)$$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \quad (3.55)$$

Можно определить в присутствии метрики g_{ij} дифференциальную операцию на формах, понижающую ранг формы на единицу (дивергенция кососимметрического тензора), которую при-

нято обозначать через δ, т. е.

$$\delta = *^{-1} d *. \tag{3.56}$$

В общем случае, когда задана ограниченная область U с гладкой границей в пространстве с римановой метрикой g_{ij}, можно задать пространство всех гладких p-форм $\Omega_U{}^p$, которые обращаются в нуль вне области U. На пространстве $\Omega_U{}^p$ можно задать скалярное произведение

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_U \omega_1 \wedge * \omega_2.$$

Пространство $\Omega_U{}^p$ со скалярным произведением $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ евклидово, оператор $*$ ортогонален ($\langle *\omega_1, *\omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$), операторы d и $\delta = (-1)^{n_p+n+1} * d *$ сопряжены ($\langle d\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \delta\omega_2 \rangle$), квадрат оператора δ равен 0 ($\delta\delta = 0$), оператор $\Delta = d\delta + \delta d$ самосопряжен ($\langle \Delta\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \Delta\omega_2 \rangle$; $\Delta d = d\Delta$, $\Delta\delta = \delta\Delta$, $\Delta * = *\Delta$).

Пример 8. Допустим, что $\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$. Так как операция (3.56) понижает ранг формы на 1, то форма $\delta\omega$ будет формой нулевого ранга

$$\delta(T) = \operatorname{div} T = \partial T_i / \partial x_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

В свете изложенного уравнения Максвелла могут быть записаны следующим образом [116, 118, 119]. Введем согласно (3.45) внешнюю форму второго ранга вида

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta. \tag{3.57}$$

Тогда первая система уравнений Максвелла (3.8), имеющая в рамках принятых обозначений вид

$$(dF)_{ijk} = \left(\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} \right) = 0, \tag{3.58}$$

запишется на языке дифференциала внешней формы согласно (3.57) и (3.58) следующим образом:

$$dF = 0. \tag{3.59}$$

Вторая пара уравнений Максвелла (3.9), как отмечалось, требует уже введения псевдоевклидовой метрики и с учетом действия оператора (3.56) записывается через (3.57) в виде

$$\delta F = * d * F = 4\pi j_i / c. \tag{3.60}$$

Отметим (используя свойства (3.54) и (3.50)), что уравнения (3.59) удовлетворяются тождественно, если

$$F = dA, \text{ т. е. } F_{\sigma\beta} = \partial A_\beta / \partial x^\alpha - \partial A_\alpha / \partial x^\beta, \tag{3.61}$$

и получаем как следствие решение (3.13), принимаемое ранее в п. 3.3 в виде предположения.

Таким образом, уравнения (3.59), (3.60) представляют собой искомую бескоординатную запись уравнений Максвелла в

произвольном многообразии при произвольном выборе координатных систем [119].

Согласно [118, 119], интегрирование на произвольном многообразии, если оно применяется к произвольным тензорам, не является вполне однозначной и определенной операцией. Интегрирование однозначно и может быть приведено к скалярной, не зависящей от системы координат величине, если оно применяется к p-форме на p-мерном пространстве.

В общем случае для любой внешней дифференциальной формы T типа (3.51) с гладкими коэффициентами $T_{i_1 \ldots i_{k-1}}$, любой гладкой поверхности $x^i(z^1, \ldots, z^k)$, ограниченной на ней области U с гладкой границей Γ, состоящей из одного куска, имеет место обобщенная формула Стокса [118, теорема 3, с. 239]

$$\pm \int_{\Gamma} T = \int_{U} dT. \tag{3.62}$$

Пример 9. Если X^i — векторное поле в 4-мерном пространстве Минковского, то интеграл этого поля по 3-мерной гиперповерхности определяется как интеграл от внешней формы 3-го ранга $X^i dS_i$, где $dS_i = 1/6 \cdot \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{jkli} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$; ε_{jkli} — антисимметричный тензор 4-го ранга. Из общей формулы Стокса (3.62) следует

$$\int_{\partial V} X^i dS_i = \int_{V} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} dV,$$

где ∂V — граница для V.

Пример 10 [118]. Пусть задано 3-мерное пространство (x^1, x^2, x^3). Если $k=3$, U — область, Γ — граница области U, то из (3.62) с учетом (3.57) следует

$$\iint_{\Gamma} \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iiint_{U} \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Для евклидового пространства, если n — единичный вектор нормали к поверхности, имеем в окончательном виде формулу Остроградского—Гаусса

$$\iint_{\Gamma} \langle T, n \rangle \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge dz^2 = \iint_{\Gamma} \langle T, n \rangle\, d\sigma = \iiint_{U} (\operatorname{div} T)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

где z^1, z^2 — координаты на поверхности; $d\sigma = \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge dz^2$ — элемент площади на этой поверхности.

Если $k=2$, U — область на поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i=1, 2, 3$, Γ — граница этой области (в этом случае кривая). Тогда

$$\oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha = \iint_U \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) dx^2 \wedge dx^3\right].$$

Для евклидового пространства имеем формулу Стокса

$$\oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha = \iint_U \langle \operatorname{rot} T, n\rangle \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge dz^2,$$

где $\operatorname{rot} T$ определяется по (3.50).

В случае 4-мерного псевдоевклидового пространства для электромагнитного поля Максвелла первая пара $dF = d(\frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j) = 0$ и 3-мерной евклидовой формы (3.6) имеем (см. примеры 9 и 10)

$$\iiint_U \operatorname{div} H dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle H, n\rangle d\sigma = 0;$$

$$\iint_U \langle \operatorname{rot} E, n\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha;$$

$$-\iint_U \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, n \right\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha.$$

Для второй пары уравнений Максвелла (3.60) и (3.6)

$$\iiint_U 4\pi\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_\Gamma \langle E, n\rangle d\sigma;$$

$$-\frac{1}{c}\iint_U \frac{\partial E}{\partial t} n d\sigma + \iint_U \frac{4\pi}{c} jn d\sigma = \oint_\Gamma H_\alpha dx^\alpha.$$

Таким образом, получены законы сохранения, описанные в п. 3.2 и 3.3.

В [121] по поводу 2 и 3 этапов подчеркивалось следующее: «Инвариантная запись уравнений Максвелла имеет вид $dF=0$, $d*F=0$ (в вакууме) или $d*F=J$, где J — 3-форма аксиального тока, определяемая движением зарядов. Оператор Ходжа «звездочка» определен на дифференциальных формах любого многообразия с метрикой. Действительно, на пространстве таких форм имеется два скалярных произведения: одно унаследовано от метрики, другое получается в результате внешнего умножения и деления на форму объема. Оператор Ходжа, примененный ко второму аргументу, переводит одно из этих скалярных произведений в другое. Метрика на пространстве времени в обычном изложении является фундаментальной структурой физики. В специальной теории относительности она определяет главную группу симметрии мира, а в общей ее искривление интерпретируется как гравитация. Запись в виде $dF=0$, $d*F=J$ годится и для неплоского пространства-времени.

Осознание того, что форму F следует считать формой кривизны связности, сильно затянулось. Отчасти причиной этого можно считать запоздалое математическое оформление идеи связности на расслоении, «внешнем» по отношению

к базисному многообразию, в отличии от римановой связности на касательном расслоении. С точки зрения физики, само расслоение, на котором электромагнитное поле действует как связность, появилось в работах Дирака, но оно было введено вместе с глобальной тривиализацией над пространством Минковского. (Отсутствие языка для описания нетривиальных расслоений над пространством Минковского без мировой линии монополя Дирака привело к длительной путанице относительно смысла «поверхностей разрыва фазового множителя».) Герман Вейль еще в 1918 г. (прим. авт.: [122]) высказал идею о том, что электромагнитное поле есть связность, но думал, что параллельный перенос в поле меняет масштаб, против чего возражал Эйнштейн. (См. подробное обсуждение в очень интересной статье С. Стернберга (Прим. авт.: см. [116]).

Спрямляя все извивы исторического развития как математики, так и физики, сейчас положение дел можно представить себе так. Математически будем определять связность в расслоении $E \to M$ как способ поднимать любую кривую в M до кривой в E, если задан подъем ее начальной точки: это и есть параллельный перенос. Обычно это определение дополняется двумя условиями: а) задаются подъемы лишь касательных векторов, линейные по этим векторам, а общий параллельный перенос определяется интегрированием; б) рассматриваются лишь такие связности, параллельный перенос относительно которых сохраняет некоторую структуру в слоях, скажем, векторного пространства или главного однородного пространства над группой Ли, или метрику, или все вместе.

Представим себе теперь, что M есть пространство-время, а в нем задана мировая линия локализованной физической системы, у которой есть внутренние степени свободы. Если их совокупность не меняется со временем, то можно вообразить расслоение $E \to M$, типичным слоем которого будет это пространство внутренних степеней свободы. Историей системы будет подъем ее мировой линии из M в E: этот подъем учитывает не только ее движение в пространстве времени, но и эволюцию внутреннего состояния. Если эта эволюция детерминирована, то ее закон и есть в точности связность, заданная своими параллельными переносами вдоль всех физически допустимых мировых линий системы в M, скажем, времени-подобных кривых. Физически записывают оператор параллельного переноса в виде «упорядоченного экспоненциального интеграла» $T\exp \int A_\mu dx^\mu$, где $A_\mu dx^\mu$ — первая форма связности, описывающая инфинитезимальный параллельный перенос вдоль касательных векторов.

Кривизна связности измеряет отклонение оператора параллельного переноса от тождественного вдоль маленьких петель. Если кривизна нетривиальна, то перенести параллельно начальное состояние нелокализованной системы (данные Коши) невозможно. Вместо этого применяется вариационный принцип, требующий, чтобы отклонение сечения «мировая история системы» от горизонтального минимизировало подходящий функционал. Аналогичный функционал, например проинтегрированный квадрат модуля кривизны связности, управляет эволюцией самой связности. Так, в общих чертах, описываются два фундаментальных классических поля — электромагнитное и гравитационное — и их взаимодействие с материей».

Реализация намеченной программы описания третьего этапа геометрического представления электромагнитного и гравитационного полей и связь с другими моделями описания (на-

пример, в рамках теорий калибровочных и киральных полей [116, 118, 119, 121, 123—126] и др.).

В связи с отмеченным остановимся на традиционной модели теории гравитационного поля (ОТО) [7].

3.6. Гравитационное поле. Принцип эквивалентности и риманов характер пространственно-временного континуума

3.6.1. Прежде всего необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что отношение масс двух тел можно определить, во-первых, как обратное отношение ускорений этих масс, вызванное одной и той же ускоряющей силой, и, во-вторых, как отношение сил, действующих на эти массы в одном и том же гравитационном поле.

Вообще говоря, ниоткуда не следует, что отношение масс, найденных первым способом (отношение инертных масс), должно равняться отношению масс, найденных вторым способом (отношение гравитационных масс). Тем не менее весьма точные эксперименты Дикке—Этвеша и Брагинского [127—133] показали, что эти отношения равны друг другу. Из этих и других экспериментов (см. ниже п. 3.21.1) следует равенство инертных и гравитационных масс.

Если закон движения Ньютона записать в виде

$$(\textit{инертная масса}) \times (\textit{ускорение}) = \left[\begin{array}{l}\textit{напряженность} \\ \textit{гравитационного} \\ \textit{поля}\end{array}\right] \times [(\textit{гравитационная масса})], \tag{3.63}$$

то, очевидно, только в случае равенства инертной и гравитационной масс ускорение в гравитационном поле не будет зависеть от природы рассматриваемого тела.

Рассмотрим теперь инерциальную систему отсчета S, относительно которой несколько тел, достаточно удаленных друг от друга и от остальных масс, движутся прямолинейно и равномерно. Очевидно, эти тела будут обладать равными по величине и направлению ускорениями по отношению к другой системе отсчета S', которая сама движется по отношению к системе отсчета S равномерно ускоренно.

Однако ничто не мешает считать систему отсчета S' «покоящейся», а ускоренное движение тел по отношению к этой системе объяснить действием на них однородного гравитационного поля.

Если временно оставить в стороне вопрос о «причине», создающей указанное гравитационное поле, то ничто не мешает считать обе системы отсчета S и S' физически равноправными.

Это представление указывает на единство природы инерции и тяготения [43].

Из изложенных выше соображений вытекает также *принцип эквивалентности гравитационных и инерционных сил*, являющийся фундаментом релятивистской теории тяготения [7, 43, 88].

Рассмотрим теперь неинерциальную систему отсчета S', ось которой совпадает с осью z инерциальной системы отсчета S. Допустим далее, что система S' вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью. В таком случае, для всякой окружности, изображенной на координатной поверхности x', y' в системе отсчета S' и имеющей центр в начале координат этой системы отсчета, должно иметь место неравенство [43]

$$(U/D) < \pi, \tag{3.64}$$

здесь U — длина упомянутой окружности и D — ее диаметр.

Убедиться в справедливости неравенства (3.64) можно, если представить себе, что вдоль рассматриваемой окружности расположены маленькие стерженьки, которые должны испытывать лоренцево сокращение своих длин, в то время как стерженьки, расположенные вдоль диаметра, такого сокращения испытывать не будут. Конечно, при этом предполагается, что имеющееся в системе S' поле инерционных (или гравитационных) сил не компенсирует полностью эффект лоренцева сокращения длин [43].

Точно таким же образом можно убедиться в том, что часы, расположенные на рассматриваемой окружности, будут идти медленней, чем часы, расположенные в ее центре.

Итак, *введение неинерциальной системы отсчета приводит к представлению о неевклидовом характере пространственно-подобных координатных поверхностей указанной системы отсчета.*

Заметим, однако, что хотя координатные поверхности неинерциальных систем отсчета в псевдоевклидовом пространстве-времени носят неевклидов характер, в целом пространственно-временной континуум сохраняет псевдоевклидов характер, поскольку никакие преобразования координат не могут изменить метрические свойства этого континуума.

Вместе с тем реальные гравитационные поля не могут быть в целом устранены (или скомпенсированы) никакими неинерциальными системами отсчета. Сделать это можно, вообще говоря, только локально, а именно: гравитационное поле исчезает в локальной системе отсчета, связанной со «свободно падающим» без вращения в этом поле материальным телом достаточно малой массы.

Изложенные причины приводят к необходимости введения *неевклидовой* метрики в реальном пространственно-временном континууме при наличии гравитационного поля.

Сделаем еще несколько замечаний по этому поводу. В гравитационном поле не может быть введена глобальная инерциальная система отсчета. В этом поле в отличие от электромагнитного поля могут быть введены только локаль-

ные инерциальные системы отсчета, которые ускоренно движутся друг относительно друга, если только расстояние между ними не бесконечно мало. Таким образом, в гравитационном поле имеет место только локальная лоренц-инвариантность. Исходя из этого, а также из других хорошо известных соображений и принципа эквивалентности, А. Эйнштейн сформулировал идею о кривизне пространства-времени.

Здесь следует обратить внимание на то существенное обстоятельство, что локальная инерциальная система отсчета в гравитационном поле может быть реализована в виде достаточно малой по размерам системы отсчета, жестко связанной с небольшим по размерам свободно падающим в этом поле телом (например, со спутником), при условии, что это тело не совершает вращательного движения. Подчеркнем (и это очень существенно), что в такой локальной инерциальной системе отсчета ось времени должна быть ортогональна пространственно-подобной координатной гиперповерхности этой системы отсчета [2].

В 1956 г. Р. Утияма [136], исходя из локальной лоренц-инвариантности в гравитационном поле, т. е. из зависимости параметров группы Лоренца от криволинейных координат, показал, что необходимым следствием этого обстоятельства является кривизна пространства-времени. Эта работа имеет большое значение.

К сказанному следует добавить, что последовательная теория гравитации должна носить нелинейный характер. В самом деле, поле двух тел на большом расстоянии меньше суммы полей каждого тела в отдельности из-за гравитационного дефекта массы. Отсюда следует неизбежность нелинейного характера теории гравитации [43, 7].

Всем этим требованиям удовлетворяет теория гравитационного поля Эйнштейна.

3.6.2. Свободно падающая в гравитационном поле частица достаточно малой массы движется по геодезической линии искривленного 4-мерного пространственно-временного континуума. Здесь также имеет место полная аналогия с классической механикой Ньютона, согласно которой материальная точка, находящаяся на поверхности, будет в результате начального импульса двигаться по геодезической этой поверхности (разумеется, в отсутствие каких-либо других внешних сил).

Так, планеты, движущиеся по своим орбитам вокруг Солнца в гравитационном поле Солнца, по существу движутся по инерции, т. е. свободно падают в искривленном 4-мерном пространственно-подобном континууме. Здесь, однако, может возникнуть вопрос, почему при очень тщательных измерениях положения планет в Солнечной системе никаких отклонений от

---

[2] Можно представить в гравитационном поле локальную систему отсчета, в которой ось времени не будет ортогональной пространственно-подобной гиперповерхности системе отсчета, но такая локальная система отсчета не будет инерциальной (то же самое имеет место и в псевдоевклидовом пространстве СТО). Здесь имеет место аналогия с двумерной неевклидовой поверхностью. На такой поверхности (например, на поверхности шара или эллипсоида) также можно ввести только локальную декартову систему отсчета, но нельзя ввести подобную систему глобально.

евклидова характера 3-мерного пространства не было обнаружено? На этот вопрос необходимо дать исчерпывающий ответ.

Основная метрическая форма псевдоевклидова пространства (т. е. в отсутствии гравитации) имеет, как известно, вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}). \tag{3.65}$$

Поскольку пространственно-подобная гиперповерхность в пределах Солнечной системы должна носить (с большим приближением) евклидов характер, то основную метрическую форму пространственно-временного континуума в указанной области можно представить только следующим образом:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)dt^2 - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{3.66}$$

причем $[2\Phi/c^2] \ll 1$, поскольку возможные отклонения от псевдоевклидова пространства в пределах Солнечной системы должны быть весьма малыми.

В поле тяготения, описываемого формулой (3.66), материальная точка достаточно малой массы движется по геодезической пространственно-временного континуума, т. е. для действительной траектории должна обращаться в нуль первая вариация интеграла

$$\delta\int_{s_0}^{s_1} ds = 0. \tag{3.67}$$

Учитывая выражение (3.66), можно уравнение (3.67) записать в виде (С. Е. Дьяченко [137])

$$\delta\int_{s_0}^{s_1} ds = \delta c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1 - \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{c^2dt^2}}\,dt =$$

$$= \delta c\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\Phi}{c^2}}\,dt = 0, \tag{3.68}$$

здесь $v^2 = (dx^1/dt)^2 + (dx^2/dt)^2 + (dx^3/dt)^2$ — скорость движения материальной точки.

Учитывая, что $[2\Phi/c^2] \ll 1$, можно написать

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2}. \tag{3.69}$$

Подставив это разложение в интеграл (3.68), получим

$$\delta\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_1}\left(c^2 - \frac{1}{2}v^2 - \Phi\right)dt = 0. \tag{3.70}$$

Итак, в первом приближении закон движения материальной точки по геодезической пространственно-временного континуу-

ума сводится к принципу Гамильтона — Остроградского, если только рассматривать функцию Φ как потенциал поля тяготения в его ньютоновом смысле. Приняв это толкование функции Φ, можно в качестве второго приближения принять уравнение (3.68).

Исходя из (3.68), получим следующее уравнение движения материальной точки:

$$dmv/dt = m \operatorname{grad} \Phi, \tag{3.71}$$

где

$$m = m_0(1 - v^2/c^2 - 2\Phi/c^2)^{-1/2}, \tag{3.72}$$

здесь m_0 — масса покоя материальной точки.

Уравнения (3.71), (3.72) были получены Т. Леви-Чивита.

Итак, видим, что *несмотря на весьма малые отклонения от псевдоевклидова характера пространственно-временного континуума, геодезические в этом пространстве испытывают существенные изменения: их проекции на пространственно-подобные гиперповерхности превращаются вместо прямых линий в эллипсы или гиперболы.*

Следовательно, *поток геодезических в псевдоевклидовом пространстве весьма чувствителен к малым отклонениям от псевдоевклидовости. В этой своеобразной неустойчивости заключается вся суть дела.* Ничего подобного в евклидовых или римановых пространствах с положительно-определенной метрической квадратичной формой не имеет места.

В заключение отметим, что сам принцип Гамильтона — Остроградского является, в сущности, принципом геодезической для слабых гравитационных полей.

3.7. О криволинейных координатах и геометрических характеристиках римановых пространств

В данном разделе кратко напомним необходимые сведения тензорного исчисления в криволинейных координатах, предполагая, что читатель знаком с его основами. Более подробное изложение затрагиваемых вопросов дано в приложении 1 (см. также [54—58, 106, 116—120] и др.).

3.7.1. Отметим в первую очередь следующее важнейшее обстоятельство. В криволинейных координатах полностью сохраняются определения тензоров различных ко- и контравариантных валентностей, а также различные операции над ними, вводимые при изложении элементов тензорной алгебры в псевдоевклидовом пространстве (см. гл. 2).

Возникает следующий фундаментальный вопрос. Какими свойствами должны обладать компоненты метрического тензора g_{ik}, характеризующего метрическую систему отсчета, чтобы

основная фундаментальная форма

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \qquad (3.73)$$

могла бы быть путем преобразования системы отсчета переведена в форму

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2})? \qquad (3.74$$

Другими словами, какими свойствами должны обладать компоненты метрического тензора g_{ik}, чтобы характеризуемое ими пространство было плоским?

Совершенно очевидно, что если не существует преобразования координат, переводящего форму (3.73) в форму (3.74), то пространство не может быть плоским, т. е. оно должно быть искривленным, или, как говорят, носить риманов характер (по имени известного немецкого математика Бернгарда Римана, впервые исследовавшего поставленный выше вопрос).

Здесь не будем рассматривать подробно решение этого вопроса Б. Риманом (подробности см. Приложение 1, п. П1.14), а приведем сразу полученный им результат. Введем так называемый тензор кривизны Римана—Кристоффеля (см. Приложение 1, формула (П1.108))

$$R^i_{skp} = \frac{\partial}{\partial x^p}\Gamma^i_{sk} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{sp} + \Gamma^r_{sp}\Gamma^i_{rk} - \Gamma^r_{ps}\Gamma^i_{rk} \qquad (i, s, k, p = 0, 1, 2, 3). \qquad (3.75$$

Здесь функции $\Gamma^i{}_{ps}$ называются символами Кристоффеля и имеют вид (см. Приложение 1, формула (П1.79))

$$\Gamma^i_{pk} = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s}\right). \qquad (3.76)$$

Все указанные здесь индексы могут принимать значения 0, 1, 2, 3.

Ответ Б. Римана на поставленный выше вопрос заключается в следующем: если все компоненты тензора кривизны Римана—Кристоффеля (3.75), образованные с помощью метрического тензора g_{ik} тождественно равны нулю, то существует преобразование координат, переводящее форму (3.73) в форму (3.74), т. е. пространство будет плоским. Если же хотя бы одна из компонент тензора Римана—Кристоффеля отлична от нуля, то указанного преобразования координат не существует и пространство будет искривленным или римановым.

Введем теперь еще некоторые обозначения (см. Приложение 1), а именно тензор Эйнштейна

$$R_{ik} = g_{nm}R^{um}_{ik} \qquad (i, k, n, m = 0, 1, 2, 3) \qquad (3.77)$$

и скалярную кривизну пространства

$$R = g_{ik}R^{ik} = g^{ik}R_{ik}. \qquad (3.78)$$

Еще раз напомним, что во всех приведенных формулах по всем

одинаковым индексам, записанным сверху и снизу, проводится суммирование.

3.7.2. В Приложении 1 (п. П1.6 и П1.16) будут определены важные для ОТО операции ковариантного дифференцирования и параллельного переноса тензоров.

В частности, из формул (П1.91) и (П1.93) следует

$$T^i_{;j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k; \qquad T_{i;j} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} T_k.$$

В приведенных выражениях символы Кристоффеля Γ^i_{kj} определяются по (3.76) и часто в дифференциальной геометрии называется *связностью*, а операцию ковариантного дифференцирования — *дифференциально-геометрической связностью*. Отметим, что символы Γ^i_{kj} преобразуются как тензор только при линейных или аффинных преобразованиях.

Выражение

$$T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]}, \tag{3.79}$$

полученное операцией альтернирования (см. Приложение 1), образует тензор и называется *тензором кручения*.

Связность Γ^i_{kj} называется симметричной, если тензор кручения (3.79) тождественно равен нулю, т. е. $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$.

Отметим, что понятие связности и понятие римановой метрики не тождественны между собой, это две независимые структуры в рассматриваемой области пространства [118, с. 267]. Но существует способ сопоставления метрике связности. Так, связность Γ^k_{ij} называется *согласованной с метрикой* g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна нулю, т. е.

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0 \qquad (k, i, j = 1, \ldots, n). \tag{3.80}$$

Согласно теореме [118, с. 268], если метрика g_{ij} невырождена, то существует и единственная связность, симметричная и согласованная с этой метрикой g_{ij}, которая задается именно формулой (3.76). Таким образом, существует определенная связь между связностью (или способом ковариантного дифференцирования) и римановой геометрии g_{ij}, т. е. любая риманова геометрия порождает симметричный определенный способ дифференцирования тензоров, при котором сама метрика считается постоянной [118, с. 270].

В общем случае для любого вектора T^i справедлива формула

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T_i = - R^i_{qkl} T^q + T^p_{kl} \frac{\partial T_i}{\partial x^p}, \tag{3.81}$$

где тензор Римана R^i_{qkl} определяется по (3.75) и тензор кручения T^p_{kl} — по (3.79).

Для произвольных векторных полей ξ, η, ζ, если обозначить

$$[T(\xi, \eta)]^i = T^i_{kl} \xi^k \eta^l; \quad [R(\xi, \eta)\zeta]^i = R^i_{jkl} \xi^k \eta^l \zeta^j, \tag{3.82}$$

справедливы следующие формулы для кривизны и кручения в инвариантных

обозначениях [118]:

$$T(\xi,\ \eta)=\nabla_\xi\eta-\nabla_\eta\xi-[\xi,\ \eta];$$

$$R(\xi,\ \eta)\zeta=(\nabla_\eta\nabla_\xi-\nabla_\xi\nabla_\eta)\zeta+\nabla_{[\xi,\ \eta]}\zeta, \tag{3.83}$$

где $[\xi,\ \eta]$ — коммутатор векторных полей определяется, в свою очередь, через производную Ли тензорного типа $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ (типа p, q)) вдоль векторного поля ξ следующим образом.

Допустим, что $\xi=(\xi^i)=\dfrac{d}{dt}(F_t{}^i)\,|_{t=0}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — векторное поле (поле скоростей); $F_t{}^i$ — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов; $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ — тензор типа $(p,\ q)$ (см. подробнее Приложение 1, п. П1.17). В силу того, что отображение $F_t{}^i$ взаимно однозначно определяет поле ξ^i, однозначно определен и закон переноса тензора от координаты $x^i(t)$ к $x_0{}^i$ [118, с. 196]:

$$(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=T^{l_1\ldots l_p}_{k_1\ldots k_q}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_0^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{k_q}}{\partial x_0^{j_q}}\frac{\partial x_0^{i_1}}{\partial x^{l_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}_0}{\partial x^{l_p}}. \tag{3.84}$$

Выражение

$$L_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\left[\frac{d}{dt}(F_tT)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right]_{t=0} \tag{3.85}$$

по определению измеряет скорость изменения тензора типа $(p,\ q)$ при деформации пространства, определяемое отображение F_t и называется *производной Ли* тензорного типа $(p,\ q)$ вдоль векторного поля ξ.

Пример 1. Для скаляра f

$$L_\xi f=\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=\partial_\xi f, \tag{3.86}$$

т. е. получаем формулу для производной функции f по направлению ξ. Если $L_\xi f=\partial_\xi f=0$, то говорят, что функция f является интегралом поля ξ, т. е. уравнения $\dot{x}^i=\xi^i(x^1,\ \ldots,\ x^n)$.

Пример 2. Для вектора (тензора типа (1, 0)) $\eta=(\eta^i)$

$$L_\xi\eta^i=\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}, \tag{3.87}$$

т. е. $L_\xi\eta=-L_\eta\xi$.

Пример 3. Допустим, что оператор $L_\xi\eta$ действует на функцию f. Тогда

$$\partial_{L_\xi\eta}f=\partial_\xi(\partial_\eta f)-\partial_\eta(\partial_\xi f)=[\partial_\xi,\ \partial_\eta]\,f,$$

где $[\partial_\xi,\ \partial_\eta]$ — коммутатор операторов ∂_ξ и ∂_η является дифференциальным оператором первого порядка, т. е. векторным полем $L_\xi\eta=-L_\eta\xi$.

В силу приведенного векторное поле

$$[\xi,\ \eta]=L_\xi\eta \tag{3.88}$$

называют *коммутатором полей* ξ и η, входящим в (3.83).

Отметим попутно некоторые полезные свойства производной Ли. Так, справедлив аналог формулы Лейбница

$$L_\xi(f\eta)=fL_\xi\eta+\eta(\partial_\xi f).$$

Взятие производной Ли L_ξ перестановочно с операцией взятия дифференциала

$$L_\xi (df) = d (L_\xi f).$$

Пример 4. Для ковектора T_j (тензор типа (0,1)) имеем

$$(L_\xi T)_j = \xi^k \frac{\partial T_j}{\partial x^k} + T_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j};$$

для дифференциала $T_j = \partial f / \partial x^j$

$$(L_\xi T)_j = \xi^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}.$$

Для билинейной формулы g_{ij} (тензор типа (0,2)) имеем

$$L_\xi g_{ij} = \xi^s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \equiv u_{ij},$$

где u_{ij} называют также тензором малых деформаций.

Пример 5. Тензор Римана (3.75) в пространствах с вектором Киллинга ξ^i (см. Приложение 1, п. П1.18) удовлетворяет соотношению

$$L_\xi R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \qquad (3.89$$

Пример 6. Допустим, что заданы две дифференциальные формы ω_1 и ω_2. Тогда

$$L_\xi (\omega_1 \wedge \omega_2) = L_\xi \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_\xi \omega_2.$$

Приведенные соотношения (3.83), (3.88) позволяют получить ряд дополнительных полезных для ОТО соотношений.

Пример 7. Допустим, что задана метрика g_{ij} в области n-мерного пространства. Квадратичную форму $s^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j$ на касательных векторах можно привести в каждой точке к главным осям, причем это приведение будет гладко зависящим от точки (см. Приложение 1). Следовательно, локально можно выбрать n линейно независимых векторных полей $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с таким свойством, что их попарное скалярное произведение [118, с. 277]

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}; \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Так, в ОТО часто выбирают 4-вектор $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где ξ_0 — времени-подобен, (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — пространственно-подобны, который называют *тетрадой*.

Попарные коммутаторы $[\xi_i, \xi_j]$ этих векторных полей разлагаются по тому же базису (см. Приложение 1, п. П1.17)

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k,$$

где c_{ij}^k — коэффициенты разложения.

Введенные понятия для симметричной связности, согласованной с метрикой, приводят к полезным соотношениям

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}(c_{kj}^i + \varepsilon_i \varepsilon_j c_{ik}^j + \varepsilon_{ik} c_{ij}^k),$$

где $\nabla_{\xi_k} \xi_j = \Gamma_{jk}^i \xi_i$.

Таким образом, получили тетрадный формализм ОТО.

3.7.3. Допустим теперь, что заданы ортонормированные векторные поля $X_1, \ldots, X_n$ в n-мерном римановом пространстве; $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — дуальный базис 1-формы: $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (см. подробнее Приложение 1). Введем 1-формы ω_{ij} и 2-формы Ω_{ij}:

$$\omega_{ij} = \Gamma^i_{jk}\omega_k; \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, \tag{3.90}$$

где $\nabla_{X_k} X_j = \Gamma^i_{jk} X_i$; $\langle R(X_k, X_l), X_i \rangle = R_{ijkl}$ (суммирование по дважды повторяющимся индексам).

Согласно (3.90) в обычной дифференциальной геометрии двухиндексные формы являются линейными комбинациями одноиндексных главных форм и соответствуют простейшему варианту внешних форм и уравнений структур (о последних см. подробнее Приложение 1). Как и в п. 3.7.2, коэффициенты Γ^i_{jk} в (3.90) называют коэффициентами связности, а формы $\omega_k{}^i$ — формами связности; при этом в общем случае Γ^i_{jk} не связаны с метрикой и несимметричны; R_{ijkl} — тензор кривизны. По своему физическому смыслу формы ω^i определяют по Картану смещение начала координат $dM = \omega^i e_i$, а формы $\omega_k{}^i$ — изменение базисных векторов (репера) при переходе от одной точки многообразия к другой: $de_i = \omega_i{}^k de_k$. Например, для ортогонального базиса в 4-мерном римановом пространстве формы $\omega_i{}^k$ определяют повороты Лоренца реперов [119].

Из (3.90) следует, что

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

а общие цепочки уравнений структуры приводят к двум уравнениям

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k + T^i_{kl}\omega^l \wedge \omega^k; \tag{3.91}$$

$$d\omega^i_k = \omega^l_k \wedge \omega^i_l + R^i_{klm}\omega^m \wedge \omega^l, \tag{3.92}$$

где, как и в п. 3.7.2, T^i_{kl} — тензор кручения.

Уравнения (3.91), (3.92) называют *уравнениями структуры пространства по Картану.*

Уравнениям (3.91), (3.92) можно придать с учетом (3.90) более компактный вид

$$d\omega_i = -\omega_j \wedge \omega_{ij}; \qquad d\omega_{ij} = \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - \Omega_{ij}; \tag{3.93}$$
$$d\Omega_{ij} = -\Omega_{il} \wedge \omega_{lj} + \omega_{il} \wedge \Omega_{lj}.$$

Рассматривая в качестве многообразия какую-либо группу Ли, получим, что над каждой точкой многообразия возникает новое пространство (слой) с действующей в нем структурной группой (см. Приложение 1). Само многообразие расслаивается, т. е. становится расслоенным многообразием [118]. Связь между такими слоями осуществляется различными полями, подробное рассмотрение которых дано в главе 6. Здесь в качестве примера отметим, что если слой совпадает с касательным пространством, то отображение слоев задается коэффициентами

связности (символами Кристоффеля), которые отождествляются с гравитационным полем, т. е. получаем третий этап описания полей [121].

3.8. Уравнения поля тяготения Эйнштейна

3.8.1. Согласно А. Эйнштейну, находящаяся в пространстве материя является источником искривления 4-мерного пространственного континуума, которое, таким образом, оказывается римановым пространственным континуумом.

Свободная материальная частица достаточно малой массы, так что ее влиянием на искривление пространственно-временного континуума можно пренебречь, будет двигаться по геодезическим линиям этого континуума, т. е. переход материальной частицы из точки A в точку B будет совершаться по экстремальному пути в этом континууме. Мы наблюдаем фактически проекции этих траекторий в 4-мерном пространстве на пространственно-подобную гиперповерхность, т. е. на наше 3-мерное пространство.

В этом, согласно А. Эйнштейну, заключается сущность теории тяготения. Итак, задача сводится к нахождению геодезических в 4-мерном пространственно-временном континууме в предположении, что известны компоненты метрического тензора g_{ik}, характеризующие метрические свойства этого континуума. Таким образом, для решения проблемы тяготения должны быть решены две следующие задачи: 1) по заданному распределению масс найти компоненты метрического тензора g_{ik}; 2) зная компоненты метрического тензора g_{ik}, найти уравнение геодезической, по которой будет двигаться свободная материальная частица малой массы.

3.8.2. Первая задача, т. е. нахождение величины g_{ik}, сводится к решению следующих гравитационных уравнений Эйнштейна:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{3.94}$$

Здесь $\varkappa = 8\pi G/c^4$; G — гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^2 Г$^{-1}$/с^2.

Выражения для R_{ik} и R были приведены выше (формулы (3.77) и (3.78)); T_{ik} — феноменологический тензор энергии-импульса материи, который в простейшем случае определяется следующим образом:

$$T_{ik} = \rho \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial s}.$$

Естественно, что тензор T_{ik} должен быть записан в криволинейных координатах, характеризуемых метрическим тензором g_{ik} (который играет одновременно роль гравитационных потенциалов).

Пример 1. Для идеальной сжимаемой жидкости или газа этот тензор в случае адиабатических процессов имеет вид

$$T_{ik} = (nm_0 + p)u_i u_k - pg_{ik}; \tag{3.95}$$

здесь n — число молекул в единице объема в пространстве, движущемся вместе со средой; m_0 — масса покоя среды (в энергетическом масштабе) при данных термодинамических условиях, отнесенная к одной молекуле; p — давление и, наконец, u_i — компоненты 4-мерной скорости, связанные тождеством

$$g_{ik}u^i u^k = 1.$$

Аналогично может быть записан тензор энергии-импульса для идеально упругой среды и т. д.

Уравнения (3.94) можно записать также в смешанных компонентах

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = \varkappa T_\mu^\nu. \tag{3.96}$$

Левые части уравнений (3.96) удовлетворяют следующим четырем тождествам:

$$\nabla_\nu \left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R\right) = 0. \tag{3.97}$$

Здесь ∇_ν — символ ковариантной производной (см. Приложение 1).

Таким образом, компоненты тензора энергии-импульса T_μ^ν должны удовлетворять четырем уравнениям

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0. \tag{3.98}$$

Основным уравнениям гравитационного поля (3.94) можно придать также форму

$$R^{ik} = \varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{3.99}$$

Здесь $T = g_{ik}T^{ik}$ — первый инвариант тензора энергии-импульса вещества.

В заключении обсуждения первой задачи отметим следующее. Уравнение Гамильтона — Якоби для гравитационного поля было введено А. Пересом [133] в следующем виде:

$$g^{-1}\left(g_{ik}g_{jl} - \frac{1}{2}g_{ij}g_{kl}\right)\left(\frac{\delta S}{\delta g_{ij}}\right)\left(\frac{\delta S}{\delta g_{kl}}\right) + {}^{(3)}R = 0, \tag{3.100}$$

где g_{ij} — коэффициенты метрики 3-геометрии; g — детерминант этих коэффициентов. Согласно [127], величина ${}^{(3)}R$ означает внутреннюю скалярную инвариантную кривизну 3-геометрии.

По поводу уравнения (3.100) Дж. Уилер пишет [133]: «Функция Гамильтона — Якоби зависит только от 3-геометрии, а не от того, как эта 3-геометрия выражается через метрические коэффициенты в некоторой системе координат,

хотя в (3.100) S входит таким образом, как если бы она зависела исключительно от метрических коэффициентов: $S=S(g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{33})$. В таком подходе $\delta S/\delta g_{ij}$ представляет собой функциональную производную от S в зависимости от изменения функций $g_{ij}(x, y, z)$. Тот факт, что в конечном счете координаты не играют никакой роли, позволяет нам записать уравнение (3.100) в символическом виде

$$\left(\frac{\nabla S}{\delta^{(3)}G}\right)^2 + {}^{(3)}R = 0. \tag{3.101}$$

Это уравнение Эйнштейна — Гамильтона — Якоби содержит всю классическую геометродинамику в тех областях, где никаких «настоящих» масс-энергий не содержится. Оно заключает в себе все содержащие 10 уравнений Эйнштейна».

Это следует из того, что все 10 уравнений гравитационного поля Эйнштейна можно получить по аналогии с п. 2.21 как характеристики надлежащим образом расширенных уравнений (3.100). В другой форме это решение получено в [134]. Таким образом, уравнения гравитационного поля также укладываются в рассмотренную в п. 2.21 модель.

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна (3.94) обычно выводят из уравнения Эйлера — Лагранжа при варьировании действия по Гильберту этого поля. Так, имеют место тождества [118, с. 353]

$$\frac{\delta \int R\sqrt{|g|}\, d^4x}{\delta g^{ij}} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij};$$

$$\delta \int G\sqrt{-|g|}\, d\Omega = R_{ik} - \frac{1}{2} R \tilde{g}_{ik},$$

где $G = g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})$.

Уравнения Эйнштейна (3.94) следуют из принципа наименьшего действия Гильберта

$$\delta\left(\int R\sqrt{|g|} + \Lambda\sqrt{|g|}\right) d\Omega = 0,$$

где $R\sqrt{|g|}$ и $\Lambda\sqrt{|g|}$ — действия для гравитационного поля и материи $|g| = |\det(g_{ij})|$ соответственно. В нашем случае уравнения Эйнштейна получаются как характеристики соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби, минуя решение вариационной задачи.

3.8.3. Для решения второй задачи необходимо найти дифференциальное уравнение геодезических в пространственно-временном искривленном континууме. Материальная частица, имеющая достаточно малую массу (так что ее возмущающим влиянием на заданное гравитационное поле можно пренебречь), движется в гравитационном поле по геодезической, т. е. ее траектория определяется уравнениями (см. Приложение 1)

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pk}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0; \tag{3.102}$$

здесь s — длина мировой линии частицы, отсчитываемая от некоторой начальной точки.

Таким образом, эта вариационная задача сводится к решению дифференциальных уравнений (3.102), решение которых дает уравнение геодезической в параметрической форме

$$x^\mu = x^\mu(s) \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{3.103}$$

Приведенные уравнения чрезвычайно сложны из-за нелинейного характера, и решение их очень трудно. Тем не менее в настоящее время известны несколько точных и большое количество приближенных решений этих уравнений. Здесь мы не можем останавливаться на обзоре этих решений, так как это вывело бы нас далеко за рамки настоящего раздела. Тем не менее ниже будут приведены результаты некоторых из этих решений.

Компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ обычно мало отличаются от своих евклидовых значений. Так, например, на некотором расстоянии от обладающего сферической симметрией массивного тела можно принять форму (3.70) и соответствующие решения (3.71), (3.72).

3.9. Измерение промежутков времени и пространственных расстояний в гравитационном поле

В одной из своих работ А. Эйнштейн замечает [43]: «В общей теории относительности пространственные и временные величины не могут быть определены так, чтобы разности пространственных координат могли быть измерены непосредственно единичным масштабом, а разности временных — посредством стандартных часов».

В самом деле, если пространственно-временной континуум носит неевклидовый характер, то разности пространственных и временных координат не могут иметь непосредственного смысла пространственных расстояний и промежутков времени. Здесь можно провести аналогию с двумерной неевклидовой поверхностью. Как известно, пространственные расстояния на такой поверхности, измеренные вдоль координатных линий, определяются соотношениями

$$ds_1 = \sqrt{g_{11}}dx^1 \text{ и } ds_2 = \sqrt{g_{22}}dx^2,$$

причем величины dx^1 и dx^2 не могут иметь одновременно смысл пространственных расстояний. Как, однако, могут быть измерены при наличии гравитационного поля промежутки времени и отрезки пространственных координат?

Будем оперировать со стандартными идеальными часами, определение которых дано в гл. 2. Ход таких часов не должен, в частности, зависеть от внешних сил, следовательно, маятниковые часы не допускаются. Согласно ОТО собственное (действительное) время, отсчитываемое движущимися часами, пропорционально длине пройденной ими времени-подобной миро-

вой линии, т. е.

$$\tau = \int_0^{x^0} \sqrt{g_{00} + 2g_{i0}\frac{dx^i}{dx^0} + g_{nm}\frac{dx^n}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0}}\, dx^0. \tag{3.104}$$

В частном случае, когда часы покоятся в заданной системе отсчета, будем иметь

$$\tau = \int_0^{x^0} \sqrt{g_{00}}\, dx^0. \tag{3.105}$$

Заметим еще, что интегралы (3.104) и (3.105) инвариантны и не зависят от того, с помощью каких координат произведена параметризация пространственно-временного континуума.

Формулу (3.105) можно считать в настоящее время экспериментально доказанной. Экспериментальные исследования, связанные с эффектом Мёссбауэра (температурное красное смещение) показали, что релятивистское замедление времени зависит только от скорости и не зависит от ускорения движущихся часов, если сравнивать их показания с показаниями неподвижных (в инерциальной системе отсчета) часов, мимо которых они в данный момент пролетают.

Таким образом, изменение показаний часов может вычисляться по формуле

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt. \tag{3.106}$$

Формулу (3.106) следует считать справедливой до ускорений, достигающих величины $10^{14}\, g$, а может быть, и вполне точной. Пересчет формулы (3.106) к системе отсчета, в которой часы покоятся, приводит к формуле (3.105).

В самом деле, как формула (3.105), так и формула (3.106) дают длину одной и той же времени-подобной мировой линии в разных системах отсчета. Но так как длина мировой линии является инвариантом, то справедливость сказанного становится очевидной для случая псевдоевклидова пространственно-временного континуума. Естественно перенести этот результат на случай неевклидова континуума. Отметим, что, как показал Е. Вигнер, использование системы стандартных часов, зеркал и световых сигналов дает возможность измерять длины не только времени-подобных мировых линий, но и величины пространственно-подобных интервалов, метрику и непосредственно кривизну пространственно-временного континуума [138].

Работа Е. Вигнера крайне интересна, так как она является существенным шагом вперед в решении рассматриваемой проблемы. Другие авторы для установления связи между координатными параметрами x^ν и действительными промежутками времени и пространственными расстояниями предлагали тетрадный метод, метод одиночного наблюдателя и т. д. Обзор этих методов дан в [7, 139]. Здесь не будем на них останавливаться. По вопросу о связи меж-

ду наблюдаемыми величинами и измеряемыми координатными параметрами см. п. 3.11, посвященный решению Шварцшильда.

В случае слабого поля можно принять

$$g_{ik}=\delta_{ik}+h_{ik}. \tag{3.107}$$

Здесь δ_{ik} — псевдоевклидова метрика и $h_{ik}\ll 1$.

В рассматриваемом случае можно (с точностью до малых более высокого порядка) производить «евклидовы измерения» пространственно-временных координат, рассматривая h_{ik} как компоненты поля в псевдоевклидовом континууме СТО.

Тем не менее проблема определения расстояний и промежутков времени по параметрам x^ν не может еще считаться полностью разрешенной во всей ее общности. Здесь предстоит еще работа.

3.10. Слабые гравитационные волны

Упруго-деформирующаяся среда способна генерировать (даже в случае конечных деформаций нелинейно-упругих сред) только слабые гравитационные волны, поэтому здесь рассмотрим общее решение линеаризированных гравитационных уравнений, т. е. уравнений для слабого гравитационного поля. Это решение изложено, например, в монографии Дж. Вебера [140].

Итак, прежде всего необходимо линеаризовать основные уравнения гравитационного поля

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{3.108}$$

Для этой цели положим

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}; \tag{3.109}$$

здесь $\delta_{\mu\nu}$ — метрический тензор псевдоевклидова пространства и времени и $h_{\mu\nu}$ — величины первого порядка малости, произведениями которых в дальнейшем будем пренебрегать. Далее имеем

$$h^\nu_\mu=\delta^{\nu\alpha}h_{\mu\alpha};\qquad h=h^\alpha_\alpha=\delta^{\alpha\lambda}h_{\alpha\lambda}. \tag{3.110}$$

Если координатные условия выбрать в виде [3]

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h^\beta_\mu-\frac{1}{2}\delta^\beta_\mu h\right)=0, \tag{3.111}$$

то основные уравнения (3.108) запишутся следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\delta^{\alpha\lambda}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\partial x^\lambda}+(\delta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu})\frac{1}{4}\delta^{\alpha\lambda}\frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha\partial x^\lambda}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{3.112}$$

[3] Принятые выше координатные условия (3.111) не уменьшают общности приводимых ниже решений для слабого гравитационного поля, ибо, как показал Д. Гильберт [99], они всегда могут быть удовлетворены путем бесконечно малого преобразования координат.

Введем теперь новый тензор

$$\varphi_\mu^\nu = h_\mu^\nu - \delta_\mu^\nu h. \tag{3.113}$$

Заметим, что если известны компоненты тензора φ_μ^ν, то из уравнений (3.113) могут быть найдены компоненты тензора h_μ^ν. Координатные условия (3.111) теперь записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\varphi_\mu^\nu = 0. \tag{3.114}$$

Учитывая далее уравнения (3.112) и выражение (3.113), имеем

$$\Box\varphi_\mu^\nu = -\frac{16\pi G}{c^4}T_\mu^\nu, \tag{3.115}$$

где, как и ранее,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{22}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{32}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ — оператор Даламбера.}$$

Решение уравнений (3.115), как известно, может быть представлено в виде

$$\varphi_\mu^\nu = \frac{4G}{c^4}\int\frac{1}{|r-r_0|}(T_{\mu(3)}^\nu dx_0^1 dx_0^2 dx_0^3), \tag{3.116}$$

здесь r_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы, и символ «з», стоящий в виде индекса у компонент тензора энергии-импульса T_μ^ν, означает, что значения этих компонент берутся в точке r для момента $t-r/c$.

Итак, если известны компоненты тензора энергии-импульса T_μ^ν деформирующейся упругой среды, то по формулам (3.113) и (3.115) можно найти компоненты тензора h_μ^ν, описывающего гравитационные волны, генерируемые этой средой.

3.11. Решение Шварцшильда

К. Шварцшильд получил точное решение уравнений Эйнштейна для одного неподвижного тела сферической структуры [141]. Ясно, что созданное таким телом гравитационное поле должно обладать сферической симметрией.

Не приводя здесь подробно всех промежуточных выкладок, запишем сразу решение Шварцшильда[4] для внешнего пространства

$$ds^2 = -[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] - \frac{2m}{r^2(r-2m)}[x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3]^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dx^0)^2, \tag{3.117}$$

где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$; $m = GM/c^2$ — так называемая приве-

[4] Подробное изложение вывода решения Шварцшильда можно найти, например, в монографиях [139, 142].

денная масса; M — масса частицы; G — гравитационная постоянная.

При значении r, равном гравитационному радиусу

$$r_g = 2m, \tag{3.118}$$

решение Шварцшильда имеет сингулярность. Величину r_g называют гравитационным радиусом.

Заметим, что простым преобразованием координат, сохраняющим сферическую симметрию, решению Шварцшильда можно придать различные другие формы. Так, например, оно может быть записано в виде

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-2m/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2. \tag{3.119}$$

Здесь t — координатное время, а координаты x^1, x^2, x^3 связаны со сферическими координатами r, θ и φ соотношениями $x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$; $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$; $x^3 = r\cos\theta$.

Решение Шварцшильда (3.119) можно записать через гравитационный радиус r_g:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2).$$

Помимо сферических пространственных координат r, θ, φ, применяются также изотропные сферические координаты ρ, θ, φ; здесь

$$r = \rho\left[1 + \frac{r_g}{4\rho}\right]^2;$$

$$ds^2 = \left[\frac{1 - r_g/4\rho}{1 + r_g/4\rho}\right]^2 c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)].$$

В случае слабого поля, когда $r_g/r \ll 1$ ($r_g/4\rho \ll 1$), имеет место разложение

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r} + \ldots\right)dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2);$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{\rho} + \frac{r_g^2}{2\rho^2} + \ldots\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{\rho} + \ldots\right) \times$$
$$\times [d\rho^2 + \rho^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)].$$

Подобные выражения используются при проверке ОТО в слабых полях (см. п. 3.20).

Из приведенных соотношений следует, что если масса M обращается в нуль, то гравитационный радиус r_g также становится равным нулю, а элемент длины (3.119) совпадает с соответствующим элементом пространства Минковского, выраженным через сферические координаты.

Аналогичное (3.119) решение Шварцшильда дает выраже-

ние для внутренности шара [143, с. 142]

$$ds^2 = \frac{(dr)^2}{1 - r^2/a^2} + r^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2\right] - \\ - \frac{1}{4}\left[3\sqrt{1 - \frac{R_0^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right]^2 c^2 dt^2,$$

где a — параметр, определяемый через радиус шара R_0 и гравитационный радиус r_g в виде $a = R_0^3/r_g$.

Ввиду неевклидова характера пространственно-временного континуума не существует такой формы решения Шварцшильда, в которой величины $\Delta r = r_2 - r_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$ имели бы одновременно смысл пространственных расстояний и промежутков времени. Для того чтобы установить физический смысл величин x^1, x^2, x^3 и t, необходимо обратиться к выводам, изложенным выше.

Рассмотрим решение Шварцшильда при движении материальных точек пренебрежимо малой и конечной массы и лучей света в поле Шварцшильда.

3.12. Движение материальной точки пренебрежимо малой и конечной массы в поле Шварцшильда

3.12.1. Материальная точка пренебрежимо малой массы должна двигаться в поле Шварцшильда по геодезической пространственно-временного континуума, метрика которого определяется формулой (3.117).

Не останавливаясь на довольно громоздких выкладках, заметим, что соответствующие подсчеты в нулевом приближении дают результаты, совпадающие с ньютоновскими, т. е. в этом приближении движение планет или других небесных тел происходит по тем же законам, что и в механике Ньютона в предположении справедливости закона гравитации Ньютона. Однако уже следующее приближение приводит к существенно иному результату: эллипс, по которому движется планета вокруг Солнца, сам должен совершать медленное вращение вокруг фокуса, в котором расположено Солнце. Этот эффект (эффект движения перигелия планеты) особенно велик для планеты Меркурий.

Расчеты показывают, что для величины смещения перигелия за 100 лет справедлива формула

$$\Delta\pi = \frac{3\mu n}{a(1 - e^2)}, \qquad (3.120)$$

где μ и a — гравитационный радиус Солнца и большая полуось орбиты планеты, выраженные в одних и тех же единицах

длины; e — эксцентриситет орбиты; n — среднее движение планеты, выраженное в угловых секундах за 100 лет.

Прежде чем перейти к анализу формулы (3.120), приведем следующую цитату из книги В. А. Брумберга [97, с. 323] относительно истории этого вопроса: «Обработка нескольких десятков тысяч наблюдений с 1850 по 1892 г. привела Ньюкомба к заключению, что между теоретическими и наблюдательными данными имеются расхождения лишь в вековых движениях перигелиев Меркурия, Марса и узла Венеры. Для объяснений этих трех разногласий были предложены самые разнообразные гипотезы, но ни одна из них не могла быть признана удовлетворительной. В конце концов с целью устранения наибольшего разногласия — в движении перигелия Меркурия — Ньюкомбу пришлось включить в свои чисто гравитационные ньютоновские теории элемент эмпиризма и заменить закон Ньютона $F=\gamma mm'/r^2$ для силы притяжения между частицами с массами m и m' на закон Холла $F=\gamma mm'/r^{2+\varepsilon}$, где ε — малое число. Наличие ε вызывает вековое движение перигелия орбиты и соответствующий выбор ε ликвидирует невязку в смещении перигелия Меркурия. В дальнейшем для уточнения ньюкомбовской теории движения Марса Россу пришлось внести добавочные эмпирические поправки. История создания и развития теорий Леверрье и Ньюкомба подробно изложена в курсе Шази.

В середине 20 века интерес к теориям движения внутренних планет вновь резко возрос. К этому времени накопился новый обширный наблюдательный материал и открылись новые возможности усовершенствования планетных теорий в связи с развитием электронно-вычислительной техники. Клеменсом, Морганом и Данкомом была заново проведена обработка наблюдений Меркурия, Земли и Венеры соответственно (Clemence, 1943; Morgan, 1945; Duncombe, 1958). В последней из этих работ установлено, что найденная Ньюкомбом невязка в вековом движении узла Венеры в действительности не существует, и, по-видимому, была обусловлена большими систематическими ошибками старых наблюдений. В этой же работе приведена сводка теоретических (ньютоновских) и наблюдаемых значений вековых движений перигелиев Меркурия, Венеры и Земли. Позднее Клеменсом была создана новая гравитационная теория движения Марса (Clemence, 1949, 1960). В результате этих работ теории движения внутренних планет были освобождены от всех эмпирических членов и единственные расхождения между теоретическими и наблюдаемыми значениями остались в вековых движениях перигелиев планет».

В результате вывода формулы (3.120) оказалось, что в теории гравитационного поля Эйнштейна из трех законов Кеплера остался лишь закон сохранения момента количества движения с соответствующими релятивистскими поправками [143, 144].

Кривизна пространства-времени сказывается по отношению к первому закону Кеплера в том, что за каждый оборот планета массы M вокруг Солнца описывает в своем движении не эллипс, а некоторую «розетку» (см. рис. 3, 1, *а, б* [143, 144]), а перигелий смещается на угол (3.120). Так, для планеты Меркурий смещение перигелия за 100 земных лет равно 43,02″, для Венеры — 8,6″, Земли — 3,8″, Марса — 1,3‴.

Возникает следующий весьма важный принципиальный воп-

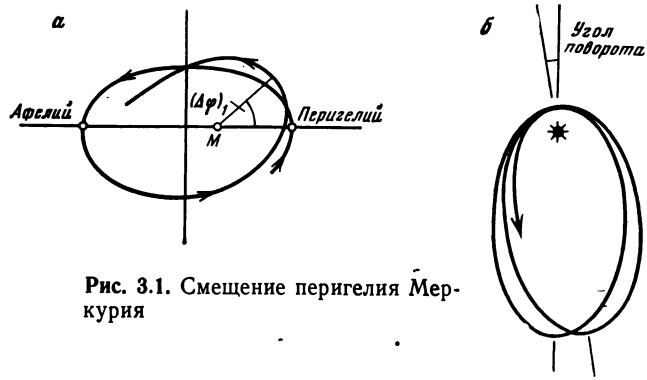


Рис. 3.1. Смещение перигелия Меркурия

рос. Как отмечалось, координатные параметры не могут быть непосредственно одновременно отождествлены с пространственным расстоянием и временными промежутками. Как же в этих условиях возможна проверка формулы (3.120) для смещения перигелия планет? Более того, этот вопрос можно усилить. А. С. Эддингтон [145, с. 160] показал, что решению Шварцшильда можно придать такую форму, при которой будет строго справедлив третий закон Кеплера. Однако при других формах решения Шварцшильда этот закон не будет иметь места.

Сам А. С. Эддингтон по этому поводу замечает следующее [145, с. 162]: «Этот результат не имеет никакого значения для наблюдений, так как он является лишь простым следствием принятого нами определения величин r. Можно было бы взять слегка отличные координатные системы, которые с таким же правом могли претендовать на соответствие полярным координатам в плоском пространстве-времени, но в применении к которым третий закон Кеплера уже не был бы верен.

К результатам только что указанного типа нужно подходить с большой осторожностью, так как они могли бы представлять интерес, например, только в том случае, если бы радиус-вектор являлся не условной координатой, а величиной, которую можно непосредственно измерить. Перемещение перигелия представляет собой явление совершенно другого порядка. Ясно, что число лет, необходимое для того, чтобы орбита, имеющая эксцентриситет, не равный нулю, совершила полный оборот, вернувшись в свое прежнее положение, может быть определено при помощи наблюдений, очевидно, независимо от того или иного условия при определении точной длины радиус-вектора».

Следует добавить, что в формуле (3.120) величины a и e могут быть получены из непосредственных астрономических наблюдений в предположении, что 3-мерное пространство носит евклидов характер. Это является следствием относительной слабости гравитационного поля Солнца в области движения планеты. Более того, ряд авторов [145, 108, 7] показали, что формула (3.120) может быть получена в предположении, что мет-

рика пространственно-временного континуума имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \qquad (3.121)$$

где Φ — ньютонов потенциал, совпадающий с (3.70). При этом, как выше было отмечено, можно с точностью до малых более высокого порядка производить «евклидовы» измерения пространственных промежутков, рассматривая Φ как внешнее поле, заданное в плоском псевдоевклидовом пространстве.

Итак, имеется возможность проверить формулу (3.120) для смещения перигелиев планет Солнечной системы.

Подробный анализ имеющихся экспериментальных данных по релятивистскому смещению перигелия Меркурия и других планет Солнечной системы производился многими авторами.

Несмотря на трудности наблюдения и возможные ошибки в наблюдениях и вычислениях, все имеющиеся здесь данные говорят совершенно определенно в пользу ОТО. Результаты расчетов и наблюдений находятся здесь в очень хорошем согласии друг с другом, причем не только для Меркурия, но и для других планет Солнечной системы (см. ниже п. 3.20).

3.12.2. Кратко рассмотрим теперь задачу о движении частиц ненулевой массы $m>0$ в метрике Шварцшильда (3.119) для тела массы M_0, создающего гравитационное поле [118, с. 682] с гравитационной постоянной G на основе уравнений Гамильтона—Якоби.

Хорошо известно равенство, которому удовлетворяет 4-импульс свободной частицы массы m:

$$p^a p^b g_{ab} = \langle p, p \rangle = (p_0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (p^\alpha)^2 = m^2 c^2, \qquad (3.122)$$

и которое задает массовую поверхность в линейном (кокасательном) пространстве импульсов (p^α) с метрикой g_{ab}. Это — пространство Лобачевского с элементом объема $d\sigma = d^3p/p_0$ [118].

Для рассматриваемой задачи гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} g^{ab} p_a p_b \qquad (a, b = 0, 1, 2, 3).$$

Согласно (3.119) имеем [88]

$$g^{00} = (g^{00})^{-1} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}; \qquad g^{rr} = (g_{rr})^{-1} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right);$$

$$r_g = \frac{2M_0 G}{c^2},$$

а само движение плоское, т. е. можно принять в (3.119) параметр $\theta = \pi/2$.

Тогда в координатах $(t, r, \varphi, x^0=ct)$ уравнение Гамильтона—Якоби (см. гл. 2) примет вид [118, с. 682; 88, с. 390]

$$\frac{\partial S}{\partial x^a}\frac{\partial S}{\partial x^b}g^{ab} = \text{const} = \frac{1}{c^2(1-r_g/r)}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = g^{ab}p_c p_b. \qquad (3.123)$$

В уравнении (3.123) константа может быть приравнена m^2c^2, так как согласно (3.122) уравнение (3.123) есть уравнение массовой поверхности.

Действие S определяется (см. главу 2) в виде

$$S=-Et+M\varphi+f(r, M, E);$$
$$E=H,\ M=p\varphi. \qquad (3.124)$$

Из уравнений $\partial S/\partial E=\text{const}$ и $\partial S/\partial M=\text{const}$ определяются функции $r(t)$ и $r(\varphi)$. Тогда, подставляя (3.124) в (3.123), находим траекторию

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2}\left[\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\times\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2} dr, \qquad (3.125)$$

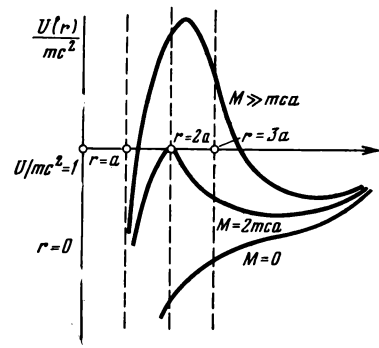


Рис. 3.2. Зависимость $U(r)/mc^2$

где величина $E=H=cp_0$ может быть приравнена энергии частицы.

Из (3.125) следует, что при $m\to 0$ получаем движение частиц нулевой массы (световых лучей в метрике Шварцшильда), которое рассмотрено подробно в п. 3.14.

Пример 1. Уравнение

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{cdt} = \frac{1}{E}\left[E^2-U^2(r)\right]^{1/2}, \qquad (m\neq 0),$$

(где $U(r)=mc^2\left[\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}$ — «эффективный потенциал» при заданном моменте M) определяет зависимость $r(t)$. На рис. 3.2 приведен график $U(r)/mc^2$ [118]. Условие $U(r)\leqslant E$ определяет допустимые области движения по r при заданных M и E. Из рис. 3.2 видно, что потенциал $U(r)$ может иметь максимум при величинах $r\sim 2a$ (в зависимости от M), а при $r\to\infty$ имеет место $U(r)\to 1$; в частности, видна возможность «притяжения» частиц гравитационным полем (движение $r(t)$).

3.13. Закон гравитации Ньютона

Было показано, что принцип Гамильтона—Остроградского можно рассматривать как следствие ОТО (в нулевом приближении). Таким образом, если не учитывать диссипативных сил, то классическая механика Ньютона является следствием ОТО.

Покажем теперь, что закон гравитации Ньютона также в первом приближении является следствием гравитационных уравнений Эйнштейна.

Возьмем слабое поле в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \qquad (3.126)$$

В этом случае имеем $g_{00} = (1 - 2\Phi/c^2)$; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; $g_{ik} = 0$, если $i \neq k$.

Далее, как это было показано, компонента тензора энергии-импульса распределенной массы равна $T_0^0 = -\mu c^2$. В этом случае уравнения поля сведутся к виду

$$R_0^0 = -\frac{4\pi G}{c^4}\mu. \qquad (3.127)$$

Все остальные уравнения обращаются в нуль.

Выкладка показывает, что в линейном приближении

$$\Gamma_0^0 \cong -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha},$$

откуда следует

$$R_0^0 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha^2}} \equiv -\frac{1}{c^2} \Delta\varphi. \qquad (3.128)$$

Подставив (3.128) в (3.127), получим, что

$$\Delta\varphi = 4\pi G\mu. \qquad (3.129)$$

Таким образом, получили уравнение Пуассона для потенциала гравитационного поля Ньютона.

Итак, как принцип Гамильтона—Остроградского, так и закон гравитации Ньютона являются следствиями ОТО. Следовательно, все эксперименты, подтверждающие классическую ньютоновскую механику и теорию гравитации, подтверждают одновременно и ОТО [88].

Следует отметить, что условием применимости ньютоновского приближения [67, с. 438] уравнения (3.129) является $(|\varphi|/c^2) \ll 1$ и совпадает с условием слабости поля.

Так, на поверхности Земли

$$\frac{|\varphi_\oplus|}{c^2} = \frac{GM_\oplus}{r_\oplus c^2} = \frac{r_{g,\oplus}}{2r_\oplus} = 7 \cdot 10^{-10}; \qquad M_\oplus = 5{,}98 \cdot 10^{27}\ \text{г},$$

$r_{\odot}=6{,}37\cdot10^{8}$ см, $r_{g,\odot}=0{,}44$ см,

где, как и ранее, $r_g=2m=2GM/c^2$ — гравитационный радиус.

Для Солнца (на его поверхности)

$$\frac{|\varphi_\odot|}{c^2}=\frac{GM_\odot}{r_\odot c^2}=\frac{r_{g,\odot}}{2r_\odot}=2{,}12\cdot10^{-6},\qquad r_{g,\odot}=2{,}94\cdot10^{5}\text{ см}=2{,}94\text{ км},$$

$$M_\odot=1{,}99\cdot10^{33}\text{ г},\qquad r_\odot=6{,}96\cdot10^{10}\text{ см}.$$

Отметим также, что для круговой орбиты планеты $|\varphi|/c^2=v^2/c^2$; v — скорость планеты [67]. Тогда для орбиты Земли ($v=3\cdot10^{6}$ см/с) имеем $|\varphi|/c^2\approx10^{-8}$. С уменьшением радиуса тела или с ростом его массы потенциал $|\varphi|$ возрастает, а поле становится сильным. В результате необходимо рассматривать решения типа Шварцшильда (см. п. 3.11).

Пример 1. Простейшим решением уравнения Пуассона (3.129) вне создающих поле масс $\Delta\varphi=0$ является, как известно [118], стационарное симметричное сферическое решение

$$\varphi=\text{const}/r,\qquad r^2=\sum_{\alpha=1}^{3}(x^\alpha)^2, \tag{3.130}$$

а константа отождествляется с суммарной массой M тела, создающего поле φ (само тело тоже сферически симметрично):

$$\varphi=MG/r. \tag{3.131}$$

Найдем аналог (3.131) в ОТО [118, с. 380]. Будем рассматривать сферически симметричную метрику g_{ab}, не зависящую от времени $t=x_0/c$. Искомая метрика имеет вид

$$ds^2=c^2dt^2g_{00}+g_{11}dr^2-d\Omega^2, \tag{3.132}$$

где $g_{00}=e^{\nu}$; $g_{11}=-e^{\lambda}$; $d\Omega^2=(d\theta)^2+\sin^2\theta(d\varphi^2)$ — элемент длины на единичной сфере в сферических координатах (θ,φ); ν и λ — неизвестные переменные. В силу принятых предположений $g_{00}=g_{00}(r)$, $g_{11}=g_{11}(r)$. Согласно формулам (3.76) и (3.77) имеем ($x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$)

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r};\qquad \Gamma^0_{10}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r};\qquad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta;$$

$$\Gamma^0_{11}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}e^{\lambda-\nu};\qquad \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda};\qquad \Gamma^1_{00}=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dt}e^{\nu-\lambda};$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r};\qquad \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta;\qquad \Gamma^0_{00}=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dt};$$

$$\Gamma^1_{10}=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt};\qquad \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}.$$

Из условия $R_{ab}=0$ (решение Эйнштейна в пустом пространстве) имеем $\dfrac{d\lambda}{dt}=0$, $e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\nu}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\right)-\dfrac{1}{r^2}=0$, $e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\nu}{\partial r}-\dfrac{1}{r^2}\right)+\dfrac{1}{r^2}=0$ и интеграл $\nu+\lambda=f(t)$. Функцию $f(t)$ можно сделать нулевой путем замены $t'=\psi(t)$.

Искомое решение имеет вид [118, с. 381]

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \qquad g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r}, \text{ где } r_g = \text{const}.$$

Из (3.132) следует метрика Шварцшильда (3.119)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{(1 - r_g/r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

При $r \to \infty$ метрика становится слабой

$$g_{ab} \approx g_{ab}^{(0)} + \frac{1}{c^2} g_{ab}^{(2)} + O\left(\frac{1}{c^3}\right); \qquad g_{00}^{(2)} = -\frac{r_g c^2}{r}.$$

Отсюда следует $r_g = 2MG/c^2$.

Ранее отмечалась в п. 3.11 особенность метрики Шварцшильда при $r \to r_g$. Эта формула корректна по определению при $r > r_g$ (область «внешнего наблюдателя»). Оказалось, что формула (3.119) справедлива и при $r < r_g$. Это обстоятельство подробно рассмотрено в [118, с. 707; 146].

При больших r имеем [118, с. 382]

$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + \frac{1}{c^2} g_{ab}^{(2)} + O\left(\frac{r_g^2}{r^2}\right);$$

$$g_{ab}^{(2)} dx^a dx^b = -\frac{r_g c^2}{r} (dx^0)^2 - \frac{r_g c^2}{r} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2\right) = -\frac{r_g c^2}{r} \sum_{\alpha=0}^{3} (dx^\alpha)^2;$$

$$dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2; \qquad \frac{1}{1 - r_g/r} = 1 + \frac{r_g}{r} + O\left(\frac{r_g^2}{r^2}\right).$$

В результате получим (учитывая, что $r_g c^2/r = 2GM/r = 2\varphi$)

$$g_{ab} dx^a dx^b = (dx^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2 + \frac{2\varphi}{c^2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2\right) + O\left(\frac{r_g^2}{r^2}\right). \qquad (3.133)$$

Формула (3.133) является слабой метрикой с точностью до $0(1/c^3)$. Отметим, что связь с потенциалом Ньютона φ для слабой метрики имеется всегда, а не только для метрики Шварцшильда.

Из (3.133) следует, что поправка к метрике Минковского пропорциональна евклидовой метрике в 4-мерном пространстве. Таким образом, результат не инвариантен преобразованиям Лоренца, а инвариантен только относительно группы вращений SO (3).

3.14. Отклонение лучей света в гравитационном поле Шварцшильда

Лучи света должны распространяться по линиям нулевой длины. Следовательно, для случая поля Шварцшильда можно написать

$$\frac{dr^2}{1-r_g/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 = 0. \qquad (3.134)$$

Э. Картан [55] показал, что световые лучи, рассматриваемые только с точки зрения пространства, определяются как кривые, вдоль которых имеет экстремум интеграл

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{dr^2}{(1-r_g/r)^2} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{(1-r_g/r)}}\,.$$

Если принять, что распространение света происходит вдоль поверхности $\varphi = 0$, то задача сводится к нахождению экстремума интеграла вида

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{dr^2}{(1-r_g/r)^2} - \frac{r^2 d\theta^2}{(1-r_g/r)}}\,.$$

Проводя вычисления, приходим к формуле Картана

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{c\,dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho} - \frac{c^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}, \qquad \rho = \text{const}. \qquad (3.135)$$

При $r_g \to 0$ в качестве предела получаем прямую $r\cos\varphi = \rho$. При малых r_g можно вычислить по (3.135) поправку к прямолинейному пути светового луча. Таким образом, зная метрику слабого поля, можно по формуле (3.133) изучить поправки к движению быстрых частиц при больших r, в частности, безмассовых частиц.

Расчет по формуле (3.135) показывает, что отклонение луча вблизи диска Солнца составляет $\sim 43''$.

Отклонение луча света, проходящего вблизи диска Солнца, при первых наблюдениях имело довольно «размытый» результат, но последние наблюдения (1968—1970 гг.) дают гарантию, что ошибка не превышает 4%.

Наблюдение эффекта отклонений лучей света в поле тяготения Солнца очень трудно; эффект этот мал и здесь возможны различные случайные ошибки. Однако вся совокупность имеющихся здесь экспериментов говорит определенно в пользу ОТО как в качественном, так и в количественном отношениях. Результаты некоторых экспериментов последних лет описаны в п. 3.20.2.

3.15. Гравитационное смещение

В настоящем параграфе подробно остановимся на предсказанном теорией гравитации эффекте, который оказалось возможным проверить в земных (лабораторных) условиях.

3.15.1. Предварительные замечания. В статье «О принципе относительности и его следствиях», опубликованной в 1907 г., А. Эйнштейн [43] предсказал существование явления гравитационного смещения частоты. К этому вопросу А. Эйнштейн вновь возвращается в статье [43], опубликованной в 1911 г., в которой дается новое обоснование существования эффекта гравитационного смещения в неинерциальных системах отсчета.

В указанных статьях А. Эйнштейн получил следующие приближенные формулы для гравитационного смещения частоты:

$$\nu \cong \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right); \quad \frac{\Phi}{c^2} \ll 1; \tag{3.136}$$

$$\nu \cong \nu_0 \exp\left\{\frac{\Phi}{c^2}\right\}. \tag{3.137}$$

Здесь ν — воспринимаемая частота при разности гравитационного потенциала Φ между приемником и источником; ν_0 — частота при отсутствии разницы потенциалов. Формула (3.137) значительно более точна, чем формула (3.136).

Еще в статье 1907 г. А. Эйнштейн [43] указывал, что открытое явление гравитационного смещения относится не только к темпу хода часов, но и к скорости протекания всех физических процессов вообще. Он указал: «В этом смысле мы можем сказать, что происходящий в часах процесс, и вообще любой физический процесс, протекает тем быстрее, чем выше гравитационный потенциал того места, где этот процесс происходит».

А. Эйнштейн возвращается к этому же вопросу в 1916 г. в своей фундаментальной работе «Основы общей теории относительности» [43]. В результате проведенного анализа он приходит к следующему заключению: «Итак, часы идут медленнее, если они установлены вблизи весомых масс. Отсюда следует, что спектральные линии света, попадающие к нам с поверхности больших звезд, должны смещаться к красному концу спектра».

В частности, еще в статье 1907 г. А. Эйнштейн указал, что спектральные линии при наблюдении их на поверхности Земли должны быть сдвинуты по отношению к спектру тех же элементов, расположенных на поверхности Солнца, на величину $2 \cdot 10^{-6}$.

В последующие годы, вплоть до настоящего времени, открытое А. Эйнштейном явление гравитационного смещения было подвергнуто дальнейшему теоретическому исследованию в работах многих авторов. Были также проведены обширные астрономические наблюдения для обнаружения и подтверждения этого эффекта. Однако ввиду малости ожидаемого эффекта эти астрономические наблюдения дали главным образом качественное и только отчасти количественное подтверждение этого эффекта. Подлинный триумф предсказаний А. Эйнштейна был получен в экспериментах, основанных на эффекте Мёссбауэра. Здесь эффект гравитационного смещения был подтвержден с точностью до 1%.

Отметим, что А. Эйнштейн придавал исключительно большое значение эффекту гравитационного смещения. Книга А. Эйнштейна «О специальной и общей теории относительности» заканчивается словами: «Если красное смещение спектральных линий под влиянием потенциала тяготения не существует — от общей теории относительности придется отказаться».

Ниже освещены результаты наиболее важных работ, посвященных эффекту гравитационного смещения.

3.15.2. Элементарная теория гравитационного смещения. Если не ограничивать СТО только инерциальными системами отсчета (ИСО), а включить в нее также рассмотрение неинерционных систем отсчета (НСО), движущихся заданным образом относительно инерциальных систем отсчета, то, как показал А. Эйнштейн, элементарная теория гравитационного смещения может быть построена в рамках СТО.

В статье 1911 г. А. Эйнштейн [43] вводит две системы отсчета: инерциальную систему отсчета K и неинерциальную систему отсчета K', равномерно ускоренно движущуюся с ускорением $\gamma = \text{const}$ относительно системы K. Предполагается, что в системе K' в точке S_2 покоится источник, а в точке S_1 — приемник излучения. Расстояние h между S_1 и S_2 считается заданным. Далее Эйнштейн рассуждает следующим образом: «Если излучение, испускаемое в равномерно ускоренной системе отсчета K' на S_2, по направлению к S_1 имело относительно находящихся в S_2 часов частоту ν_2, то по прибытию в S_1 оно имеет относительно находящихся там точно таких же часов уже частоту не ν_2, а большую частоту ν_1, которая в первом приближении равна

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \frac{\gamma h}{2}\right). \qquad (2)$$

В самом деле, если снова ввести неускоренную систему отсчета K_0, относительно которой система отсчета K' в момент испускания света имела нулевую скорость, то S_1 будет иметь относительно K_0 в момент прибытия излучения в S_1 скорость γ (h/c), откуда в силу принципа Доплера непосредственно получается соотношение (2).

Согласно нашему предположению об эквивалентности систем отсчета K' и K это соотношение справедливо и для покоящейся координатной системы K', в которой существует однородное поле тяготения, в том случае, когда в этой системе происходит описанный выше перенос энергии излучения. Таким образом, получается, что луч света, испускаемый в области с определенным потенциалом тяготения из S_2 и имеющий при его испускании частоту ν_2, измеренную часами, находящимися в S_2, обладает при его прибытии в S_1 другой частотой ν_1, если последняя измеряется с помощью таких же часов, находящихся в S_1. Заменим γh через потенциал тяготения Φ, взятый в S_2 по отношению к S_1, потенциал который принят за нуль, и примем, что соотношение, полученное нами для однородного гравитационного поля, справедливо также и для полей другого вида; в таком случае

$$\nu_1 = \nu_2(1 + \Phi/c^2). \qquad (2a)$$

Прежде всего этот результат (справедливый согласно его выводу в первом приближении) можно применить следующим образом.

Пусть ν_0 — частота некоторого элементарного источника света, измеренная с помощью часов U, находящихся в том же месте, где и источник. Эта частота не зависит от того, где установлен источник света вместе с часами. Представим себе, что источник и часы помещены, например, на поверхности Солнца (там находится наша система S_2). Часть испускаемого там света доходит до Земли (S_1), где мы часами U точно такой же конструкции, что и упомянутые выше, измеряем частоту ν приходящего света. Тогда согласно соотношению (2a) имеем

$$\nu = \nu_0(1+\Phi/c^2),$$

где Φ — (отрицательная) разность гравитационных потенциалов между поверхностью Солнца и поверхностью Земли.

Таким образом, согласно нашим представлениям спектральные линии солнечного света должны несколько сместиться по сравнению с соответствующими спектральными линиями земных источников света в сторону красного конца спектра, а именно на относительную величину

$$(\nu_0-\nu)/\nu_0 = -\Phi/c^2 = 2\cdot 10^{-6}.$$

Это смещение можно было бы измерить, если бы были точно известны условия, при которых испускается солнечный свет. Однако ввиду того, что другого рода причины (давление, температура) также влияют на положение спектральных линий, трудно установить, действительно ли существует выведенное соотношение, в котором учитывается влияние гравитационного потенциала.

При поверхностном рассмотрении может показаться, что соотношение (2) или (2a) бессмысленны. Возможно ли, чтобы при непрерывном испускании света из S_2, он прибыл в S_1 с другой частотой, чем свет, вышедший из S_2? Однако ответ на этот вопрос прост. Мы не можем рассматривать ν_2 и ν_1 просто как частоты (числа периодов в секунду), так как мы еще не установили времени в системе отсчета K. Величина ν_2 означает число периодов, отнесенное к единице времени часов U в S_2, а ν_1 — число периодов, отнесенное к единице времени точно таких же часов U в S_1. У нас нет никаких оснований допускать, что часы, находящиеся в точках с различными гравитационными потенциалами, должны рассматриваться как одинаково идущие. Наоборот, мы непременно должны определить время в системе отсчета K так, чтобы число гребней и минимумов волн между S_2 и S_1 не зависело от абсолютного значения времени, ибо рассматриваемый процесс по своей природе стационарен. Если это условие не выполнено, то мы приходим к определению времени, которое будет явно входить в законы природы, что, конечно, неестественно и нецелесообразно. Итак, нельзя сказать, что оба часовых механизма в S_2 и S_1 показывают правильное время. Если мы определяем время в S_1 часами U, то мы должны измерять время в S_2 часами, которые идут в $[1+\Phi/c^2]$ раза медленнее, чем часы U, если их сравнить с часами U в одном и том же месте.

Это связано с тем, что измеренная подобными часами частота рассмотренного выше луча света при его отправлении на S_2 $\nu_2(1+\Phi/c^2)$ в согласии с формулой (2a) равна частоте ν_1 того же луча света при его прибытии в S_1.

Отсюда вытекает следствие фундаментального значения для теории. Если скорость света измерять в различных местах ускорения системы отсчета K' в отсутствие гравитационного поля, пользуясь одинаково идущими часами U, то

всюду будет получаться одно и то же значение. Согласно нашему основному допущению то же самое справедливо для системы K. Однако отсюда следует, что в местах с различными гравитационными потенциалами при измерении времени мы должны пользоваться по-разному идущими часами. В том месте, которое относительно начала координат обладает гравитационным потенциалом Φ, мы должны при измерении применять часы, которые при перенесении их в начало координат шли бы в $(1+\Phi/c^2)$ раза медленнее, чем часы, которыми определяется время в начале координат. Если мы обозначим через c_0 скорость света в начале координат, то скорость света c в некотором месте с гравитационным потенциалом Φ будет равна

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \qquad (3)$$

По этой теории принцип постоянства скорости света справедлив не в той формулировке, в какой он кладется в основу теории относительности».

Мы привели эту длинную цитату из статьи А. Эйнштейна потому, что здесь с поразительной ясностью излагается не только сущность гравитационного смещения, но и связанный с ним вопрос об измерении скорости света в гравитационном поле.

Необходимо еще сделать следующее важное замечание. Конечно, с точки зрения наблюдателей в инерциальной системе отсчета K стандартные часы, расположенные в точках S_1 и S_2 неинерциальной системы отсчета K', идут совершенно одинаковым образом, так как рассматриваемые часы имеют одну и ту же скорость и одно и то же ускорение по отношению к инерциальной системе отсчета K. Однако с точки зрения наблюдателя, расположенного в точке S_1 системы K', часы, находящиеся в точке S_2, будут идти быстрее, чем часы, расположенные в точке S_1. Таким образом, по мысли А. Эйнштейна, *все дело в системе отсчета.*

В 1920 г. В. Паули [89] рассмотрел эффект гравитационного смещения в системе отсчета K, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω относительно инерциальной системы отсчета $\overline{K}$.

Рассмотрим неподвижные в системе $\overline{K}$ часы, находящиеся на расстоянии r от оси вращения. Для наблюдателя в инерциальной системе K их скорость будет равна ωr. Таким образом, имеем

$$t = \tau \Big/ \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\omega^2 r^2}, \qquad (3.138)$$

где t — время, отсчитываемое в инерциальной системе отсчета K и τ — время, показываемое движущимися часами. Приведенная формула (3.138) есть непосредственное следствие преобразования Лоренца или, что то же самое, поперечного эффекта Доплера, если только темп хода движущихся часов не зависит от их ускорения, т. е. если справедлива формула (3) в приведенной выше цитате из статьи [43].

Для наблюдателя, находящегося вблизи оси вращения в неинерциальной системе отсчета $\overline{K}$, рассматриваемые часы будут покоиться.

Поэтому наблюдаемый эффект не может объясняться как поперечный эффект Доплера. Однако в неинерциальной системе $\overline{K}$ существует поле гравитационных (центробежных) сил, имеющее потенциал

$$\Phi = -\frac{1}{c^2}\omega^2 r^2. \tag{3.139}$$

Наблюдатель в неинерциальной системе $\overline{K}$ сделает, таким образом, вывод, что изменение темпа хода часов, находящихся на расстоянии r от него, зависит от гравитационного потенциала Φ и что замедление времени в системе $\overline{K}$ может быть найдено по формулам

$$t = \tau\Big/\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}} \cong \tau\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right), \qquad \frac{\Delta t}{\tau} = -\frac{\Phi}{c^2}. \tag{3.140}$$

Получается замедление времени, так как в рассматриваемом случае потенциал Φ отрицателен.

Итак, В. Паули, используя другой подход, пришел к той же формуле, что и А. Эйнштейн в упоминавшихся выше работах.

В этой связи В. Паули [89] замечает: «Таким образом, поперечный эффект Доплера и замедление времени вследствие тяготения являются двумя различными способами выражения того факта, что часы всегда используют собственное время

$$\tau = \frac{1}{ic}\int ds».$$

Сделаем еще несколько замечаний общего характера. Из приведенного выше анализа с необходимостью следует, что темп хода часов, а следовательно, и скорость всех процессов зависит от величины гравитационного потенциала в том месте, где расположены часы.

Таким образом, гравитационное смещение частоты является не кажущимся (как это иногда утверждают), а вполне реальным эффектом. В этой связи рассмотрим следующий мысленный эксперимент [7, с. 181, 151].

Пример 1. Пусть имеются трое совершенно одинаковых часов A, B, C. Часы A покоятся в точке $r=0$ равномерно вращающейся системы $\overline{K}$, а часы B — на расстоянии r от часов A в той же системе $\overline{K}$. Пусть часы C вначале покоятся рядом с часами A, причем их показания совпадают. Затем часы C отправляются в путешествие по прямой линии к часам B и, достигнув их, тотчас же отправляются в обратное путешествие к часам A. В момент прибытия часов C к часам A наблюдатель в $\overline{K}$ установит разность их показаний, равную $\Delta t^{C}_{\text{пут}}$, затем эксперимент повторяется с тем, однако, различием, что часы C, прибыв к часам B, остаются там на некоторое время (сколь угодно большое)

и затем возвращаются к часам A. Теперь наблюдатель в $\overline{K}$ убедится, что разность показаний часов A и C будет больше, чем $\Delta t^{C}_{\text{шут}}$. Этот результат наблюдатель в $\overline{K}$ сможет объяснить только тем, что часы C, находясь некоторое время в области более низкого потенциала, действительно шли медленнее часов A. Этот (ABC) эксперимент инвариантен, поэтому он имеет объективное значение (точно к таким же выводам придут наблюдатели в инерциальной системе отсчета K).

Вывод формулы (3.140) для гравитационного смещения, сделанный В. Паули, основывался на преобразовании Лоренца и на твердо экспериментально установленном факте независимости темпа хода часов от их ускорения по отношению к инерциальной системе отсчета (по крайней мере, до ускорений $10^{14}\ g$).

Следовательно, отрицание реальности эффекта гравитационного смещения было бы равносильно отрицанию правильности преобразования Лоренца и результатов известных экспериментальных работ, основанных на эффекте Мёссбауэра (температурное красное смещение).

Следует отметить различие в подходе А. Эйнштейна и В. Паули к выводу формул для гравитационного смещения. В то время как А. Эйнштейн рассматривал процесс передачи периодических сигналов от одних часов к другим часам, В. Паули основывался непосредственно на преобразовании Лоренца.

Вывод формул для гравитационного смещения излагается вплоть до настоящего времени в том виде, как он был предложен А. Эйнштейном, В. Паули и др.

В весьма интересной статье А. Г. Баранов [147] отмечает, что корректное обоснование гравитационного смещения должно быть инвариантным в отношении скорости сигналов, передающих информацию о ходе сравниваемых часов.

А. Г. Баранов следующим образом обосновывает этот тезис: «Если гравитационное смещение действительно следствие различного хода времени, зависящего от гравитационного потенциала, то этот объективный факт должен проявиться при любом разумном способе сравнения часов. В частности, для такого сравнения принципиально пригодны сигналы любой скорости. В качестве наглядного примера можно привести следующий мысленный эксперимент. Пусть на горе установлен пулемет, стреляющий вниз с постоянной частотой. Находясь у подножья горы, мы желаем определить частоту выстрелов. Для этого мы можем сосчитать число выстрелов (вспышек) в секунду, которое мы видим, это будет ν_1. Мы можем также сосчитать число выстрелов в секунду, которое мы слышим, ν_2. Наконец, мы можем сосчитать число пуль, пролетающих мимо нас в секунду, ν_3. Физически очевидно, что три числа совпадают, т. е. $\nu_1=\nu_2=\nu_3$. Неравенство этих чисел означало бы, ввиду стационарности процесса, что часть пуль появилась неизвестно откуда, либо исчезла неизвестно куда».

Приведем здесь вывод А. Г. Баранова для величины гравитационного смещения, основанный на использовании релятивистского закона сложения скоростей.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K, которую в дальнейшем будем называть лабораторной системой, равномерно ускоренно движется система отсчета $\overline{K}$, в которой покоятся совершенно одинаковые стандартные часы A и B. Так как скорость и ускорение часов A и B относительно системы K в заданный момент совершенно одинаковы, то и темп их хода относительно этой системы должен быть совершенно одинаков, т. е. для продолжительности каждого такта этих часов (измеряемых в системе K) будем иметь $\tau_A=\tau_B$. Однако описанная картина будет выглядеть совсем другой с точки зрения системы $\overline{K}$. В этой системе действует гравитационное поле и между точками, где расположены часы A и B, имеет место определенная разность гравитационного потенциала. Нужно доказать, что если из места, где расположены часы A, будут подаваться сигналы с интервалами, равными τ_A по этим часам, то в месте расположения часов B эти сигналы будут восприниматься с интервалами $\tau_A+\Delta\tau$, измеряемыми с помощью часов B, ничем не отличающихся от часов A.

Итак, нужно доказать, что с точки зрения системы $\overline{K}$ темп хода часов A и B различен, так как имеем здесь эффект гравитационного смещения.

Предположим теперь, что в системе $\overline{K}$ рядом с часами B находится наблюдатель, который может непосредственно наблюдать ход часов B. Для того чтобы судить о ходе часов A, наблюдатель должен получать от этих часов периодические сигналы (которые могут передаваться, например, пулями), скорость которых относительно часов A принимаем равной w.

Рассмотрим сначала весь этот процесс, оставаясь в рамках ньютоновской механики.

Скорость пули, вылетевшей из некоторого источника в инерциальной системе отсчета K, будет равна

$$u=w+v, \tag{3.141}$$

где v — скорость источника в момент посылки сигнала. Здесь применен классический закон сложения скоростей. Так как в лабораторной системе отсчета гравитация отсутствует, то, очевидно, скорость пули, испущенной источником, будет в этой системе отсчета оставаться неизменной вплоть до момента встречи с приемником. Если время полета пули от A до B обозначить через t, то легко видеть, что должно иметь место следующее соотношение:

$$u(t)=(w+v)t=l+vt+{}^1/_2gt^2, \tag{3.142}$$

где l — расстояние между часами A и B; g — ускорение неинерциальной системы $\overline{K}$. Из уравнения (3.142) следует

$$t=\frac{w}{g}\left(1-\sqrt{1-\frac{2lg}{w^2}}\right). \tag{3.143}$$

Выражение (3.143) не зависит от скорости v. Это означает, что при любой скорости часов A интервалы времени между отправлениями двух последовательных сигналов источником, расположенным рядом с часами A, будут в точно-

сти равняться интервалу времени приема этих сигналов приемником, расположенным рядом с часами B.

Таким образом, в рамках классической ньютоновской механики никакого гравитационного смещения не существует. Этот вывод А. Г. Баранова можно было бы предвидеть, так как в ньютоновой механике время носит абсолютный характер.

Рассмотрим этот же процесс с точки зрения СТО [147]. Прежде всего отметим, что теперь вместо классического закона сложения скоростей (3.141) необходимо использовать релятивистский закон сложения скоростей (2.82), т. е.

$$u = \frac{w+v}{1+wv/c^2} = \frac{c^2(w+v)}{c^2+wv}. \qquad (3.144)$$

Примем далее, что скорость v не очень велика, так что можно пренебречь изменением расстояния l между часами A и B и изменением периодов τ часов A и B по отношению к инерциальной системе отсчета K как величинами высшего порядка малости. При указанных предположениях имеет место равенство

$$ut = l + wt + {}^1/_2 gt^2, \qquad (3.145)$$

откуда

$$t = \frac{u-v}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2lg}{(u-v)^2}}\right). \qquad (3.146)$$

Предположим теперь, что $v/w \ll 1$. Заметим, что этого всегда можно добиться, выбрав для рассматриваемого момента времени надлежащую лабораторную инерциальную систему отсчета K. Тогда приближенно имеем

$$t \approx \frac{l(c^2+wv)}{wc^2} = l\left(\frac{1}{w} + \frac{v}{c^2}\right). \qquad (3.147)$$

Так как за промежуток времени τ, разделяющий посылку двух последовательных сигналов, скорость неинерциальной системы отсчета $\overline{K}$ увеличится и станет равной $v+g\tau$, то разность времени прохождения двух последовательных сигналов будет равна

$$\Delta t = \Delta\tau = l\left(\frac{1}{w} + \frac{v+g\tau}{c^2}\right) - l\left(\frac{1}{w} + \frac{v}{c^2}\right) = \frac{lg\tau}{c^2}; \qquad (3.148)$$

$$\Delta\tau/\tau = (gl)/c^2.$$

Итак, А. Г. Баранов показал, что гравитационное смещение не зависит от скорости сигналов, применяемых для сравнения хода часов, и что оно — прямое следствие релятивистского закона сложения скоростей [7]. В приведенной выше работе [147] А. Г. Баранов вывел формулу для неоднородного гравитационного поля, полученную ранее А. Эйнштейном (формула (2)).

3.15.3. Гравитационное смещение и ньютонова механика. При изложении предложенного В. Паули вывода формулы для гравитационного смещения было показано, что отрицание реальности эффекта гравитационного смещения равносильно отрицанию справедливости преобразования Лоренца и экспериментально установленного факта независимости хода стандартных часов от их ускорения по отношению к инерциальной системе отсчета (по крайней мере до ускорения $10^{14}\,g$).

Итак, гравитационное смещение не только является реальным, но и существенно релятивистским эффектом.

Из предложенного вывода А. Г. Баранова также следует, что при передаче периодических сигналов от одних часов к другим (с помощью пулеметной очереди) при классическом подходе эффект гравитационного смещения отсутствует; приходим в рассматриваемой ситуации к формуле А. Эйнштейна для гравитационного смещения, если используется релятивистский закон сложения скоростей.

В связи с изложенным А. Г. Баранов замечает [147]: «Часто приходится сталкиваться с мнением, что существование гравитационного смещения совместимо с классической (дорелятивистской) теорией. Такое утверждение мы находим, например, у Петрова: «Дело в том, что эти формулы получаются и в классической механике» (прим. авт.: см. [148]). Однако совершенно ясно, что в классической теории не может быть гравитационного смещения. Действительно, в ньютоновой теории время имеет абсолютный характер, и ход идеальных часов (ход времени) не может зависеть от гравитационного потенциала».

Некоторые авторы [149, 150] пытались, однако, вывести формулу для гравитационного смещения, оставаясь в рамках ньютоновой механики. Они получили формулу для гравитационного смещения, исходя из соотношений $\mathscr{E}=mc^2$, $m=h\nu/c^2$, и предполагая, что гравитационное поле может быть взято в ньютоновом приближении. Другими словами, они рассматривают фотон как частицу, имеющую массу $m=h\nu/c^2$, которая свободно падает в гравитационном поле.

Пройдя разность потенциалов Ф, фотон должен изменить свою энергию, а следовательно, и частоту; отсюда получается формула

$$\delta\nu/\nu=\Phi/c^2.$$

По поводу этого рассуждения следует заметить следующее. Прежде всего отметим, что приведенный вывод противоречит изложенным выше результатом А. Эйнштейна, В. Паули, А. Г. Баранова и других, так как он связывает гравитационное смещение не с реальным характером зависимости хода часов и всех процессов от гравитационного потенциала, а с изменением энергии фотона.

Остановимся на энергетическом выводе подробнее. Здесь его авторы пользуются выражением СТО для инертной массы фотона $m=h\nu/c^2$, затем применяется слабый принцип эквивалентности, считая инертную массу фотона равной его гравита-

ционной массе, и, наконец, вводится гравитационное поле в ньютоновом приближении. В то же время в ньютоновом приближении полная энергия частицы с отличной от нуля (хотя и сколь угодно малой) массой покоя не меняется при свободном падении этой частицы. Конечно, было бы нелепо приписывать фотону отдельно кинетическую и потенциальную энергии, но вполне естественно в духе принципа соответствия считать, что полная энергия фотона при его движении в ньютоновом гравитационном поле не меняется. Следует также отметить, что предположение об изменении энергии фотона при его движении в ньютоновом гравитационном поле нарушает баланс энергии, так как ньютоновому гравитационному полю энергия не приписывается.

Итак, по мысли А. Эйнштейна, фотоны, испущенные из места расположения часов A с частотой ν_A, будут приняты в месте расположения часов B с частотой ν_{BA}, причем $\nu_A \neq \nu_{BA}$, и это произойдет не потому, что изменится энергия фотона, а потому, что темп хода времени, а следовательно, и хода часов в местах расположения часов A и B различен, если между точками расположения часов A и B есть разность гравитационного потенциала. Это обстоятельство подчеркивается во многих работах [43, 89, 151, 7].

Так, А. Г. Баранов пишет [147]: «Согласно Эйнштейну, все дело в системе отсчета. Часы приемника идут в $(1+\Phi/c^2)$ медленнее, чем часы источника. Именно поэтому частота фотона, измеренная часами приемника, оказывается в $(1+\Phi/c^2)$ раз больше, чем частота, измеренная часами источника... Таким образом, гравитационное смещение — кинематический эффект, не связанный с энергетическими соображениями».

Та же мысль, но в иной форме, подчеркивалась В. Паули при рассмотрении вращающейся системы отсчета. Таким образом, вопрос следует считать полностью разъясненным в рамках СТО.

В действительности только ОТО дает возможность рассчитать изменение энергии фотона при его движении в гравитационном поле. При этом расчеты показывают, что потеря энергии фотоном на гравитационное излучение дает изменение частоты на несколько порядков меньше, чем эффект гравитационного смещения [7, 151]. Таким образом, энергетическое истолкование гравитационного смещения нельзя считать правильным.

А. Эйнштейн неоднократно подчеркивал реальность гравитационного смещения; он считал этот эффект существенно релятивистским, связанным с реальным изменением хода времени, и следовательно, и со скоростью протекания физических процессов в зависимости от изменения величины гравитационного потенциала.

Таким образом, концепция А. Эйнштейна о сущности гравитационного смещения несовместима с представлением об абсолютном характере времени, принятом в ньютоновой механике.

3.15.4. Гравитационное смещение и эффект Доплера (элементарная теория). Особый интерес представляет собой наложение эффекта доплеровского и гравитационного смещения. В работе В. Л. Гинзбурга [67] показано, что в первом приближении оба эффекта просто складываются:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \cong \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{\Phi}{c^2}.$$

В [147] А. Г. Баранов, пользуясь изложенным в п. 3.15.2 методом, рассмотрел также ряд нестационарных процессов.

Рассмотрим некоторые из этих результатов.

Пример 2. Источник и приемник жестко связаны и движутся с равномерной скоростью (по отношению к неинерциальной системе отсчета K). В этом случае воспринимаемая частота — результат чисто гравитационного смещения и этот процесс ничем не отличается от случая, когда источник и приемник неподвижен.

Пример 3. Источник и приемник движутся равномерно, но с различными скоростями (относительная скорость $v_{\text{отн}}$). В этом случае к чисто гравитационному смещению $\Delta\nu/\nu = \Phi/c^2$ добавляется доплеровское смещение, зависящее от скорости $v_{\text{отн}}$ и скорости принимаемых сигналов

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{\text{Д}} \cong \frac{v_{\text{отн}}}{w}.$$

Заметим, что к такому же результату пришел В. Л. Гинзбург [67].

Пример 4. Источник и приемник жестко связаны и свободно падают в гравитационном поле. Такое движение эквивалентно инерциальному движению в отсутствие гравитации. Гравитационное смещение равно нулю.

Пример 5. Приемник неподвижен, а источник падает. В этом случае воспринимаемая частота равняется

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{gl}{w^2}\right),$$

где w — скорость сигнала. К этому добавляется доплер-эффект $v_{\text{отн}}/w$, где $v_{\text{отн}}$ — скорость источника относительно приемника в момент посылки сигнала. В случае, когда $v_{\text{отн}}=0$, $w=-c$, имеем, что воспринимаемая частота $\nu=\nu_0\,(1+gl/c^2)$, т. е. равна гравитационному смещению при неподвижном источнике.

Пример 6. Источник неподвижен, а приемник свободно падает. Здесь к гравитационному смещению и доплер-эффекту $v_{\text{отн}}/w$ ($v_{\text{отн}}$ относится здесь к моменту посылки сигнала) добавляется еще дополнительный доплер-эффект gl/w^2, так как скорость приемника за время полета сигнала изменяется на величину (gl/w). Для случая, когда сигналы световые, дополнительный доплер-эффект равен gl/c^2 и этот фиолетовый дополнительный эффект компенсирует красное гравитационное смещение. Таким образом, суммарный сдвиг равняется $v_{\text{отн}}/c$. Суммарный сдвиг равняется нулю, если в момент посылки сигнала $v_{\text{отн}}=0$.

3.15.5. Гравитационное смещение в ОТО. Согласно ОТО собственное (действительное) время, отсчитываемое движущимися

часами, пропорционально длине пройденной ими времени-подобной мировой линии, т. е.

$$\tau = \int_0^{x^0} \sqrt{g_{00} + 2g_{i0}\frac{dx^i}{dx^0} + g_{nm}\frac{dx^n}{dx^0}\frac{dx^m}{dx^0}}\, dx^0,$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad n, m = 1, 2, 3). \tag{3.149}$$

В частном случае, когда часы покоятся в заданной системе отсчета, будем иметь

$$\tau = \int \sqrt{g_{00}}\, dx^0. \tag{3.150}$$

Заметим, что интегралы (3.149) и (3.150) инвариантны и не зависят от того, с помощью каких координат произведена параметризация пространственно-временного континуума.

Формулу (3.150) можно считать в настоящее время экспериментально доказанной. Выше отмечалось, что экспериментальные исследования, связанные с эффектом Мёссбауэра (температурное красное смещение), показали, что релятивистское замедление времени зависит только от скорости и не зависит от ускорения движущихся часов, если сравнивать их показания с показаниями неподвижных (в инерциальной системе отсчета) часов, мимо которых они в данный момент пролетают.

Таким образом, изменение показаний часов может вычисляться по формуле из СТО, которую следует считать справедливой до ускорений, достигающих величин до 10^{14} g, а может быть, и вполне точной. Пересчет формулы СТО к системе отсчета, в которой часы покоятся, приводит к формуле (3.150).

Эффект гравитационного смещения в поле тяготения подробно исследовался В. Л. Гинзбургом [67] и другими авторами [7, 97].

Остановимся на этих работах.

Пример 7. Допустим, что движение источника *1* и приемника *2* сигналов заданы соответственно $x_1^i(t)$ и $x_2^i(t)$ $(i=0, 1, 2, 3)$. Если свет испускается источником света 1 с периодом δt_1 в координатном времени, тогда в собственном (истинном) времени этот период может быть вычислен по формуле

$$\delta\tau_1 = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^0}\frac{dx^\beta}{dx^0}}\, x_1^i(t_1)\,\delta t_1. \tag{3.151}$$

Указанные сигналы будут приниматься приемником *2* с периодом δt_2 в координатном времени, а следовательно, с периодом $\delta\tau_2$ в собственном времени. Период $\delta\tau_2$ может быть вычислен по формуле

$$\delta\tau_2 = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dx^0}\frac{dx^\beta}{dx^0}}\, x_2^i(t_2)\,\delta t_2. \tag{3.152}$$

Координатное время t_1 и t_2 в местах расположения источника *1* и приемника *2* связано соотношением

$$t_2 = f(t_1); \tag{3.153}$$

тогда для периодов δt_2 и δt_1 имеем

$$\delta t_2 = \frac{df(t_1)}{dt_1}\,\delta t_1. \tag{3.154}$$

Но периоды δt_1 и δt_2 пропорциональны измеряемым на источнике *1* и приемнике *2* длинам волн $\lambda_1(t_1)$ и $\lambda_2(t_2)$, поэтому, учитывая (3.151) и (3.152), получим

$$\frac{\lambda_2(t_2)}{\lambda_1(t_1)} = \frac{\sqrt{g_{\alpha\beta}\,(dx^\alpha/dx^0)\,(dx^\beta/dx^0)}\;x_2^i(t_2)}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\,(dx^\alpha/dx^0)\,(dx^\beta/dx^0)}\;x_1^i(t_1)}\,\frac{df(t_1)}{dt_1}. \tag{3.155}$$

Для частот ν_1 и ν_2 имеет место обратное соотношение.

Пример 8. Допустим, что в примере *7* источник *1* и приемник *2* покоятся в постоянном гравитационном поле. В этом случае, как известно [97, с. 188], $df(t_1)/dt_1 = 1$ и, следовательно, из (3.155) вытекает формула гравитационного спектрального смещения.

$$\nu_2/\nu_1 = [g_{00}(1)/g_{00}(2)]^{1/2}. \tag{3.156}$$

В слабом гравитационном поле можно принять $g_{00} = 1 - 2\Phi/c^2$, откуда с той же точностью следует

$$\delta\nu/\nu_1 = (\nu_2 - \nu_1)/\nu_1 = \Phi/c^2. \tag{3.157}$$

Это и есть приведенная выше формула Эйнштейна.

Пример 9. В случае поля Шварцшильда, описываемого метрикой (3.119), т. е.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-2\mu/r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

для неподвижного источника и приемника имеем

$$\delta\nu/\nu_1 = \mu/r_2 - \mu/r_1. \tag{3.158}$$

Если v_r — радиальная скорость источника света, а приемник неподвижен, то [97, с. 188]

$$df(t_1)/dt_1 = 1 - v_r/c + \ldots \tag{3.159}$$

и из формулы (3.155) следует

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1 - v_r/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}. \tag{3.160}$$

Полученная формула учитывает эффекты Доплера и гравитационного смещения, причем в первом приближении (как отмечалось) оба эффекта просто складываются.

3.16. Интегральный эффект гравитационного смещения и сверхсветовые скорости. Нарушение причинности и объекты 1-го и 2-го рода в теории относительности

3.16.1. О существовании сверхсветовых скоростей в кинематике теории относительности. Вопрос о существовании частиц, движущихся со сверхсветовой скоростью (так называемых тахионов), рассматривался в очень многих работах (см., например, [7, 153]). С другой точки зрения этот вопрос рассматривался в [67], где шла речь об эффекте Вавилова — Черенкова и эффекте Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме. В [67] речь идет, однако, не об отдельных частицах, которые не могут двигаться со скоростью $v > c$, а о некоторых совокупностях таких частиц, последовательно являющихся источником излучения.

В настоящем разделе в продолжении и развитии п. 2.14 будет показано, что в кинематике теории относительности для волновых процессов определенного типа существуют сверхсветовые скорости. Однако никакого противоречия с принципами теории относительности здесь нет, так как упомянутые волновые процессы не связаны с переносом энергии, импульса или информации от одной точки пространственно-временного континуума к другой. В этом случае имеем дело согласно классификации главы 1 с объектом второго рода.

3.16.2. О возможности существования сверхсветовых скоростей в кинематике СТО. В п. 2.14 уже был приведен пример существования сверхсветовых скоростей в кинематике СТО. Как отмечалось, в рассматриваемом в п. 2.14 примере нет никакого противоречия с теорией относительности, так как при этом от лампочки к лампочке нет передачи ни энергии, ни импульса, а следовательно, нет и передачи информации, т. е. имеем дело с объектом второго рода по данной в главе 1 классификации.

Здесь в развитие результатов п. 2.14 рассмотрим более сложные примеры, имеющие принципиальный характер для понимания основ теории относительности и построения алгоритмов управления релятивистскими системами.

Заметим, что из релятивистской инвариантности тех или иных уравнений отнюдь не следует, что любая заданная поверхность

$$\varphi(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \qquad (3.161)$$

должна распространяться в 3-мерном пространстве со скоростью, равной скорости света c. Приведем пример, имеющий принципиальное значение.

Пример 1. Определим скорость распространения поверхности

$$S(x^1, x^2, x^3, t) = \text{const}, \tag{3.162}$$

где S удовлетворяет релятивистскому уравнению (2.214) Гамильтона—Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{3.163}$$

Применяя формулу (2.207), получим

$$v^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)^2. \tag{3.164}$$

Из (3.163) и (3.164) следует

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 \Big/ \left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - m^2c^4\right], \tag{3.165}$$

причем, как легко видеть из (3.163), всегда имеет место неравенство

$$(\partial S/\partial t)^2 > m^2c^4. \tag{3.166}$$

Таким образом, поверхность $S=\text{const}$, несмотря на то, что описывается строго релятивистским уравнением Гамильтона — Якоби (3.163), распространяется со *сверхсветовой скоростью.*

Легко видеть, что в примере 1 никакого противоречия с теорией относительности, конечно, нет. В самом деле, функция действия S является, как известно (см. п. 2.21), потенциалом для энергии-импульса и с перемещением поверхности $S=\text{const}$ не связано перемещение каких-либо частиц, которые всегда движутся со скоростью, меньшей скорости света (см. с. 28).

В самом деле, $p_i = \partial S/\partial x^i$ относится к различным частицам, проходящим в каждый данный момент времени через точку с координатами $x^i = x^i(t)$ $(i=1, 2, 3)$; другими словами, здесь имеем дело с движением континуума экземпляров в эйлеровом представлении. Таким образом, передача энергии и импульса всегда происходит со скоростью, меньшей скорости света или равной ей (последнее выполняется для фотонов при $m=0$). Следовательно, функция действия S также является *объектом второго рода.*

Рассмотрим теперь еще один имеющий принципиальное значение случай.

3.16.2. Интегральный эффект гравитационного смещения и сверхсветовые скорости. Введем инерциальную систему отсчета K, в которой покоятся системы часов $\ldots A_{-1}, A_0, A_1, \ldots$, снабженные ракетными двигателями, как это показано на рис. 3.3. Примем также, что часы $\ldots A_{-1}, A_0, A_1, \ldots$ синхронизованы с часами системы K.

Предположим, что на часах $\ldots, A_{-1}, A_0, A_1, \ldots$ в момент $t=0$ (по часам системы отсчета K) одновременно включаются ракетные двигатели. Допустим, что существует еще одна инерциональная система отсчета $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$, которая движется относи-

тельно системы K с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x системы K. Как будет выглядеть процесс включения двигателей часов ..., A_{-1}, A_0, A_1, ... с точки зрения наблюдателей в системе $\bar{K}$?

Здесь имеет место полная аналогия с рассмотренным в п. 2.14 случаем вспышек лампочек, одновременных по часам системы S^B. Приведем, однако, здесь подробно необходимые формулы [7].

Воспользуемся преобразованием Лоренца. По часам системы $\bar{K}$ часы ..., A_{-1}, A_0, A_1, ... будут включаться в моменты времени

$$\ldots, \bar{t}_{A_{-1}} = \frac{(-v/c^2)\, l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \bar{t}_{A_0} = 0; \quad \bar{t}_{A_1} = \frac{(+v/c^2)\, l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \ldots$$

В приведенных формулах l_0 — расстояние между часами, измеренное в системе K.

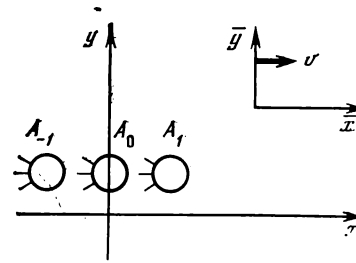


Рис. 3.3. Интегральный эффект гравитационного смещения

Как и следовало ожидать, процесс включения ракетных двигателей, одновременный по часам системы K (предполагается, что каждый двигатель включается в тот момент, когда часы A_k показывают время $t=0$), оказывается неодновременным с точки зрения системы $\bar{K}$, а именно: часы A_1 включаются раньше, чем часы A_0, часы A_0 включаются раньше, чем часы A_{-1}, и т. д. Этот процесс с точки зрения наблюдателей системы $\bar{K}$ будет представляться в виде волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x. Найдем скорость распространения этой волны. Ракетный двигатель часов A_k включается (по часам системы $\bar{K}$) в момент

$$\bar{t}_{A_k} = \frac{(-v/c^2)\, k l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.167}$$

а ракетный двигатель часов A_{k-1} включился (по часам системы $\bar{K}$) в момент

$$\bar{t}_{A_{k-1}} = \frac{(-v/c^2)\,(k-1)\, l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.168}$$

Разность между моментами включения часов A_k и A_{k-1} (по часам системы $\bar{K}$) будет равняться

$$\bar{t}_{A_k} - \bar{t}_{A_{k-1}} = \frac{(-v/c^2)\, l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.169}$$

Расстояние между часами A_k и A_{k-1}, измеренное в системе $\bar{K}$ до

включения двигателей, равняется $l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Поэтому, учитывая формулу (3.169), получаем

$$\frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{(-v/c^2)\,l_0/\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{c^2}{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{c^2}{v}+v. \qquad (3.170)$$

Из (3.170) видно, что волна включения двигателей может распространяться со *сверхсветовой скоростью* в отрицательном направлении оси x (скорость ее может меняться от 0 до ∞).

Итак, получили сверхсветовую скорость распространения волны включения двигателей *непосредственно из преобразования Лоренца*. Нетрудно видеть, что, как и ранее в п. 2.14 и 3.16.1, никакого противоречия с теорией относительности здесь нет. В самом деле, двигатель любых часов A_k включается независимо от включения других двигателей в тот момент, когда стрелка часов A_k показывает время $t=0$ (для этого нетрудно придумать простое техническое устройство, связанное с часами A_k).

Таким образом, включение двигателей не связано с передачей энергии и импульса, а следовательно, и информации от одних часов к другим (как отмечалось, двигатели включаются независимо друг от друга). Поэтому сверхсветовая скорость распространения волны включения двигателей в системе $\bar{K}$ ни в коем случае не противоречит принципам теории относительности. Здесь имеем дело как бы с «рекламной» скоростью (см. п. 2.14), когда электрические лампочки включаются последовательно (и независимо) друг от друга. Таким образом, в данном случае также имеем дело с *объектом второго рода*.

Предположим теперь, что все двигатели будут работать в течение одного и того же времени t (по часам системы K), пока их скорость не станет равной $+v$ (т. е. скорости движения системы $\bar{K}$ относительно системы K). Итак, в момент выключения всех двигателей (по часам системы K) все они окажутся покоящимися в системе $\bar{K}$ по часам системы K.

Так как все часы и все связанные с ними двигатели предполагаются совершенно одинаковыми, то, очевидно, все часы будут двигаться относительно системы K совершенно одинаково. Из этого обстоятельства можно сделать два вывода: а) расстояние между часами l_0 (с точки зрения системы K) не изменится за время движения, поэтому расстояние между этими часами, измеренное в системе $\bar{K}$, после того как они в ней успокоятся, должно увеличиться и равняться $l_0/\sqrt{1-\beta^2}$; б) все часы A_k в момент выключения двигателей будут одновременно (по часам системы K) показывать одно и то же время τ.

Из приведенных выводов можно, в свою очередь, вывести важные следствия. Если все часы A_k в тот момент, когда они успокоились в системе $\bar{K}$ (по часам системы K), показывают одно и то же время, то это значит, что в системе $\bar{K}$ они не синхронизованы. Для того чтобы эти часы были синхронизованы в системе $\bar{K}$, они должны иметь (одновременно с точки зрения

системы K) следующие показания:

$$\ldots,\ \bar{t}_{A_1} = \frac{t - (v/c^2)(x_0 + l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \bar{t}_{A_0} = \frac{t - (v/c^2)x_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\bar{t}_{A_{-1}} = \frac{t - (v/c^2)(x_0 - l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \ldots \tag{3.171}$$

Здесь x_0 — координата часов A_0 в системе K в тот момент, когда их скорость достигла $+v$ и они успокоились.

Итак, часы A_1 «ушли» по отношению к часам A_0 вперед (по часам системы $\bar{K}$) на величину

$$\Delta t_{A_1A_0} = \frac{v}{c^2} l_0/\sqrt{1-\beta^2}, \tag{3.172}$$

а часы A_0, в свою очередь, «ушли» вперед по отношению к часам A_{-1} на

$$\Delta t_{A_0A_{-1}} = \frac{v}{c^2} l_0/\sqrt{1-\beta^2} \tag{3.173}$$

и т. д.

Результаты, записанные в формулах (3.172), (3.173), относятся к тому времени в системе $\bar{K}$, когда часы $\ldots, A_1, A_0, A_{-1}, \ldots$ уже успокоились в этой системе.

Приведенные формулы (3.172), (3.173) дают точное значение *интегрального эффекта гравитационного смещения показаний часов.* В самом деле, для наблюдателя, связанного с часами A_0, полученный результат может быть просто объяснен тем, что за время действия гравитационного поля часы A_1 шли быстрее, так как находились в области более высокого гравитационного потенциала, а часы A_{-1} шли медленнее, так как находились в области более низкого гравитационного потенциала.

Итак, интегральный подход к оценке влияния ускорения на физические процессы дал возможность получить точное интегральное значение гравитационного смещения показаний часов для рассматриваемого случая.

В приведенном анализе не вводилось каких-либо специальных дополнительных гипотез. В конечном счете полученный результат является прямым следствием преобразования Лоренца. Конечно, приведенные формулы дают интегральный результат влияния гравитационного смещения на показания часов за время действия гравитационного поля. Интересно отметить, что этот интегральный результат не зависит от истории процесса, а зависит только от той скорости $v = \text{const}$, с которой движется система $\bar{K}$ по отношению к системе K.

Указанный результат относится только к интегральному эффекту гравитационного смещения показаний часов, т. е. к разности показаний часов A_k и A_{k-1} в системе отсчета $\bar{K}$ в соответствии с установленной синхронизацией часов в этой системе. Что же касается абсолютного значения показаний часов A_k в момент, когда они останавливаются в системе $\bar{K}$, то оно, разумеется, зависит от истории процесса.

Рассмотрим теперь процесс выключения двигателей с точки зрения системы отсчета $\bar{K}$. Во-первых, следует отметить, что с точки зрения системы $\bar{K}$ часы ..., A_1, A_0, A_{-1}, ... останавливаются в ней неодновременно (в то время как с точки зрения системы K они останавливаются в системе $\bar{K}$ одновременно), а именно часы ..., A_1, A_0, A_{-1}, ... будут останавливаться в системе $\bar{K}$ с точки зрения этой системы к моменту времени

$$\ldots, \bar{t}_{A_1} = \frac{t - (v/c^2)(x_0 + l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_0} = \frac{t - (v/c^2) l_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\bar{t}_{A_{-1}} = \frac{t - (v/c^2)(x_0 - l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \ldots$$

Таким образом, с точки зрения системы $\bar{K}$ выключение двигателей, связанных с часами, будет носить характер волнового процесса, распространяющегося со скоростью (см. формулы (3.170))

$$-l_0/\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{v}{c^2}\,\frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{c^2}{v}. \tag{3.174}$$

Эта волна будет распространяться в отрицательном направлении оси x *со сверхсветовой скоростью.* Заметим, что скорость распространения волны выключения двигателей с точки зрения системы отсчета $\bar{K}$ отличается от соответствующей величины в системе K (в системе K они выключаются одновременно). Это различие объясняется тем обстоятельством, что в первом случае наблюдатели системы $\bar{K}$ измеряли расстояние между часами A_k, покоящимися в системе K, а во втором случае они измеряют расстояние между этими же часами, но уже покоящимися в системе $\bar{K}$. Разумеется, в этом случае, так же как и в рассмотренном случае волны включения двигателей, никакого противоречия с теорией относительности нет, несмотря на наличие сверхсветовой скорости распространения этой волны. Здесь, так же как и в предыдущем случае, распространение волны не связано с передачей энергии и импульса, а следовательно, и информации. Таким образом, получаем объект второго рода.

Сделаем еще одно замечание, имеющее принципиальное значение. По существу, в рассматриваемом примере имели дело с тремя системами отсчета: 1) инерциальной системой K; 2) инерциальной системой $\bar{K}$ и 3) неинерциальной системой, связанной с часами A_0.

Рассматриваемый процесс был подробно проанализирован с точки зрения обеих инерциальных систем K и $\bar{K}$. Однако с точки зрения неинерциальной системы отсчета, связанной с часами A_0, можно судить об интегральном эффекте гравитационного смещения показаний часов, вызванного действующим в этой системе гравитационным полем. Никаких метрических соотношений (т. е. вопросов измерения пространственных расстояний, промежутков времени, синхронизации и т. д.) в этой неинерциальной системе не устанавливалось. Наблюдатель, связанный с часами A_0, может знать, что все двигатели, связанные с ча-

сами ..., A_{-1}, A_0, A_1, ..., должны быть включены одновременно с точки зрения системы отсчета K. Однако после включения двигателей наблюдатель, связанный с часами A_0, оказывается в совершенно другой и притом неинерциальной системе отсчета. Поэтому для него события, которые считались в системе K одновременными, больше не могут рассматриваться как одновременные (заметим, что хотя неинерциальная система отсчета, связанная с часами A_0, существует конечное время, наблюдатель, связанный с часами A_0, может за время существования этой системы судить о событиях, сколь угодно удаленных во времени как в прошлое, так и будущее).

Наконец, когда часы A_0 останавливаются в системе $\overline{K}$, наблюдатель, связанный с этими часами, опять оказывается в новой пространственно-временной ориентации. Теперь он должен судить о событиях, происшедших раньше или позже, да и вообще обо всех метрических соотношениях уже с точки зрения системы отсчета $\overline{K}$. В частности, например, если для наблюдателей, находящихся в системе K время между включением и выключением всех двигателей конечно, то для наблюдателя, связанного с часами A_0, после его «перелета» в систему этот процесс, как видели, не будет конечным во времени: *он примет характер волны, распространяющейся со сверхсветовой скоростью, начавшейся в бесконечно далеком прошлом и заканчивающейся в бесконечно далеком будущем.*

Более подробно, в тот момент, когда часы A_0 останавливаются в системе $\overline{K}$, все часы ..., A_1, A_2, A_3, ... уже будут покоиться в этой системе отсчета, причем в системе $\overline{K}$ часы A_1 остановились раньше часов A_0 на промежуток времени $v^2 l_0/c\sqrt{1-\beta^2}$, а часы A_2 остановились раньше часов A_0 на тот же промежуток времени и т. д. Что же касается часов A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, то в тот момент, когда часы A_0 остановились в системе $\overline{K}$, эти часы еще будут двигаться, и следовательно, ракетные двигатели на них еще не будут выключены, а стрелки этих часов еще не будут показывать время τ. Так проявляется относительность всех процессов, происходящих в природе. Все дело в системах отсчета, с точки зрения которых описываются происходящие в природе процессы.

В рассмотренных примерах не анализировались метрические соотношения, существующие в неинерциальной системе отсчета, связанной с часами A_0, а ограничились только интегральной оценкой гравитационного смещения. Вместе с тем детальный анализ метрических соотношений в неинерциальных системах имеет исключительно важное значение. В последние годы в этом направлении появился ряд интересных работ.

Отметим, что в приведенном рассмотрении проявляется своеобразная относительность конечного и бесконечного. В самом деле, в то время как в системе K между моментом включения всех двигателей и выключения прошло конечное время, в системе $\overline{K}$ этот процесс растягивается на время от $-\infty$ до ∞.

Из изложенного следует, что наличие сверхсветовых скоростей в объектах второго рода СТО и ОТО не приводит к нарушению закона причинности и находится в полном согласии с постулатами теории относительности. Наличие подобных объектов уже в рамках классической релятивистской теории имеет

большое значение при построении модели и алгоритмов управления релятивистской системой, так как управление связано с передачей информации. Таким образом, модель релятивистской системы и алгоритм управления должны описываться в терминах объекта первого рода. Аналогичный вывод имеет место и для квантовых релятивистских систем (см. гл. 4).

3.17. Космологические модели

В 1922 г. советский ученый А. А. Фридман показал, что гравитационные уравнения А. Эйнштейна имеют, помимо статических, и нестационарные решения, приводящие к выводу о возможности расширения пространственно-замкнутой Вселенной (см. подробнее [88, 97, 133, 136, 139—146, 155—169]). А. А. Фридман искал решение уравнений Эйнштейна для однородной и изотронной замкнутой Вселенной в виде [156]

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\,[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)\,],$$

где величина радиуса Вселенной $a(t)$ должна быть найдена из соответствующих уравнений гравитационного поля.

В [155] было показано, что при выполнении некоторых условий величина $a(t)$ неограниченно возрастает. Так возникла модель расширяющейся Вселенной.

Нестационарное решение гравитационных уравнений Эйнштейна получило убедительное подтверждение в наблюдениях. В начале 20-х годов И. Слайфер установил, что в спектрах всех галактик наблюдается красное смещение. Основываясь на этом результате, Р. Хаббл в 1929 г. нашел, в свою очередь, что с увеличением расстояния красное смещение увеличивается. Наблюдения И. Слайфера и Р. Хаббла были продолжены рядом исследователей (Мильтон и др.). При этом был использован, в частности, 508-сантиметровый рефлектор Паломарской обсерватории. В результате новых наблюдений расстояния от Земли до галактик пришлось сильно увеличить по сравнению с данными Хаббла, однако в целом закон Хаббла подтвердился. Таким образом, галактики с огромной скоростью удаляются друг от друга. Были найдены космические объекты (например, группа галактик в созвездии Гидры), удаляющиеся от нас с гигантской скоростью — красное смещение этих галактик указывало на одну пятую скорости света. Сравнительно недавно для ряда квазаров (ЗСУ и др.) И. Шмидт нашел красное смещение, соответствующее трем пятым скоростям света!

Для космологии принципиально важное значение наряду с открытиями Р. Хаббла, имеет обнаружение А. Пензиасом и Р. Вильсоном реликтового излучения (теплового фонового космического излучения). Открытие теплового фонового излучения (за которое Арно Пензиас и Роберт Вильсон удостоены в 1978 г. Нобелевской премии) говорит в пользу «горячей» модели Вселенной [158]. История этого открытия достаточно подробно рассмотрена в [143].

Наблюдения, таким образом, находятся в согласии с нестационарным решением уравнений Эйнштейна. Следует заметить также, что такие космологические явления, как гравитационный коллапс, выделение грандиозных количеств

энергий и другие могут быть адекватно поняты на основе ОТО [88, 133, 156—169 и др.].

Релятивистская астрофизика имеет громадное познавательное значение. В связи с интенсивным освоением космического пространства исследования космологических моделей приобретают громадное познавательное значение.

Более подробно затрагиваемые вопросы рассмотрены с позиции теории динамических систем в [118, 146].

В СТО законы сохранения энергии и импульса вещества и электромагнитного поля записываются в виде четырех уравнений

$$\partial T_i^k/\partial x^k = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{3.175}$$

В гравитационном поле эти уравнения принимают вид

$$\nabla_k T_i^k = 0. \tag{3.176}$$

Однако, как известно [88, 133, 139], в таком виде уравнения (3.176) не выражают собой закон сохранения каких-либо величин в ОТО. Было сделано предположение, что в (3.176) не учитывается энергия-импульс самого гравитационного поля.

Многими авторами были сделаны попытки приписать гравитационному полю такие значения энергии-импульса, которые обеспечили бы сохранение полной энергии и полного импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых. Однако эти попытки пока не привели к удовлетворительным результатам. Эта проблема продолжает обсуждаться в специальной литературе до настоящего времени. Здесь можно указать на появившиеся в последнее время интересные работы [139, 171, 172 и др.].

3.18. О некотором возможном обобщении уравнений гравитационного поля Эйнштейна

3.18.1. Как известно, в основу изложения теории гравитационного поля Эйнштейна принимается принцип эквивалентности и вытекающие из него равенства инертной и гравитационной масс частицы. Далее показывается необходимость введения искривленного (риманового) пространства и еще ряда допущений, сформулированных в п. 3.6 и 3.8, после чего уравнения гравитационного поля выводятся почти однозначно.

Вместе с тем, как показано в п. 3.13, из уравнений Эйнштейна в нулевом приближении может быть получен закон гравитации Ньютона, а также многие другие следствия, подтверждающие ОТО. Эти следствия изложены в пп. 3.13—3.17. Однако уравнения гравитационного поля Эйнштейна могут быть получены путем довольно естественного обобщения уравнений теории гравитационного поля Ньютона.

В основе теории гравитационного поля Ньютона лежит следующее уравнение для гравитационного потенциала (см. п. 3.13, формула (3.129)):

$$\partial^2\varphi/\partial x^{12}+\partial^2\varphi/\partial x^{22}+\partial^2\varphi/\partial x^{32}=\varkappa\rho, \tag{3.177}$$

или

$$\nabla^2\varphi=\varkappa\rho, \tag{3.178}$$

где ρ — плотность массы вещества; $\varkappa$ — гравитационная постоянная; φ — гравитационный потенциал Ньютона. Однако в СТО (и, следовательно, в ОТО) вещество описывается не только его плотностью ρ, но симметричным тензором второй валентности T_{ik}, имеющим 10 компонент, причем $T_{00}=\varkappa\rho$.

Следовательно, для описания гравитационного поля необходимо вместо скаляра φ (ньютонова потенциала) ввести симметричный тензор второй валентности для потенциалов гравитационного поля φ_{ik}. Далее, очевидно, в общем случае, когда рассматривается движение материальных частиц, необходимо вместо оператора Лапласа ∇^2 ввести оператор Даламбера $\Box$ (который релятивистски инвариантен). Таким образом, вместо одного уравнения (3.178) в качестве первого обобщения теории гравитации Ньютона приходим к системе 10 уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial x^{12}}+\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial x^{22}}+\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial x^{32}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial t^2}=\varkappa T_{ik} \tag{3.179}$$

или

$$\Box\varphi_{ik}=\varkappa T_{ik}. \tag{3.180}$$

Полученные уравнения (3.179) по существу совпадают с уравнениями (3.115) слабого гравитационного поля Эйнштейна, т. е. с уравнениями для слабых гравитационных волн.

Однако поскольку в уравнениях (3.180) задан оператор Даламбера, написанный для плоского пространства, то события, описываемые этими уравнениями, также должны разыгрываться в плоском псевдоевклидовом пространстве СТО. Если в этом пространстве ввести криволинейные координаты с метрическим тензором g_{ik}, то уравнения (3.180) могут быть записаны в виде

$$g_{lm}\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial x^n\,\partial x^m}=-\varkappa T_{ik}. \tag{3.181}$$

Здесь следует подчеркнуть, что при этом остаемся по-прежнему в плоском псевдоевклидовом пространстве СТО, т. е. все компоненты тензора Римана — Кристоффеля R_{iknm}, образованные с помощью компонент метрического тензора g_{ik} криволинейной системы координат, равны нулю (см. Приложение 1).

Можно показать вместе с тем, что единственное линейное обобщение уравнений второго порядка (3.181) может быть записано в виде

$$\widehat{\Box}\,g_{ik}=g_{nm}\left[\frac{\partial^2\varphi_{im}}{\partial x^n\,\partial x^k}+\frac{\partial^2\varphi_{nk}}{\partial x^i\,\partial x^m}-\frac{\partial^2\varphi_{ik}}{\partial x^n\,\partial x^m}-\frac{\partial^2\varphi_{nm}}{\partial x^k\,\partial x^i}\right]=\varkappa T_{ik}. \tag{3.182}$$

Здесь левая часть (3.182) является симметричным по индексам i, k тензором второй валентности, что и требуется (это условие необходимо, так как T_{ik} также симметричен по индексам i, k). Эти уравнения можно рассматривать как второй этап обобщения теории гравитации Ньютона. Уравнения (3.182), однако, не могут рассматриваться как уравнения гравитационного поля, так как они линейны. В самом деле, как отмечалось, благодаря гравитационному дефекту массы уравнения гравитационного поля должны быть нелинейными.

Основное значение приобретает тензор Римана — Кристоффеля, имеющий вид (см. Приложение 1)

$$R_{iknm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^n \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{nk}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^n \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{nm}}{\partial x^k \partial x^i}\right] + \\ + g_{\mu\nu}\left[\Gamma^{\mu}_{nk}\Gamma^{\nu}_{im} - \Gamma^{\mu}_{nm}\Gamma^{\nu}_{ik}\right]. \qquad (3.183)$$

Обратим внимание, что первое слагаемое, стоящее в квадратных скобках (3.183) в тензоре Римана — Кристоффеля, является линейной комбинацией от вторых производных метрического тензора g_{ik} (ср. с (3.182)). Введем теперь уже известный тензор Эйнштейна вида $R_{ik}=g_{nm}R_{iknm}$. Если следовать указанной идеи А. Эйнштейна о геометрическом характере гравитационного поля, отождествив тензор поля φ_{ik} с метрическим тензором g_{ik}, то уравнения поля можно было бы попытаться записать в виде

$$R_{ik}=\varkappa T_{ik}. \qquad (3.184)$$

Уравнения (3.184) нелинейны (что, как отмечалось, является обязательным требованием), а уравнения (3.182) являются линейным приближением по отношению к (3.184). Однако уравнения (3.184) не могут считаться правильными уравнениями гравитационного поля. В самом деле, в псевдоевклидовом пространстве СТО должно выполняться требование (3.175), т. е.

$$\frac{\partial T^i_k}{\partial x^i} = 0, \qquad (3.185)$$

выражающие закон сохранения энергии-импульса. В криволинейных координатах это выражение, как отмечалось, принимает вид (3.176), т. е.

$$\nabla_i T^i_k = 0, \qquad (3.186)$$

где ∇_i — символ ковариантного дифференцирования. Естественно, что требование (3.186) должно выполняться и в римановом пространстве ОТО.

Нетрудно убедиться, однако, что левая часть уравнения (3.184) требованию (3.186) не удовлетворяет. Поэтому уравнения (3.184) не могут рассматриваться как правильные уравнения гравитационного поля. Правильные уравнения гравитационного поля, удовлетворяющие всем перечисленным требова-

ниям (в том числе и требованию (3.186)) и содержащие старшие (вторые) производные только линейно, могут иметь только следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}, \tag{3.187}$$

т. е. уравнения Эйнштейна (3.94).

Рассмотрение уравнений гравитационного поля началось с обсуждения теории гравитационного поля Ньютона и затем путем последовательных обобщений, вытекающих из физической сущности рассматриваемой проблемы, пришли к уравнениям Эйнштейна, для которых, таким образом, теория гравитации Ньютона является первым (или нулевым) приближением. Возможно, однако, дальнейшее обобщение уравнений Эйнштейна.

3.18.2. Рассмотрим 4-мерное риманово пространство с метрическим тензором $g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Метрику рассматриваемого пространства будем считать неопределенной, т. е. $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \gtrless 0$; причем, как обычно, элемент дуги мировой линии ds будем считать времени-подобной, если $ds^2 > 0$, изотропным, если $ds^2 = 0$, и пространственно-подобным, если $ds^2 < 0$. С помощью тензора Эйнштейна R_{ik} могут быть образованы дифференциальные инварианты второго порядка рассматриваемого риманового пространства следующего вида:

$$R_1 = g_{ik} R^{ik}, \quad R_2 = R_{ik} R^{ik}; \quad R_3 = R_{\alpha_1 \alpha_2} R^{\alpha_2}_{\alpha_3} R^{\alpha_1 \alpha_3}; \ \ldots$$

$$R_n = R_{\alpha_1 \alpha_2} R^{\alpha_2}_{\alpha_3} \ldots R^{\alpha_1 \alpha_n}. \tag{3.188}$$

Очевидно, что таких инвариантов существует неограниченное множество. Нетрудно, однако, показать (подробно это было показано Н. А. Розенсон [173]), что в рассматриваемом пространстве существует только четыре алгебраически независимых базисных инварианта второго порядка следующего вида (см. Приложение 1):

$$R_1 = g_{ik} R^{ik}; \quad R_2 = R_{ik} R^{ik}; \quad R_3 = R_{\alpha_1 \alpha_2} R^{\alpha_2}_{\alpha_3} R^{\alpha_1 \alpha_3};$$

$$R_4 = R_{\alpha_1 \alpha_2} R^{\alpha_2}_{\alpha_3} R^{\alpha_3}_{\alpha_4} R^{\alpha_1 \alpha_4}. \tag{3.189}$$

Другими словами, любой инвариант n-го порядка R_n может быть представлен в следующем виде:

$$R_n = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=n} A_{\alpha\beta\gamma\delta} R_1^{\alpha} R_2^{\beta} R_3^{\gamma} R_4^{\delta}. \tag{3.190}$$

Здесь $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — некоторые скалярные числовые коэффициенты. Эти коэффициенты могут быть найдены методом, подробно изложенным для 3-мерного пространства в [174].

В рассматриваемом римановом пространстве может быть образовано бесчисленное множество дифференциальных тензоров

второй валентности следующего вида:

$$\omega_{ik}^{(1)} = g_{ik}g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}; \quad \omega_{ik}^{(2)} = R_{i\alpha}R_k^{\alpha};$$

$$\omega_{ik}^{(3)} = R_{i\alpha_1}R_{\alpha_2}^{\alpha_1}R_k^{\alpha_2}; \ \ldots; \ \omega_{ik}^{(n)} = R_{i\alpha_1}R_{\alpha_2}^{\alpha_1} \ldots R_k^{\alpha_{n-1}}. \tag{3.191}$$

Совершенно аналогично тому, как это сделано для инвариантов, может быть показано, что любой тензор $\omega_{ik}^{(n)}$ рассматриваемого вида (3.191) может быть выражен в виде полинома с инвариантными коэффициентами от трех базисных тензоров $\omega_{rs}^{(1)}$, $\omega_{rs}^{(2)}$ и $\omega_{rs}^{(3)}$, т. е.

$$\omega_{rs}^{(n)} = C_0 g_{rs} + \sum_{i=1,2,3} C_i \omega_{rs}^{(i)}, \tag{3.192}$$

где $C_i = C_i(R_1, R_2, R_3, R_4)$.

Для доказательства этой теоремы достаточно отметить, что любой тензор $\omega_{ik}^{(n)}$ может быть получен с помощью взятия производной от инварианта R_{n+1} по тензору $R^{\alpha_{n+1}\alpha_1}$, где $i=\alpha_1$, $k=\alpha_{n+1}$, и учета того обстоятельства, что инвариант R_{n+1} выражается через четыре базисных инварианта R_1, R_2, R_3, R_4 по (3.190).

Обобщая одну из основных идей А. Эйнштейна [43], можно уравнения гравитационного поля записать в виде следующего полинома (или даже бесконечного ряда):

$$\varkappa T_{ik} = A_1 g_{ik} + A_2 R_{ik} + A_3 R_{i\alpha}R_k^{\alpha} + A_4 R_{i\alpha}R_{\beta}^{\alpha}R_k^{\beta} + \ldots, \tag{3.193}$$

где коэффициенты A_s являются функциями четырех базисных инвариантов, т. е.

$$A_s = A_s(R_1, R_2, R_3, R_4).$$

Допустим, что ряд (3.193) равномерно и абсолютно сходится. В таком случае ряд (3.193) может быть свернут в следующий полином:

$$\varkappa T_{ik} = \Psi_1 g_{ik} + \Psi_2 R_{ik} + \Psi_3 R_{i\alpha}R_k^{\alpha} + \Psi_4 R_{i\alpha}R_{\beta}^{\alpha}R_k^{\beta}. \tag{3.194}$$

Здесь функции Ψ_k — функции инвариантов R_1, R_2, R_3, R_4, т. е. $\Psi_k = \Psi_k(R_1, R_2, R_3, R_4)$. Это утверждение (3.194) просто следует из доказанной теоремы о том, что любой тензор вида $R_{i\alpha_1}R_{\alpha_2}^{\alpha_1}\ldots R_k^{\alpha_n}$ может быть представлен в виде полинома с инвариантными коэффициентами через четыре базисных тензора второй валентности вида (3.190).

В соответствии с общей теорией относительности Эйнштейна [43] должны тождественно выполняться соотношения (3.186). Это требование (3.186) должно выполняться и в рассматриваемом случае, т. е. функции Ψ_k не могут быть произвольными, а должны быть выбраны так, чтобы тождественно выполнялись

следующию четыре уравнения:

$$\nabla_k(\Psi_1 g_{ik} + \Psi_2 R_{ik} + \Psi_3 R_{i\alpha}R^{\alpha}_{k} + \Psi_4 R_{i\alpha}R^{\alpha}_{\beta}R^{\beta}_{k}) = 0 \qquad (3.195)$$
$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Итак, в предлагаемой модели уравнения гравитационного поля описываются уравнениями (3.194) и (3.195).

Уравнения Эйнштейна получаются из этой системы (3.194), если принять

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2}R_1; \quad \Psi_2 = 1; \quad \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \text{ т. е.} \qquad (3.196)$$
$$\varkappa T_{ik} = -\frac{1}{2}g_{ik}R_1 + R_{ik}.$$

Легко видеть, что если четыре функции $\Psi_k = \Psi_k(R_1, R_2, R_3, R_4)$ известны, то можно записать в явном виде систему уравнений (3.194). Вместе с тем, вычисляя с помощью (3.188) четыре инварианта

$$T_1 = g_{ik}T^{ik}; \quad T_2 = T_{ik}T^{ik}; \quad T_3 = T_{\alpha_1\alpha_2}T^{\alpha_2}_{\alpha_3}T^{\alpha_1\alpha_3};$$
$$T_4 = T_{\alpha_1\alpha_2}T^{\alpha_2}_{\alpha_3}T^{\alpha_3}_{\alpha_4}T^{\alpha_1\alpha_4}, \qquad (3.197)$$

придем в конечном счете к соотношению

$$T_k = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, R_1, R_2, R_3, R_4) \quad (k = 1, 2, 3, 4). \qquad (3.198)$$

Из четырех уравнений (3.198) можно получить

$$\Psi_k = \Psi_k(T_1, T_2, T_3, T_4, R_1, R_2, R_3, R_4). \qquad (3.199)$$

Итак, функции Ψ_k как функции от инвариантов R_1, R_2, R_3, R_4 вполне станут известны, если будут заданы четыре функции

$$T_k = T_k(R_1, R_2, R_3, R_4) \text{ или } R_s = R_s(T_1, T_2, T_3, T_4)$$
$$(k, s = 1, 2, 3, 4). \qquad (3.200)$$

Следовательно, 4 алгебраические функции (3.200) однозначно определяют систему дифференциальных уравнений (3.194).

В частности, в случае уравнений Эйнштейна (3.196) вторая группа в уравнении (3.200) R_s имеет следующий вид:

$$R_1 = T_1; \quad R_2 = T_2; \quad R_3 = -T_3 + \frac{3}{2}T_2T_1 - \frac{1}{4}T_1^3; \qquad (3.201)$$
$$R_4 = T_4 + 2T_3T_1 - \frac{3}{2}T_2T_1^2 - \frac{1}{8}T_1^4.$$

В системе уравнений (3.201) базисные дифференциальные инварианты пространственно-временного континуума R_1, R_2, R_3, R_4 связываются простыми алгебраическими соотношениями (3.201) с базисными инвариантами тензора энергии-импульса материи. Таким образом, в рамках изложенного выше общего подхода

система четырех алгебраических уравнений (3.201) эквивалентна системе 10 уравнений гравитационного поля (3.196) Эйнштейна. В линейном приближении для метрических потенциалов поля g_{ik} система уравнений (3.194), (3.195) и уравнения (3.196) Эйнштейна в линейном приближении совпадают друг с другом.

Нетрудно также убедиться, что распространение фронта гравитационных волн для общих уравнений (3.194) будет происходить со скоростью света c. Это просто следует из того, что если ограничиться старшими производными, то уравнения (3.194) примут вид

$$\sum_n A_n (\hat{\Box}\, g_{ik})^n = 0. \tag{3.202}$$

Вообще система (3.194)—(3.195) отличается от уравнений Эйнштейна (3.196) присоединением новых нелинейных членов. Поэтому есть основания предполагать, что в обычных задачах теории гравитации решения уравнений (3.194)—(3.195) и уравнений (3.196) Эйнштейна будут очень близки друг к другу. Однако возможно, что при рассмотрении космологических проблем уравнения (3.194), (3.195) приведут к существенно отличительным результатам, полученным из уравнений Эйнштейна типа (3.196).

Так, в работах [166, 167] было показано, что в метрике произвольной модели Вселенной (в общем случае неоднородной и анизотропной) присутствуют сингулярности, что свидетельствует о наличии сингулярностей в общем решении уравнений Эйнштейна [168]. Для устранения наличия сингулярностей и построения регулярных решений уравнений гравитационного поля предлагалось выбирать нелинейный лагранжиан вида [175]

$$\mathscr{L}(R) = AR + BR^2 + CR^{ik}R_{ik} + DR^{iklm}R_{iklm}ER^{iklm}R_{iklm}, \tag{3.203}$$

где A, B, C, D, E — произвольные постоянные; R — скалярная кривизна Риччи; R_{ik} — тензор Риччи; R_{iklm} — тензор Римана. В [156] показано, что квадратичная добавка в $\mathscr{L}(R)$ позволила устранить фридмановскую сингулярность в момент максимального сжатия (при $t=0$) в простейшем случае однородной и изотропной модели с плоским пространством, заполненным материей [175]. При $t\to\pm\infty$ полученное решение, регулярное в точке $t=0$, приводит к расходимостям [175].

В последние годы в теории поля также рассматриваются из соображений общности всевозможные квадратичные комбинации по тензору калибровочного поля R_{ijkl} [176]. В частности, в [176] рассматривался вариант калибровочной теории поля с лагранжианом вида

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\,(\lambda_1 R_{ijkl}R^{ijkl} + \lambda_2 R_{ik}R^{ik} + \lambda_3 R^2 + \ldots), \tag{3.204}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 ... — постоянные связи, а уравнения поля (комбинация моделей Эйнштейна и Вейля) имели вид [176, с. 198]

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \frac{3}{2}\lambda\eta^2 g_{ik} + \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda_1}\right)(2R_{il}R^l_k + 2R_{ijkl}R^{jl} - g_{ik}R_{jl}R^{jl}) = 0;$$

$$\lambda_0 \nabla^a R_{a,ijk} = 0, \tag{3.205}$$

где $\Lambda_1=\eta^2(2\lambda\lambda_3-24\lambda\lambda_1+1/3\varkappa)$; $\lambda_0=\lambda_1+1/4\lambda_2$; $\eta^2=R/6\lambda$. Первые два слагаемых в (3.205) соответствуют уравнениям Эйнштейна, а остальные — модели Вейля.

В [177] рассматривался более общий лагранжиан с учетом квантовых эффектов

$$\mathscr{L}=(-g)^{1/2}\left[R+A+BR^2+\frac{l_p^2}{\pi^2}\ln|Rl_p^2|\right]; \qquad l_p^{-2}=\frac{c^3}{G\hbar}, \tag{3.206}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка; A и B допускают определенный произвол. Роль квантовых эффектов в теории гравитационного поля рассмотрена в [166, 168, 176—183].

Нетрудно заметить, что модели типа (3.203)—(3.206) и типа (3.194), (3.195) принадлежат одному классу математических моделей и более подробно рассмотрены в гл. 5.

Модели (3.194), (3.195) отличаются от (3.203)—(3.205) и им подобных тем, что в основе (3.194), (3.195) лежит теорема о возможности представления любого тензора вида $R_{i\alpha_1}$, $R^{\alpha_1}_{\alpha_2}\ldots R^{\alpha_n}_{k}$ в виде полинома с инвариантными коэффициентами через четыре базисных тензора второй валентности вида (3.190) и законе сохранения энергии-импульса, в то время как остальные модели основаны на феноменологических лагранжианах, выбор которых носит интуитивный характер подбора и основан в конечном счете на принципе устранения недостатков (типа расходимостей) предыдущих моделей.

3.19. О представлении теории гравитации Эйнштейна в 10-мерном-псевдоевклидовом пространстве

3.19.1. О вложении 4-мерного риманова пространства в 10-мерное псевдоевклидово пространство. Пусть в 10-мерном псевдоевклидовом пространстве задана ортогональная система координат с метрической формой

$$ds^2=c_\alpha dz^{\alpha^2} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, 10). \tag{3.207}$$

Здесь коэффициенты c_α имеют значения ±1. Если все коэффициенты положительны, то пространство будет евклидовым. Если хотя бы один из коэффициентов c_α равен (-1), то будем иметь дело с псевдоевклидовым пространством.

Рассмотрим теперь некоторое 4-мерное многообразие

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k, \tag{3.208}$$

где g_{ik} — метрический тензор системы координат в этом многообразии; (x^1, x^2, x^3, x^4) — криволинейные координаты.

Если вложение 4-мерного многообразия (3.208) в 10-мерное многообразие возможно, то должна существовать система 10 уравнений

$$z^\alpha=\varphi^\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{3.209}$$

такая, что система уравнений [184]

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^{k}} = g_{ik} \qquad (3.210)$$

имеет вещественное решение. При очень общих предположениях, на которых подробно здесь не будем останавливаться, система (3.210) имеет вещественное решение [184—190].

Сделаем только несколько замечаний по поводу задачи (3.207)—(3.210).

По изометрическим вложениям наиболее ранняя публикация принадлежит К. Шлефли (1873 г.), который показал, что всякое риманово многообразие размерности n допускает изометрическое вложение в евклидово плоское пространство размерности $m=1/2n(n+1)$. Г. Жане (1926 г.), А. Картан (1927 г.) и К. Бурстин (1931 г.) более строго показали, что во всяком аналитическом римановом многообразии размерности n (с отмеченной точкой) существует окрестность (с отмеченной точкой), допускающая изометрическое вложение в плоское евклидово пространство размерности m; при этом пространство размерности m нельзя заменить на $(m-1)$ [187, 189].

Пример 1 [184, задача 8, с. 64]. Пусть уравнения

$$a_{\alpha\beta} \frac{\partial z^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial x^{j}} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m;\ i, j = 1, \ldots, n)$$

допускают решения типа (3.209), т. е. $z^{\alpha}=f^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n)$. В [184, с. 65] показано, что для так определенного пространства V_n размерности n не существует метрики, индуцированной метрикой пространства V_m размерности m. В общем случае такие пространства размерности n существуют, если $m \geqslant n(n+1)/2$. Следовательно, если определена метрика для пространства размерности m, то существует возможность определения метрики и для подпространства.

С. Эйзенхарт в [184, с. 226] отмечает по поводу задачи (3.207)—(3.210) следующее: «Так, например, один из постулатов Эйнштейна, относящихся к пространственно-временному континууму V_4 общего принципа относительности, состоит в том, что в каждой точке пространства основная форма может быть приведена к виду — $(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^2$. Следовательно, для всякого плоского пространства, в которое может быть вложено такое V_4, один из коэффициентов c должен быть положительным и три-отрицательными.

Если форма (3.208) определенная положительная и мы сделаем в формуле (3.210) все c равными $+1$, то получим $n(n+1)/2$ уравнений для определения всех z. Если положить $m=n(n+1)/2$, то получится система уравнений, которая согласно общей теории дифференциальных уравнений с частными производными допускает вещественные решения. Таким образом, пространство V_n с определенной положительной формой может быть, вообще говоря, вложено в евклидово пространство $n(n+1)/2$ измерений. Аналогичные результаты получатся и в случае, если форма (3.208) не является определенной положительной, следует только числа c_{α} выбрать в соответствии с указаниями, сделанными выше.

Таким образом, согласно общим результатам, риманово многообразие размерности $n=4$ с метрической формой (3.208) можно вложить в плоское

псевдоевклидовое пространство размерности $m=n(n+1)/2=(4\cdot5)/2=10$. Более подробное доказательство приведенной общей теоремы можно найти в [184, с. 60; 225, 190, с. 222, 282].

Таким образом, если указанные условия выполняются, то 4-мерное риманово многообразие может быть вложено в 10-мерное псевдоевклидово пространство. Это утверждение вытекает также прямо из того, что метрический тензор g_{ik} риманового многообразия имеет 10 компонент, т. е. ровно столько, сколько введено функций φ^α в (3.209).

Таким образом, все уравнения теории гравитации Эйнштейна, так же как и все решения этих уравнений, могут быть представлены в 10-мерном псевдоевклидовом пространстве. Однако некоторые из решений уравнений Эйнштейна могут быть представлены в пространстве меньшего числа измерений.

Так, С. Эйзенхарт в [184, с. 227] по этому поводу замечает: «Мы только что указали, что V_n, вообще говоря, может быть вложено в плоское пространство, число измерений которого равно $n(n+1)/2$. Однако может оказаться, что это же пространство может быть вложено в плоское пространство меньшего числа измерений. Если наименьшее число измерений плоского пространства, в которое может быть вложено V_n, равно $n+p$, то мы будем говорить, что V_n есть *пространство класса p*».

Остановимся на этом вопросе подробнее и рассмотрим соответствующий пример.

3.19.2. Представление решения Шварцшильда в 6-мерном плоском псевдоевклидовом пространстве [184, с. 227]. Решение уравнений гравитационного поля для сферически симметричной массы m (решение Шварцшильда) имеет вид (см. формулу (3.119))

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\frac{1}{1-2m/r}\,dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (3.211)$$

где $r>2m=r_g$. Если принять [184]

$$r^1=\sqrt{\frac{r-2m}{r}}\cos t; \qquad z^2=\sqrt{\frac{r-2m}{r}}\sin t; \qquad z^3=f(r);$$

$$z^4=r\sin\theta\cos\varphi; \qquad z^5=r\sin\theta\sin\varphi; \qquad z^6=r\cos\theta,$$

где для функции $f(r)$ выполняется соотношение

$$\left(\frac{df}{ar}\right)^2=\frac{1}{r-2m}\left(\frac{m^2}{r^3}+2m\right),$$

то формула (3.211) примет вид

$$ds^2=(dz^1)^2+(dz^2)^2-(dz^3)^2-(dz^4)^2-(dz^5)^2-(dz^6)^2. \qquad (3.212)$$

Следовательно, поле Шварцшильда (3.211) может быть вложено в плоское 6-мерное псевдоевклидово пространство.

В [119, с. 91] по поводу проблемы имбединга (вложения риманова пространства-времени в плоское пространство большей размерности) отмечается

следующее: «Произвольное риманово пространство локально можно рассматривать как поверхность, вложенную в 10-мерное евклидово пространство. При этом возникает шесть дополнительных измерений, которые можно интерпретировать как внутренние степени свободы элементарных частиц... Если V_4 обладает некоторой степенью симметрии, его класс вложимости (число дополнительных размерностей) может быть меньше шести. Так, статическое и сферически-симметричное поле Шварцшильда, создаваемое точечной гравитирующей массой, вложимо в плоское пространство шести измерений. Его класс вложимости равен двум. Совокупность 15 генераторов ортогональной группы O_6 содержит одно преобразование в 2-мерной плоскости, коммутирующее с группой Лоренца. Это преобразование можно рассматривать как внутреннюю симметрию.

Относительно некоторых типов полей тяготения можно указать нижнюю или верхнюю границу класса вложимости. Например, не существует риманова (или псевдориманова) многообразия V_4 с $R_{\mu\nu}=0$, вложимого в 5-мерное плоское пространство. Единственное V_4 с $R_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu}$ (уравнение Эйнштейна с космологическим членом), вложимое в 5-мерное пространство, есть пространство постоянной кривизны. Единственный вид решений уравнений Эйнштейна с некогерентной материей ($p=0$), который вложим в 5-мерное пространство,— фридмановские космологические модели. Если материя вращается, V_4 не может быть вложено в 5-мерное пространство. Таким образом, свойства внутренних симметрий, возникающих при имбединге, определяются свойствами материи в римановом пространстве-времени.

Число дополнительных размерностей резко увеличится, если все пространство-время, а не только окрестность некоторой точки рассматривать как поверхность в некотором плоском пространстве большей размерности. Для такого глобального вложения V_4 с гиперболической сигнатурой нужно пространство, имеющее, вообще говоря, более 230 измерений. Однако часто число измерений для глобального вложения современных космологических моделей гораздо меньше...

Таким образом, использование имбединга позволяет интерпретировать появление внутренних симметрий элементарных частиц как следствие искривления пространства-времени на малых расстояниях. Эта связь должна проявляться сильнее в районах с большой кривизной. На этом пути возможна зависимость между космологическими свойствами Вселенной и свойствами элементарных частиц».

С позиции теории динамических систем подробно космологические модели Эйнштейна, де Ситтера, Фридмана, Керра, Казнера, Тауб-НУТ-модели, Белинского — Лифшица — Халатникова и др., квантовые эффекты в космологических моделях и квантовые модели в искривленном пространстве-времени рассмотрены в [56, 88, 97, 107, 116, 119, 120, 123, 132, 133, 155—169, 175—183, 191—214], связь с теорией солитонов в [10, 121, 123—125, 215—300] и другие модели.

3.19.3. Заключительные замечания. Если бы 10-мерное псевдоевклидово пространство существовало реально, то можно было представить себе, что находящаяся в нем материя распределена по отдельным 4-мерным римановым многообразиям. Одним из таких многообразий является известная нам Вселенная. Таким образом, Вселенная в более общем смысле этого термина являлась

бы неким множеством таких 4-мерных римановых многообразий. Такое множество могло бы иметь мощность континуума.

В этой достаточно экстравагантной космологической гипотезе Вселенная (в более общем смысле этого термина) представляется в виде некоторого «сэндвича», одним из элементом которого является известное нам 4-мерное многообразие. В 10-мерном плоском псевдоевклидовом многообразии законы сохранения энергии-импульса выполнялись бы точно. В этом случае несохранение энергии-импульса в отдельных элементах этого многообразия (в том числе в известной нам Вселенной) можно было объяснить обменом энергией, импульсом и материей между различными элементами этого многообразия. Однако обсуждение этой гипотезы выходит существенно за рамки настоящей книги.

3.2.0. Экспериментальная проверка ОТО

Согласно [67], экспериментальная проверка СТО носит законченный характер, а последние эксперименты [7, 92, 301] (см. также гл. 2) только подтверждают гипотезы и следствия СТО с все более высокой точностью.

В отличие от СТО экспериментальная проверка ОТО является в настоящее время одним из центральных направлений в экспериментальной и теоретической физике [4, 43, 67, 69, 97, 127—133, 138, 140, 142—145, 156, 159—167, 302—309] и в последние годы интенсивно развивается (свидетельством тому являются также представленные результаты на одной из последних Советских гравитационных конференций, проходившей с 1—3 июля 1981 г. в г. Москве, МГУ [305]).

Экспериментальная проверка ОТО, согласно [67], развивается по двум направлениям: 1) проверка основ ОТО; 2) проверка следствий ОТО.

Так, В. Л. Гинзбург в [67, с. 439] отмечает: «Экспериментальная проверка ОТО проводится в двух, хотя и нерезко разграниченных направлениях. Первое из них связано с основами теории, ее предпосылками. Второе направление — проверка следствий ОТО... Отмеченная выше асимметрия, характеризующая пути проверки физической теории, побуждает считать первое направление, во всяком случае, не менее значительным, чем второе. Конкретно это относится прежде всего к принципу эквивалентности, на котором базируется ОТО».

Если первое из указанных направлений концентрирует основные усилия на проверке принципа эквивалентности [7, 43, 56, 67, 97, 127—133, 136, 139, 162, 308—319], возможной зависимости гравитационной постоянной G от временных (согласно гипотезам Дирака [44]) или пространственных вариаций [67, 320—322] и др., то второе направление было сконцентрировано на проверке указанных А. Эйнштейном трех следствий [309]: а) гравитационное смещение частоты спектральных линий; б) отклонение лучей света, проходящих вблизи Солнца; в) поворот перигелия Меркурия.

В [131] В. Н. Руденко отмечает следующее: «Два направления характерны для современных гравитационных экспериментов в неволновой зоне. Первое, связанное с именами Эддингтона и Шиффа, предполагает измерение традиционных и новых релятивистских эффектов для вычисления и уточнения коэффициентов постньютоновского разложения в метрике в первом, втором и т. д. порядках по параметру слабого поля. Это экспериментальное определение геометрии пространства с возрастающей точностью должно позволить произвести отбор между конкурирующими вариантами метрических теорий тяготения. Второе направление, иногда называемое системой Дики, состоит в постановке опытов, априори не связанных с определенной теорией и проверяющих основные постулаты, на которых базируются наши представления о гравитации. К ним относятся, например, проверка принципа эквивалентности, попытки обнаружения временных вариаций гравитационной константы или локальной анизотропии пространства и т. п.».

Результаты экспериментов по проверке указанных эффектов можно найти в [7, 67, 97, 127—133, 136, 139, 142—145, 156, 159, 160, 164—167, 302, 304—309, 323, 324]; дальнейшее развитие экспериментальной проверки эффектов ОТО на основе радиолокации небесных тел см. в [325], а дополнительные вопросы теоретического обоснования анализа радиолокационных наблюдений см. в [326].

В последние годы особое внимание уделяется вопросам детектирования и обнаружения гравитационных волн [96, 140, 128—133, 303, 305, 327—343] с привлечением методов квантовой теории [130—132, 305, 344—360] для повышения чувствительности гравитационных антенн.

В настоящем разделе из множества полученных (и подготавливаемых по официальным международным проектам в рамках программы «Интеркосмос») в последние годы экспериментальных результатов по проверке ОТО отметим ввиду ограниченного объема книги только некоторые, имеющие большое значение при построении теории управления КЛА с учетом релятивистских эффектов.

Более подробное описание последних результатов экспериментальной проверки ОТО читатель может найти в [7, 67, 69, 97, 131—133, 143, 144, 156, 160, 305—307, 322] и цитированной литературе. Здесь отметим только, что Б. Н. Петров уделял этому вопросу особое внимание, предполагая провести в рамках программы «Интеркосмос» широкий круг экспериментов по инерциальной навигации: КЛА с учетом релятивистских эффектов, КЛА с солнечным парусом при солнечном ветре, управление квантовыми динамическими системами в сильном гравитационном поле на спутниках без сноса и др.

Результаты некоторых исследований в этих направлениях работ кратко рассмотрены в данном разделе и более подробно будут обсуждаться в самостоятельной публикации.

3.20.1. Экспериментальная проверка принципа эквивалентности [127—133, 302—324]. Проверка справедливости принципа эквивалентности в ОТО занимает особое положение.

А. Эйнштейн считал проверку принципа эквивалентности более важной по сравнению с проверкой следствий ОТО в слабом поле[5], а в [43] по поводу самого принципа эквивалентности отметил: «По моему разумению, моя теория покоится исключительно на этом принципе».

Исторически результаты опытов Н. Этвеша были опубликованы в 20-х годах, в которых равенство инертной $m_и$ и тяжелой гравитационной $m_т$ масс, $m_и = m_т$, было подтверждено с точностью 10^{-9}. В 1964 г. в [127] была достигнута точность 10^{-11}, а в 1971 г. в [129] для платины и алюминия — точность 10^{-12}. В [314] было показано, что учет вклада слабого взаимодействия в $m_и$, a не в $m_т$, привел бы в опытах [129] к эффекту $\sim 2 \cdot 10^{-10}$ (см. формулы (2) и (4) в [314]). Согласно [67, с. 440], опыты [129] указывают на соблюдение принципа эквивалентности и для слабых взаимодействий с точностью 0,5%.

В [317] показано, что с большой точностью (10^{-26} вместо требуемой 10^{-19}) поляриметрические наблюдения отражательных туманностей позволили проверить оптическую изотропию космического пространства и провести прецизионную проверку принципа эквивалентности применительно к электромагнитным волнам.

Особое значение в проверке принципа эквивалентности имел так называемый эффект Нордтведта [67, 131]: если бы учет гравитационного взаимодействия нарушал равенство $m_и = m_т$ для Земли, то лунная орбита осциллировала определенным образом. Следовательно, эффект Нордтведта связан с вопросом о вкладе гравитационной энергии в массу тела. Если имеется тело радиуса a, массы m, плотность тела ρ, то отношение энергии гравитационного взаимодействия $E \cong Gm^2/a$ к энергии покоя mc^2 составляет ($\rho \sim 5$)

$$\Delta \simeq \frac{Gm}{c^2 a} \cong \frac{r_g}{a} \sim \frac{4\hbar G \rho a^2}{3c^2} \sim 10^{-27} a^2$$

для тел лабораторных размеров. Таким образом, в лабораторных условиях отношение Δ мало, но при переходе к космическим объектам положение существенно меняется. Так, для Земли $\Delta \sim 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ ($a \sim 6 \cdot 10^8$ см); для Юпитера $\Delta \sim 10^{-8}$ и для Луны $\Delta \sim 2 \cdot 10^{-11}$.

В [128] было отмечено: «В частности, вклады сильного взаимодействия, электромагнитного взаимодействия, слабого взаимодействия и гравитации в энергию тела относятся приблизительно как $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-40}$ на каждый атом (мы приравняли единице вклад от сильного взаимодействия). Для макроскопического тела, обладающего массой, равной примерно 1 г, и единич-

---

[5] А. Эйнштейн в письме к П. Бергману подчеркнул, что лишний раз важнее проверить на опыте принцип эквивалентности, чем следствия ОТО: смещение перигелия Меркурия или отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца.

ной плотностью, полная гравитационная энергия составляет около 10^{-8} эрг, и указанные выше отношения становятся равными $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-29}$.

Эксперимент Этвеша доказывает, что с точностью до 10^{-11} величина отношения инертной массы к тяготеющей одинаковы для различных материальных тел. Поэтому с высокой степенью точности из сильного принципа эквивалентности должно следовать постоянство электромагнитного и сильного взаимодействия. Что же касается слабого и гравитационного взаимодействия, то о них еще ничего нельзя сказать. Следовательно, эксперимент Этвеша исключает возможность заметного изменения во времени и пространстве констант связи для сильного и для электромагнитного взаимодействия. Этот экспери-

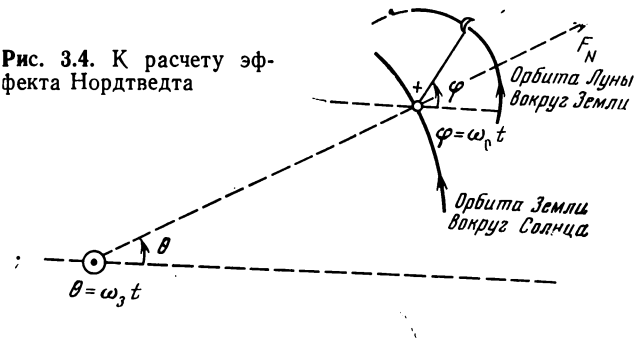


Рис. 3.4. К расчету эффекта Нордтведта

мент не исключает возможности такого изменения констант связи в случае слабого и гравитационного взаимодействий. Реализация этого обстоятельства может быть тесно связана с принципом Маха.

Одной из возможностей проверки выполнения принципа эквивалентности для гравитации является наблюдение траекторий объектов, обладающих большим значением собственной гравитационной энергии. Это осуществимо лишь в отношении астрономических объектов. Например, для Солнца указанные выше отношения сил взаимодействий равны $1 : 10^{-2} : 10^{-2} : 10^{-6}$, а для Юпитера — $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-8}$. Изучение движения Юпитера должно привести к более точному определению пределов применимости сильного принципа эквивалентности к гравитационной собственной энергии».

Благодаря относительно короткодействующим ядерным и слабым силам, электрической нейтральности атомов соотношение первых трех энергий в ряде $1 : 10^{-2} : 10^{-12} : 10^{-40}$ сохраняется тем же и для массивных тел, а доля внутренней гравитационной энергии растет с увеличением массы тела. В связи с отмеченным, К. Нордтведт в 1968 г. обратил внимание на факт возможности существования аномальных осцилляций орбиты Луны из-за нарушения принципа эквивалентности для гравитационной энергии Земли.

На рис. 3.4 изображена схематически система Солнце — Земля — Луна с необходимыми обозначениями.

В [131] отмечено следующее: «Внутренняя гравитационная энергия Земли составляет от полной энергии долю $\Delta_з \cong 4{,}6 \cdot 10^{-10}$; для Луны $\Delta_л = 2 \cdot 10^{-11}$, поэтому при грубом расчете по-

следней величиной можно пренебречь. Если гравитационная энергия Земли не подвержена тяготению, то земная (гелиоцентрическая) орбита для Луны («привязанной к Земле») уже не будет той областью, где ее притяжение к Солнцу равно центростремительной силе. Луна, следовательно, не будет находиться в состоянии свободного падения на Солнце».

Для оценки амплитуды колебаний радиуса орбиты Луны относительно Земли имеем [131] следующее соотношение: $|\delta r| \approx \approx 10^3\ \eta$ (см.), где $0<\eta<1$ — параметр Нордтведта. При $\eta=1$ (нарушение принципа эквивалентности) имеем ~ 10 м, что при достигнутой точности лазерной локации Луны с использованием уголковых отражателей в несколько сантиметров позволило бы обнаружить нарушение принципа эквивалентности.

В 1976 г. были осуществлены независимо двумя группами эксперименты [311, 312] по лазерной локации Луны, в результате которых было обнаружено, что гравитационная энергия Земли дает одинаковый вклад в $m_и$ и $m_т$ с точностью 2—3%, т. е. отношения $m_и/m_т$ для Земли и для Луны с точностью $\sim 10^{-11}$ одинаковы. Таким образом, в пределах ошибки ± 30 см эффект Нордтведта отсутствует. Конкретные параметры Нордтведта составляли $\eta=0\pm 0{,}03$ и $\eta=-0{,}001+0{,}015$ соответственно [311, 312].

В [319] приведены дополнительные результаты теоретического анализа проверки нарушения принципа эквивалентности.

В связи с отмеченными достижениями лазерной локации отметим некоторые радиолокационные эффекты в гравитационном поле.

3.20.2. Радиолокационные эффекты в гравитационном поле. Здесь кратко отметим результаты экспериментов по радиолокации планет Солнечной системы по проверке следствий ОТО: 1) отклонение лучей света и радиосигналов гравитационным полем; 2) задержка (запаздывание) радиосигналов гравитационным полем; 3) определение орбит планет с помощью радиолокации.

Отклонение лучей света в гравитационном поле. Допустим, что G — ньютонова постоянная тяготения, M — масса источника поля, d — параметр столкновения. Согласно Эйнштейну [43], луч света, проходящий вблизи края солнечного диска, должен отклоняться на величину

$$\delta\varphi = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{4GM}{c^2 d} = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) 1{,}75''.$$

Эта формула является следствием более общей формулы для вариации углового расстояния

$$\delta\varphi = (1+\gamma)\frac{GM}{c^2 d}(1+\cos\varphi),$$

согласно которой определяется положение звезды, близкой к краю солнечного диска во время затмения, а затем сравнивает-

ся с положением той же звезды спустя полгода, когда угловое расстояние φ Солнце—звезда максимально. При $d \sim R_\odot$ имеем предыдущее выражение для $\delta\varphi$.

Этот эффект впервые был экспериментально обнаружен в 1919 г. и начиная с этого момента многократно проверялся: около 380 различных звезд были подвергнуты экспериментальной проверке.

Отклонение от расчетной в ОТО величины 1,75″ составляло $\sim 20\%$ (1,6″÷2,2″) и параметр γ определялся в интервале $0{,}9 < \gamma < 1{,}3$. В 1973 г. были проведены экспедиции Техасским университетом и Королевской гринвичской обсерваторией [304] и наблюдалось отклонение $(1{,}6 \pm 0{,}18)''$, что дает $(0{,}95 \pm \pm 0{,}11) L_э$, где $L_э = 1{,}75''$. Во всех перечисленных опытах использовался оптический диапазон. С 1969 г. начались регулярные эксперименты в радиодиапазоне, что позволило существенно повысить точность эксперимента до 2—3%.

В частности, радиоизмерения проводились на двух группах источников: 1) квазарах 3С 273 и 3С 279 (один из которых 8 октября каждого года проходит за Солнцем); 2) радиоисточниках 0116+08, 0119+11 и 0111+02.

В 1967 г. был осуществлен независимо И. Шапиро и Л. Мулманом эксперимент по наблюдению биений радиосигналов от квазаров (сам эксперимент был предложен И. Шапиро). Сами измерения в радиодиапазоне радиоизлучения от квазара 3С 279, около которого Солнце проходит в октябре, а репером служит соседний (но более далекий от Солнца) квазар 3С 273, начались в 1969 г. Радиоинтерферометрия в отличии от классического оптического метода не нуждается в затмении Солнца и представляет более точный инструмент для измерения угловых координат; в свою очередь, двухчастотные измерения обеспечивают возможность исключения электромагнитной рефракции [131].

На интерферометрах с базой 2—20 км в первых экспериментах 1969—1972 гг. в диапазоне $\lambda \sim 12 \div 6$ см релятивистское отклонение с эйнштейновским значением параметра γ было получено с точностью 12—15%. Группой И. Шапиро в 1974 г. были опубликованы результаты экспериментов на интерферометре с базой 800 км с точностью 6%; обработка измерений на квазарах по наблюдениям 1972 г. дала значение $\gamma = 0{,}98 \pm 0{,}06$. Уточнение проведенных в октябре 1973 г. данных измерений на квазарах 3С 273 и 3С 279 (K. A. Weiler и др.) дало точность 3% согласия с ОТО [304].

М. Фомало и И. Шрамек [131, 304] провели в апреле—мае 1974 г. на трех компактных радиоисточниках с угловыми размерами 0,1″ измерения с $\gamma = 1{,}030 \pm 0{,}22$. Уточнение результатов измерения γ на основе дополнительных радиоизмерений в марте — апреле 1975 г. этих же авторов дало $\gamma = 1{,}014 \pm 0{,}018$ [304]. Радиоисточники 0116+08; 0119+11; 0111+12 лежат почти на прямой линии, которая занимает 10°, а первый из указанных

радиоисточников подходит к Солнцу на 1,5° [131]. Интерферометр содержал семь антенн и работал на двух частотах с $\lambda \sim$ ~ 10 см и $\lambda \sim 3{,}6$ см с максимальной базой 35 км. Таким образом, достигнутая точность соответствия ОТО составляет $\sim 2\%$. В настоящее время, согласно [131, 164], действует интерферометр «Голдстоун» с базисом 4000 км и возможной точностью измерения угловой координаты $\sim 0{,}0001''$, что позволяет ожидать повышения разрешения за счет увеличенной базы.

З а п а з д ы в а н и е р а д и о л о к а ц и о н н ы х с и г н а л о в. Эффект запаздывания радиолокационных сигналов (электромагнитной волны) в гравитационном поле был указан И. Шапиро в 1964 г. Был предложен метод, основанный на эффекте запаздывания электромагнитной волны в поле тяготения Солнца. Наблюдения производились следующим образом. Радиолокатор посылал к Венере и Меркурию, когда они находились почти за диском Солнца, сигнал и далее с помощью атомных часов наблюдалась задержка сигнала, проходящего вблизи поверхности Солнца (см. рис. 3.5). Если обозначить через r — ньютоновское расстояние от наблюдателя до отражателя, r_1 — расстояние от отражателя до Солнца, r_0 — расстояние от наблюдателя до Солнца, а через A и B соответствующие углы (см. рис. 3.5), то задержка радиосигнала

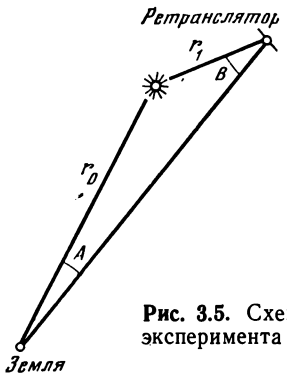


Рис. 3.5. Схема эксперимента

$$c\Delta\tau = r + \frac{1+\gamma}{2}\frac{4GM_\odot}{c^2}\ln\frac{r_0+r_1+r}{r_0+r_1-r} =$$

$$= r + \frac{1+\gamma}{2}\frac{4GM}{c^2}\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right).$$

Для случая, когда расстояние от Земли до Солнца r_0 и от планеты-рефлектора до Солнца r_1 много больше прицельного параметра d радиолуча по отношению к Солнцу, имеем

$$\Delta\tau \approx \frac{2}{c}\left[\frac{(1+\gamma)}{2}\frac{GM_\odot}{c^2}\ln\frac{r_0 r_1}{d^2}\right].$$

При общем времени путешествия радиосигнала $\tau_0 = 30$ мин и $r_0 \sim r_1 \sim 10^{13}$ см, $d \sim R_\odot \sim 7 \cdot 10^{10}$ см имеем $\Delta\tau \approx 200$ мкс и $\Delta\tau/\tau_0 \sim 10^{-7}$. Задержка во времени эквивалентна дополнительному расстоянию ~ 60 км.

В. Л. Гинзбург в [67, с. 443] следующим образом охарактеризовал описываемый эффект: «Сравнительно недавно (в 1964 г.) начал рассматриваться [307] эффект той же природы, что и отклонение лучей, но совсем другой

по технике измерений. Речь идет о релятивистской задержке электромагнитного сигнала при его распространении в неоднородном гравитационном поле. Практически эксперимент заключается в радиолокировании Меркурия или Венеры с Земли. При неучете эффекта ОТО сигнал дойдет до планеты и вернется обратно за время $t_0=2r/c$, где r — расстояние по прямой между Землей и локируемой планетой (влиянием межпланетной среды пренебрегаем, оно достаточно точно контролируется или исключается при работе с разными несущими частотами радиосигналов). Если же принять во внимание кривизну пространства-времени, а в данном случае опираться на выражение (12), то должно наблюдаться дополнительное запаздывание сигнала на величину δt, зависящую от взаимного положения планет и Солнца. Запаздывание максимально, когда сигнал проходит вблизи края Солнца, т. е. локируемая планета находится в верхнем соединении. В таких и близких условиях

$$\delta t \approx \frac{4GM_\odot}{c^3}\left[1+\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\ln\frac{4r_1r_2}{R^2}\right], \qquad (20)$$

где R — «прицельный параметр», r_1 — расстояние от Земли до Солнца и r_2 — расстояние от Солнца до локируемой планеты (Меркурия, Венеры), по предположению находящейся с другой стороны Солнца; разумеется, значение $(\delta t)_{max}$ достигается при $R=r_\odot$. В случае Меркурия $(\delta t)_{max}=2{,}4\cdot10^{-4}$ с (при $\gamma=1$, что отвечает ОТО), в то время как $t_0\approx23$ мин (следовательно, $(\delta t)_{max}/t_0\sim2\cdot10^{-7}\sim0{,}1\ |\varphi_\odot|/c^2$). Весьма существенно, что запаздывание δt изменяется при движении Земли и планеты, в силу чего можно производить дифференциальные измерения и, в частности, выявить логарифмический член в (20). Точность определения времени δt, а тем самым и проверка ОТО таким методом, определяется точностью, с которой известны положения планет (и некоторые их параметры) или положения космических зондов (искусственных планет или искусственных спутников планет). Известные нам предварительные данные, основанные на использовании спутника Марса «Викинг», указывают на то, что $|\gamma-1|\leqslant1\%$».

Поясним некоторые особенности проводимых экспериментов.

В первых экспериментах в 1968—1970 гг. по изучению планет Венеры и Меркурия было использовано ~300 начальных траекторных параметров, 400 радарных и 6000 оптических измерений. Относительная точность $\sim5\cdot10^{-9}$, разрешение при временных отсчетах ~10 мкс. На рис. 3.6 показаны результаты измерений и теоретические результаты предсказаний ОТО [139, 307] (измерения задержки времени в системе Земля — Меркурий производились с апреля по сентябрь 1967 г., когда Меркурий проходил через точки минимального и максимального удаления от Земли, т. е. 11 мая и 24 августа соответственно). Следует отметить, что точность измерений при отражении сигнала от поверхности планеты примерно на два порядка хуже, чем при использовании КЛА [304], и составляла $\sim20\%$; значение $(1+\gamma)/2>0{,}99$ получилось с большой ошибкой. Измерения были повторены и дали $\gamma=1{,}03\pm0{,}04$ [307]. Ошибка в экспериментах по-прежнему возникала из-за неточного знания положения цент-

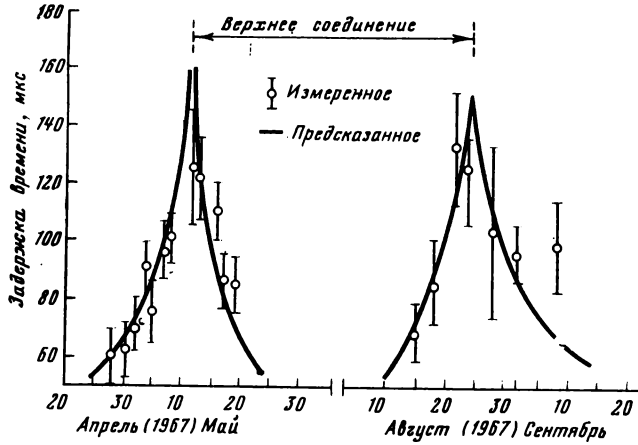


Рис. 3.6. Результаты измерений времени запаздывания радиолокационных сигналов

ра масс планет, неточного знания протяженности и шероховатости поверхности планет и неточного знания орбиты планеты.

Как отмечалось, лучшую точность дает использование метода отражения радиосигнала от космического зонда с активным ретранслятором [67, 131, 304, 307]. В качестве активных отражателей использовались космические станции «Маринер-6» и «Маринер-7» при полете к Марсу [67, 131]. Здесь точность повышалась и составляла 4%, причем из них 3% составляла доля неопределенности в оценке траекторий спутников из-за сноса солнечным ветром (особенности последнего см. в [361, 362]) [6]. Еще более строгие измерения были проведены с Марсом, траектория которого оценивалась по данным его спутника «Маринер-9» [67, 131, 304] (здесь спутник «Маринер-9» жестко привязан к центру планеты Марс, а сама планета не подвержена солнечному ветру). В этом случае имеем активную ретрансляцию, учитывающую преимущества планетного и спутникового эксперимента [131]. В результате точность возросла и составляла $\sim 2\%$. Орбитальные модули «Викинг», как отмечалось, дали точность $\sim 1\%$, а ожидаемая от продолжающихся измерений с «Викингами» в течение полного марсианского года точность $\sim 0{,}2\%$; использование двух синхронных разночастотных

[6] Согласно [304], ошибка 4% бралась с запасом, чтобы учесть большую неопределенность ошибки, вносимую поглощением радиоволн в солнечной короне: радиоволны (*S*-диапазон, 2300 мГц) сильно задерживаются солнечной короной. Для повышения точности измерений отраженный сигнал посылался в дальнейшем на частоте ~ 9600 мГц (*X*-диапазон). В этом диапазоне солнечная корона меньше задерживает сигнал, а также двухволновая связь позволила уменьшить ошибку в определении расстояния до зонда < 1 м.

ретрансляторов на борту спутника может обеспечить уровень точности ~0,1%. Дополнительные теоретические аспекты эффекта задержки радиосигналов можно найти в [363].

Определение орбит планет на основе радиолокационных наблюдений [325]. Рассмотренные эффекты позволяют существенно уточнить орбиты лоцируемых планет и Земли. Для обеспечения полетов к таким планетам, как Венера, Марс и др., целесообразно вместо классической теории движения Земли и планеты использовать орбиты, определенные на основе радиолокационных наблюдений [325].

На рис. 3.7—3.11 показаны результаты радиолокационных наблюдений и определения орбит Земли, Венеры и Марса. В качестве критерия точности полученных решений выбиралась разность фактического и расчетного времени запаздывания отраженного от поверхности планеты сигнала (как наиболее точная и непосредственно экспериментально определяемая характеристика движения планеты относительно Земли).

На рассматриваемых интервалах времени наблюдений ошибки классических теорий движения Земли и Венеры достигают 500 км, для Марса — 80 км. На интервале в 20 лет для всех планет ошибки в определении положения по методике [325] не превышали 10 м. В качестве исходных данных для Венеры принимались значения времен запаздывания отраженного сигнала, полученные в период 1962—1977 гг. (884 измерения) Институтом радиотехники и электроники АН СССР [325], Аресибской ионосферной обсерваторией (Пуэрто-Рико) в 1964—1965 гг. (71 измерение), Николаевской обсерваторией АН СССР (1889 оптических измерений угловых координат Венеры и Солнца) в 1972—1975 гг., Лабораторией реактивного движения (США) в 1967 г. (15 измерений), морской обсерваторией (США) в 1960—1972 гг. (3590 измерений), а также радиотехнические измерения дальностей КЛА «Венера-9» и «Венера-10» (306 измерений) [325].

3.20.3. Экспериментальная проверка теории гравитационного смещения. Предсказанный А. Эйнштейном эффект гравитационного смещения почти сразу привлек к себе внимание астрономов, которые пытались его обнаружить, исследуя спектры Солнца и звезд (первое направление). Эти исследования, начатые около шестидесяти лет назад, продолжаются вплоть до настоящего времени. Второе направление экспериментального исследования эффекта гравитационного смещения связано с возможностями, которые дают в этом отношении летательные аппараты и радиофизика (спутники, самолеты и т. д.). И, наконец, третье направление — исследования, основанные на эффекте Мёссбауэра.

Ниже кратко освещены результаты наиболее важных исследовательских работ по указанным трем направлениям.

Астрономические наблюдения. В системе отсчета, начало которой расположено в центре звезды, можно запи-

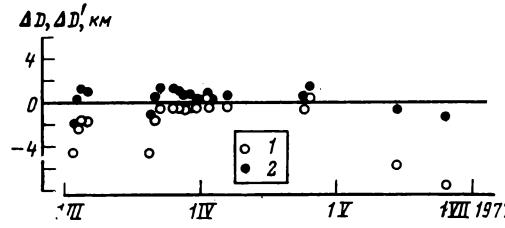


Рис. 3.7. Отклонение измеренных в 1977 г. дальностей до Венеры от расчетных для двух вариантов

1 — при уточнении только элементов орбит Земля—Луна и Венера; *2* — при совместном уточнении элементов радиуса Венеры и астрономической единицы [325]

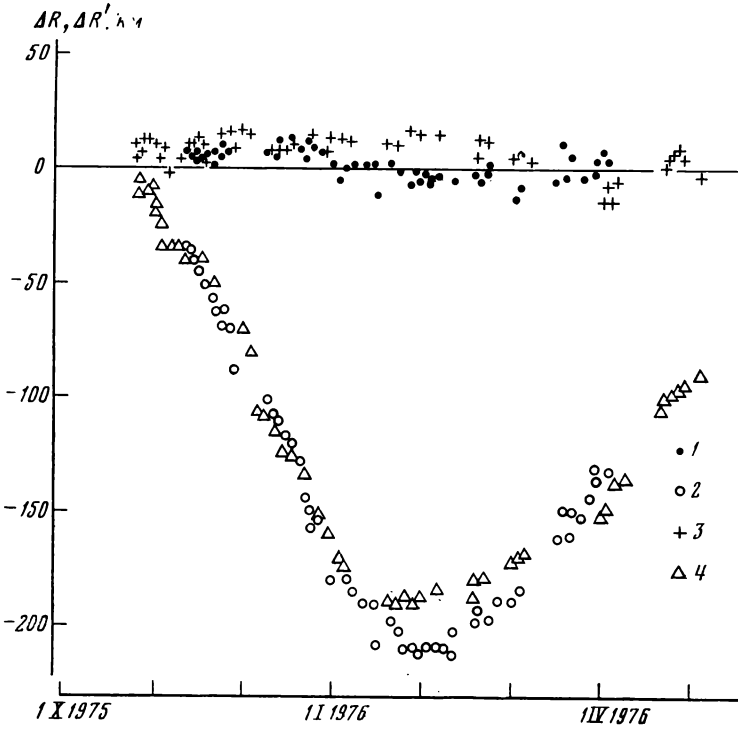


Рис. 3.8. Отклонение от расчетных значений измеренных расстояний до ИСВ «Венера-9» (*1, 2*) и «Венера-10» (*3, 4*) для двух вариантов определения орбит планет Венеры и Земли

1, 3 — по уточненным в [325] орбитам планет; *2, 4* — по орбитам планет, вычисленным с использованием данных Астрономического ежегодника СССР, 1960—1980 г.

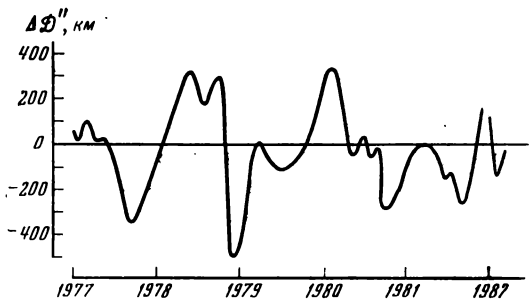


Рис. 3.9. Отклонения гелиоцентрических расстояний, полученных по уточненным в [325] орбитам планет

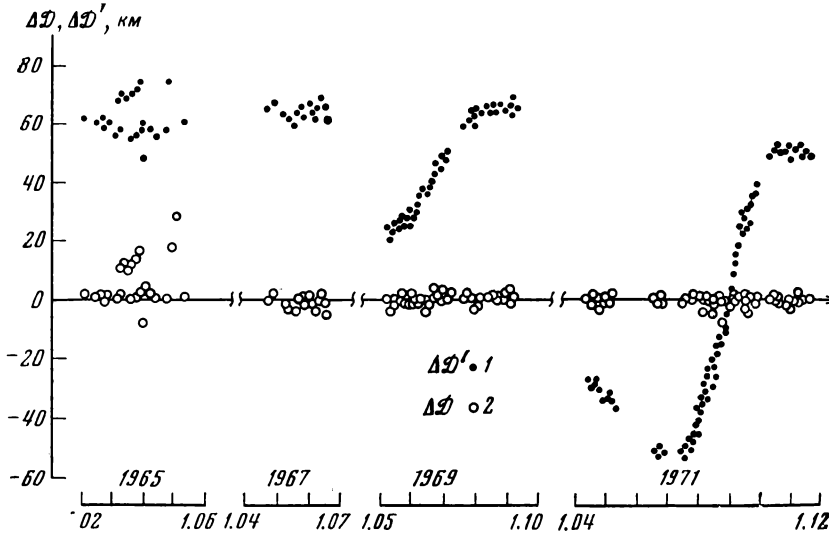


Рис. 3.10. Отклонения измеренных дальностей до Марса от расчетных значений, вычисленных для двух вариантов

1 — по орбитам Марса и Земли по [325] (ΔD); *2* — по данным, основанным на классических теориях движения планет (ΔD')

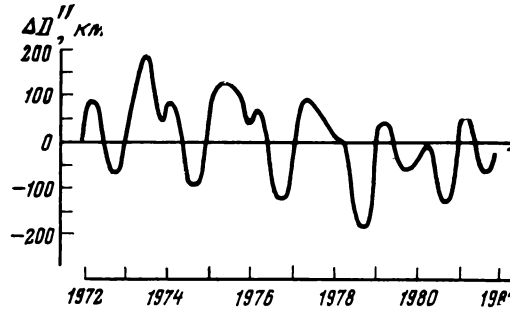


Рис. 3.11. Отклонения геоцентрических дальностей Марса, вычисленных по данным, основанным на классических теориях движения планет, от прогнозируемых дальностей по [325]

сать следующее значение для гравитационного потенциала при $r > r_0$:

$$\Phi = GM(1/r - 1/r_0). \tag{3.213}$$

Здесь r_0 — радиус звезды; r — расстояние до рассматриваемой точки (например, до поверхности Земли); M — масса звезды; G — гравитационная постоянная. Отсюда, используя формулы Эйнштейна, получим

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{\text{гр}} = \frac{GM}{c^2 r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right). \tag{3.214}$$

К указанному гравитационному смещению следует добавить

смещение частоты, связанное с доплер-эффектом[7]

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{\text{д}} = \frac{GM}{c^2 r^2}(r - r_0) = \frac{GM}{c^2 r}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Расчеты показывают, что для Солнца гравитационное смещение $\sim 2{,}12 \cdot 10^{-6}$.

Проведенные наблюдения (см. [7]) в основном, по крайней мере в качественном отношении, согласуются с результатами, предсказанными ОТО. Наблюдения показали, что формула (3.214) хорошо согласуется с результатами наблюдений, полученными у края диска Солнца; в центре диска Солнца наблюдаемый эффект составляет только одну треть от теоретического. Однако в данном случае на гравитационное смещение должен накладываться доплер-эффект, связанный с конвективным движением излучаемых атомов в фотосфере Солнца.

В. Л. Гинзбург [67] следующим образом анализирует имеющуюся здесь ситуацию: «Сразу ясно, что линия в целом будет из-за движения газа смещена в фиолетовую сторону. При этом, если скорость потоков чисто радиальная, фиолетовое смещение будет пропорционально $\cos\theta$, т. е. максимальное в центре диска и равно нулю на его краю. Последнее обстоятельство, а также учет других моментов, существенных при изучении света в солнечной атмосфере, позволяет заключить, что вблизи края диска движения излучающих слоев можно не учитывать и должен наблюдаться только гравитационный эффект. Это и наблюдается на опыте. В то же время использование имеющихся данных о солнечной грануляции легко позволяет объяснить наличие дополнительного фиолетового смещения на остальной части диска.

Таким образом, данные о смещении спектральных линий на Солнце могут рассматриваться как подтверждающие выводы общей теории относительности».

Для белых карликов ожидаемая величина красного смещения, как показывают расчеты, должна быть примерно в 30 раз больше, чем для Солнца. Однако здесь возникают трудности, связанные с наложением на гравитационное смещение доплеровского смещения частоты, которое в данном случае обусловливается не только движением излучающих атомов в атмосфере, но и движением самих звезд.

Проведенные М. Сент-Джоном, Дж. Адамсом, К. Адамом и Л. Поппером наблюдения белых карликов, в частности спутника Сириуса, в целом в качественном и в определенной мере в количественном отношениях подтвердили ожидаемые эффекты [7].

В. Л. Гинзбург еще в работе [67] отмечал в связи с изложенным выше, что «...помимо исследования спектра Солнца и звезд, известные, весьма заманчивые перспективы открываются в этом отношении с развитием радиофизики и, в частности, радиоспектроскопии».

---

[7] Выше было отмечено, что эффекты Доплера и гравитационного смещения в первом приближении просто складываются.

Не будем подробно останавливаться на астрономических наблюдениях эффекта гравитационного смещения. Укажем здесь только на последние работы в этом направлении (см. [7]). Среди этих работ обращает на себя внимание дискуссия об аномальном красном смещении квазаров. По мнению ряда авторов, аномальное красное смещение квазаров объясняется сверхмощными гравитационными полями, создаваемыми этими объектами (библиографические ссылки см. в [7]).

Использование летательных аппаратов для исследования эффекта гравитационного смещения. В. Л. Гинзбург [67] предложил для изучения эффекта гравитационного смещения частоты использовать летательные аппараты. При этом для измерения гравитационного смещения могут быть использованы сигналы, посылаемые летательным аппаратом в радиотехническом диапазоне частот.

Так, например, если космический аппарат расположен на расстоянии 10 млн. км от Солнца, а приемник сигналов расположен на Земле, то гравитационное смещение частоты $\delta f/f = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$; для частоты в 3000 мГц это составляет $\delta f = 45$ Гц. Значительное гравитационное смещение частоты будет наблюдаться, если излучение радиоволн будет происходить с космического аппарата, опускающегося, например, на планету Юпитер.

Если частота передатчика космического аппарата задается по специальной линии связи от наземного передатчика на близкой частоте, то гравитационное смещение частоты также будет отсутствовать, так как соответствующие смещения частоты на прямом и обратном пути имеют противоположные знаки [364].

При использовании летательных аппаратов, в частности искусственных спутников Земли, для исследования гравитационного смещения необходимо при интерпретации результатов измерений выделить влияние как продольного, так и поперечного эффекта Доплера. Это, как указал В. Л. Гинзбург [67], является далеко не простой задачей. Поэтому он предложил использовать интегральную оценку эффекта гравитационного смещения. В этом направлении был выполнен ряд экспериментальных работ. В 1971 г. Дж. Хафеле и Р. Китингом был проведен весьма интересный эксперимент по прямой проверке интегральной оценки эффекта гравитационного смещения. На борту самолета-лаборатории было установлено четверо атомных (цезиевых) часов. Самолет облетел Землю вначале в западном, а потом в противоположном, восточном направлении. Сравнивался ход бортовых и эталонных часов, находившихся в Вашингтоне.

В этом эксперименте по отношению к «неподвижной» системе отсчета, ось которой совпадает с осью вращения Земли, оба самолета должны были иметь различную скорость, что должно было привести к различным значениям поперечного доплер-эффекта. Однако между траекториями, по которым летели самолеты, и поверхностью Земли существовала определенная разность

Таблица 3.2

Направление полета	Эффект гравитационного смещения в наносекундах			
	собственно от гравитации (теоретическое)	собственно от скорости (теоретическое)	суммарный (теоретическое)	суммарный (экспериментальное)
Западное	179 ± 18	96 ± 10	275 ± 21	273 ± 4
Восточное	144 ± 14	−184 ± 18	− 40 ± 23	− 59 ± 10

гравитационного смещения частоты. Кроме того, атомные часы, находившиеся на поверхности Земли, имели по отношению к неподвижной системе отсчета доплеровское смещение частоты. Учет всех этих факторов приводит к формуле

$$\Delta\tau = 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{2\Omega v + v^2}{2c^2}\,\Delta t,$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли; v — скорость самолета; h — высота полета. Причем $v>0$ при движении на восток и $v<0$ при движении на запад. В табл. 3.2 приведены разности хода бортовых и эталонных часов, рассчитанные в соответствии с условиями полета [143, с. 154].

Вращение Земли обусловливает асимметрию восточного и западного направлений полета. Результаты этих экспериментов дали качественное и отчасти количественное согласие с теорией (ошибка составила $\sim 15\%$). Количественное расхождение в результатах может быть объяснено влиянием различных факторов, таких, как внешние электромагнитные поля и т. д.

Группой Мерилендского университета [365] был проведен эксперимент по измерению разности временных показаний атомных часов, размещенных на самолете и в наземной лаборатории. Часы были идентичные и хорошо экранированы.

Было проведено пять независимых полетов. Разность показаний времени двух идентичных часов измерялась прямым сравнением до и после того, как одна из установок транспортировалась на самолете в сопровождении радиолокатором в течение ~ 15 ч и на высоте $\sim 10^4$ см (~ 10 км). Нарастание разности времен телеметрически регистрировалось во всех фазах полета при помощи лазерных импульсов длительностью 0,1 нс [365]. Такие условия эксперимента давали точность измерения $\Delta\nu/\nu \sim \sim 10^{-12}$ (в отличии от экспериментов Паунда $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-15}$, описанных ниже). Для уменьшения специального релятивистского эффекта изменения частоты самолет курсировал в заданном квадрате с минимальной скоростью на постоянной высоте [131]. Согласно вычислениям, ожидаемый эффект ОТО составлял +50 нс, а гравитационный эффект в рамках СТО имел ~ -7 нс. Согласно [365], типичные результаты измерения: $+47 \pm 1{,}5$ нс (самолет — Земля); теория: $+47{,}1 \pm 0{,}25$ нс $= 52{,}8$ нс (гравита-

ционный потенциал) — 5,7 нс (относительная скорость); (измеренная разность)/(предсказания ОТО) $=0{,}987\pm0{,}01$.

На рис. 3.12 показаны все фазы измерения; ошибка наблюдений составила 1,6%. Ценность этого эксперимента составляет также возможность наблюдения всей динамики процесса запаздывания [131].

Под руководством Р. Вессо группа физиков Смитсонианского института провела летом 1976 г. измерение гравитационного смещения атомными часами на баллистической ракете [323]. По сравнению с предыдущим экспериментом точность была повышена почти на два порядка. Гравитационный зонд с водородным стандартом частоты (относительная стабильность $2\cdot10^{-10}$ с) на борту был запущен в США 18 июня 1976 г. Атомные часы на борту были синхронизованы с идентичными часами на поверхности Земли ($\nu=1{,}42\cdot10^{4}$ Гц). При удалении от поверхности Земли на 10 000 км частота часов на борту должна была увеличиться и превышать частоту часов на Земле на величину $\Delta\nu/\nu\approx\approx10^{-9}$. Ожидаемая точность эксперимента была 0,01%. На высоте ~160 км, где скорость была мала, проводилось сравнение частоты; приемники были расположены на четырех наземных станциях [323]. Соответствующие условия эксперимента позволили при измерении положения ракеты с точностью до 1 м и ее скорости с точностью до 6 см/с уменьшить существенно ошибку, связанную с доплер-эффектом. На рис. 3.13 и рис. 3.14 показаны результаты эксперимента [323]. Ошибка эксперимента не превышала 0,04%.

Гравитационное смещение и эффект Мёссбауэра. При построении теории гравитационного смещения принималось, что темп хода стандартных часов определяется только их скоростью по отношению к инерциальной системе отсчета и не зависит от их ускорения. Это условие допускает непосредственную экспериментальную проверку на основе эффекта Мёссбауэра — речь идет о так называемом температурном красном смещении.

По этой причине остановимся вначале на кратком описании экспериментальных результатов по температурному красному смещению, прежде чем перейти к описанию экспериментов по гравитационному смещению. Оба этих явления могли быть изучены на основе эффекта Мёссбауэра [7, 94]. Эффект Доплера должен проявляться также и в случае беспорядочного теплового движения атомов в кристаллической решетке. Как известно, при таких колебаниях скорость движения атомов меняется с частотой $10^{12}\div10^{13}$ с$^{-1}$.

Таким образом, за время жизни ядерных уровней атомов, используемых в экспериментах по эффекту Мёссбауэра, будет происходить большое число перемены знаков скорости колеблющихся атомов. Теория этого явления приводит к выводу [94], что смещение частоты ν квантов, излучаемых ядрами на 1 К, может быть найдено по следующей формуле:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)=\frac{c_p}{2c^2},$$

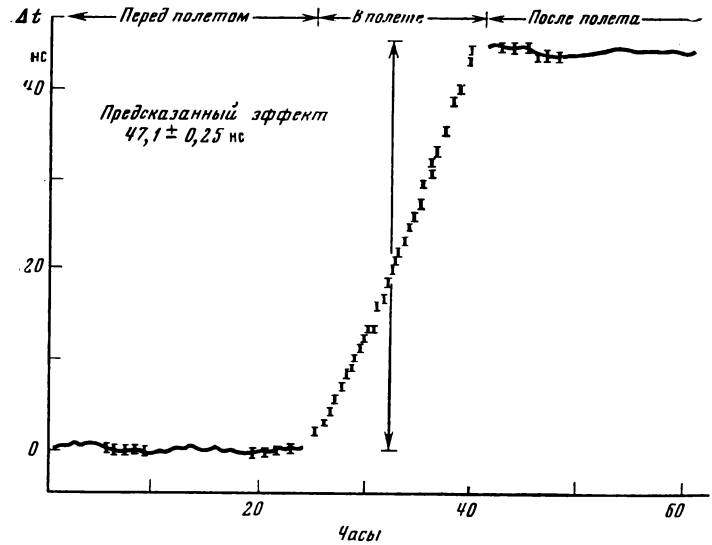


Рис. 3.12. Экспериментальное измерение эффекта гравитационного «замедления» наземных атомных часов по отношению к часам на борту самолета [131]

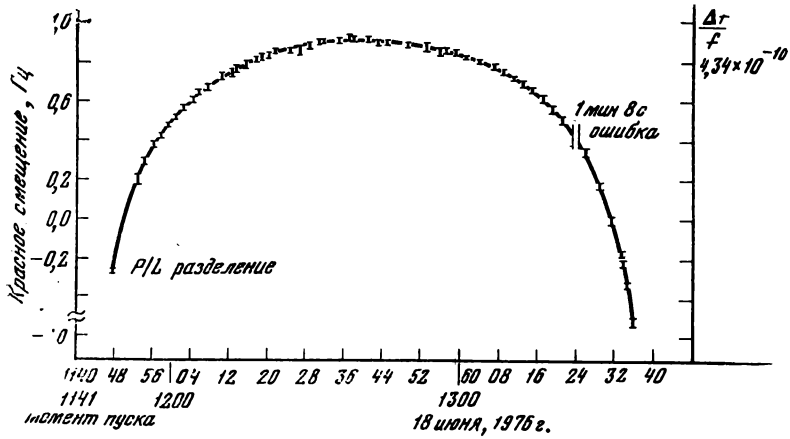


Рис. 3.13. Результаты регистрации красного смещения [323]

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении p.

Нетрудно показать [366], что при комнатной температуре смещение равно $2{,}2 \cdot 10^{-15}$ на 1 К. Таким образом, температурное красное смещение на 1 К сравнимо с ожидаемым гравитационным красным смещением. Это обстоятельство должно учитываться как при планировании, так и при физической интерпретации экспериментов по гравитационному смещению. Результаты по температурному красному смещению привели к крайне важному выводу, кото-

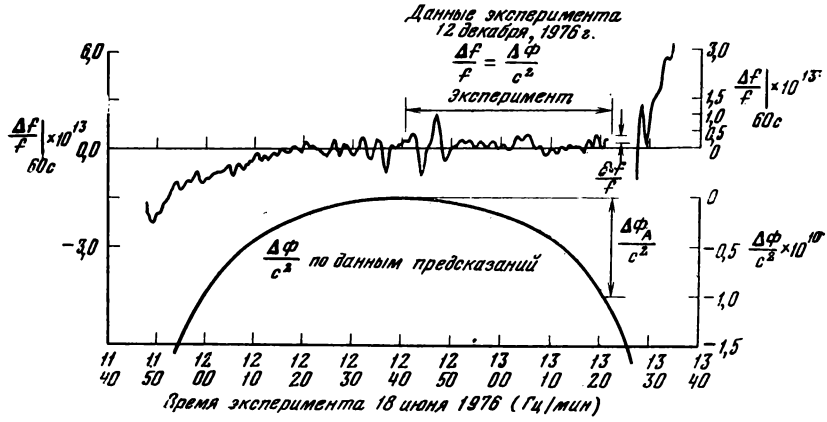


Рис. 3. 14. Результаты измерения изменения частоты и гравитационного потенциала [323]

рый может быть сформулирован следующим образом [94]: «Ускорения, испытываемые атомом в твердом теле, очень велики и превосходят в 10^{14} раз гравитационное ускорение у поверхности Земли, однако это никоим образом не влияет на релятивистское замедление времени».

Таким образом, положение о независимости темпа хода стандартных часов от их ускорения по отношению к инерциальной системе отсчета получило хорошее экспериментальное обоснование.

Перейдем теперь к эффекту гравитационного смещения. В первоначальных экспериментах К. Ребка и Д. Паунда [367] для обнаружения эффекта гравитационного смещения рассматривалось движение фотонов в гравитационном поле Земли. Расчеты показывают, что при перемещении фотона на 1 м пути вблизи поверхности Земли его частота должна измениться на величину $1{,}1 \cdot 10^{-16}$ с$^{-1}$.

В опытах К. Ребка и Д. Паунда излучатель и поглотитель фотонов размещались в башне на расстоянии 22,6 м друг от друга, что создавало определенную разность гравитационного потенциала между генератором и приемником фотонов. Ожидаемый в этой установке эффект гравитационного смещения оказалось возможным измерить благодаря применению некоторых остроумных дополнительных приспособлений, на описании которых мы останавливаться не будем. Опыты подтвердили ожидаемый эффект гравитационного смещения с точностью до нескольких процентов. Значительно более эффективным для исследования гравитационного смещения оказался метод создания искусственных гравитационных полей во вращающихся с большой угловой скоростью ультрацентрифугах.

В экспериментах (Н. Хей и др., И. Хенль, Дж. Бенневитц, Л. Кюндиг, М. Крэншоу и др., Л. Чампни, К. Мун, Л. Чампни

и др.) указанный подход был практически реализован. В опытах указанных авторов использовались быстровращающиеся центрифуги, причем источник γ-излучения и поглотитель располагались на оси вращения и периферии центрифуги. Разность гравитационного потенциала между источником и поглотителем была, таким образом, пропорциональна квадрату угловой скорости центрифуги и расстоянию между ними. В установках упомянутых авторов угловая скорость вращения достигала 36 000—54 000 об/мин, что при радиусе вращения, равном 10 см, создавало ускорение, больше чем в 10^5 раз превышающее гравитационное ускорение у поверхности Земли. Расчет показывает, что при таких ускорениях ожидаемое гравитационное смещение для спектральных линий Fe^{57} будет достигать ширины самой линии, т. е. величины $7 \cdot 10^{-13}$. Эксперименты подтвердили это предсказание с точностью до 1%.

Результаты экспериментальных работ по указанному направлению были также опубликованы в [7] и других работах, которые также подтвердили результаты упомянутых авторов.

Остановимся несколько подробнее на работе Л. Чампни и К. Муна [369]. Эти авторы воспользовались центрифугой, способной вращаться со скоростью до 900 об/с. При размещении источника и поглотителя соответственно в центре и на периферии ротора эти авторы подтвердили полученные ранее Н. Хейем и др. [7] результаты. Вместе с тем Л. Чампни и К. Мун провели эксперимент, разместив источник и поглотитель γ-излучений на периферии ротора на расстоянии $2r=D$, т. е. диаметре ротора. Эксперимент проводился при скоростях вращения ротора 100 и 600 об/с. Результат эксперимента был отрицателен, т. е. никакого гравитационного смещения не было обнаружено, что и следовало ожидать.

Эксперимент Л. Чампни и К. Муна был повторен в работе Л. Чампни, М. Айзека и Дж. Хана [7]. Эти авторы пришли к тому же выводу, что и в [369].

Результаты указанных экспериментов были подвергнуты критике со стороны некоторых авторов (например, [370]), которые утверждают, что якобы результаты описанного эксперимента противоречат теории. Поэтому сделаем несколько пояснений к рассмотренному эксперименту. В данном случае имеем дело с двумя системами отсчета: инерциальной (лабораторной) системой отсчета K, относительно которой вращается ротор центрифуги, и неинерциальной системой отсчета $\overline{K}$, жестко связанной с ротором указанной центрифуги.

Представим теперь, что на периферии ротора на противоположных концах его диаметра расположены двое совершенно одинаковых стандартных часов. С точки зрения инерциальной системы отсчета K эти часы будут идти совершенно одинаковым образом и совершенно одинаковым образом опаздывать по отношению к часам инерциальной системы (это станет ясным, если учесть, что скорости упомянутых часов относительно системы K равны $+v$ и $-v$ соответственно).

С точки зрения неинерциальной системы $\overline{K}$ указанные часы также должны иметь одинаковый темп хода, поскольку в этой системе они неподвижны относительно друг друга и находятся на одинаковом расстоянии от центра, т. е. в области одного и того же значения гравитационного потенциала. Таким образом, между обоими рассматриваемыми часами не существует гравитационного смещения. Именно этот результат был подтвержден в экспериментах Чампни и других.

Можно, однако, рассмотреть с точки зрения инерциальной системы K процесс передачи сигналов от часов, расположенных на одном конце диаметра вращающегося ротора, к часам, расположенным на другом конце этого же диаметра.

Если, как это предлагал А. Г. Баранов, сигналы передаются с помощью пулеметной очереди, то направление движения пуль, испущенных из точки расположения первых часов, должно образовывать определенный угол с радиусом траектории движения этих часов для того, чтобы они попали в точку расположения вторых часов. Если учесть это обстоятельство, а также, как это делал А. Г. Баранов, применить релятивистский закон сложения скоростей, то, как нетрудно убедиться, в рассматриваемой ситуации никакого гравитационного смещения не получается. Это и было подтверждено экспериментом.

Проведенные в последние годы новые эксперименты по гравитационному смещению, основанные на эффекте Мёссбауэра, полностью подтвердили результаты первых работ в этой области.

В [368] проводился усовершенствованный вариант опыта Д. Паунда и К. Ребки. Было использовано мёссбауэровское резонансное поглощение в Fe^{57} γ-лучей с энергией 14,4 кэВ для измерения влияния тяготения на вертикальном отрезке пути длиной 22,5 м. В качестве источника использовался Co^{57} и обогащенный поглотитель — фольга диаметром 38 см. Для величины $2gh/c^2$ получено значение, равное $(0{,}999 \pm 0{,}0076)$ значения $4{,}905 \cdot 10^{-15}$, вычисленного на основе принципа эквивалентности [368]. Систематическая ошибка равнялась $\sim 0{,}01$.

В целом экспериментальные исследования, основанные на эффекте Мёссбауэра, дали блестящее подтверждение теории гравитационного смещения.

В заключение приведем цитату из книги С. Вейнберга [164], в которой четко сформулировано значение измерений гравитационного смещения частоты для ОТО: «Даже если мы предположим, что эксперименты Этвеша — Дики могут быть улучшены до неограниченной точности и что гравитационная масса будет найдена в точности равной инертной массе, все же имеет смысл рассматривать гравитационное красное смещение спектральных линий как независимую проверку принципа эквивалентности».

3.21. Инерциальная навигация с учетом релятивистских эффектов [4]

Задачей навигации в общем случае является определение координат положения объекта относительно фиксированной системы отсчета.

Для определения координат объекта наблюдатель, находящийся на этом же объекте, использует как наблюдения над положением светил на небесной сфере (Солнца, Луны или звезд), так и показания приборов, находящихся на самом объекте (например, акселерометров, с помощью которых можно определить ускорение объекта в каждый данный момент). С помощью указанных процедур реализуется задача навигации.

В тех случаях, когда для определения положения объекта в пространстве-времени используются исключительно показания приборов, находящихся на объекте, и начальные сведения о положении объекта в момент старта, говорят о задаче инерциальной навигации. Здесь в качестве приборов используются исключительно часы, акселерометры и гироскопы.

Задачей об инерциальной навигации занимались многие авторы. Причем, как отмечено Седовым [4], было допущено немало ошибок в этой области. Инерциальная навигация в самом общем виде с учетом релятивистских эффектов рассматривалась в работах Л. И. Седова [4], указавшего: «Можно высказать общее положение о том, что целесообразно осуществлять исследования и устанавливать основные физические соотношения путем измерений и построения теоретических моделей непосредственно в сопутствующей системе отсчета теоретическим или экспериментальным путем, а после этого пересчитывать и переформулировать полученные результаты на точку зрения заинтересованного наблюдателя. По существу, в простейших частных случаях, иногда не совсем в явной форме, так и поступают в физических теориях.

Дальше покажем, что по своему существу результаты, добытые в сопутствующей системе отсчета, имеют более простой вид, чем результаты, полученные после указанной выше переформулировки, которая может быть произведена с помощью дополнительных довольно сложных математических операций, составляющих содержание навигационных расчетов»[8].

Рассмотрение задачи о инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов может оказаться существенным при расчете траекторий движения КЛА, направляющихся к планетам Солнечной системы или за ее пределы.

---

[8] В связи с этой задачей академик М. А. Лаврентьев [371, с. 967] писал: «В последнее время в рамках ОТО Л. И. Седов разрешил общую задачу об инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов и деформаций для малой подвижной частицы материальной среды. Иначе говоря, указаны алгоритмы для определения законов движения частицы для любого наблюдателя по данным измерений характеристик явлений в сопутствующей и собственной для частиц системах отсчета. За эту работу Международная астронавтическая академия присудила Л. И. Седову премию имени Д. и Ф. Гуггенхеймов за 1977 г., которая была вручена ему во время XXVIII конгресса Международной астронавтической федерации в Праге».

В дальнейшем придется пользоваться координатами Ферми и репером Ферми — Уолкера [139].

Задачу инерциальной навигации Л. И. Седов [4] формулирует следующим образом: требуется найти мировую линию C движения малой частицы, которая может моделировать КЛА, а также найти вращение малой частицы относительно инерциального репера Ферми — Уолкера (этот репер в дальнейшем будет связываться с каждой точкой мировой линии C).

Введем систему координат x^i, имеющую векторный базис $\mathfrak{Э}_i^0$. Закон движения рассматриваемой частицы в этой системе координат может быть задан в виде

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \qquad (3.215)$$

где ξ^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — лагранжевы координаты; ξ^4 — время. С помощью закона движения (3.215) можно вычислить длину элемента дуги ds мировой линии C в координатах x^i, координатах ξ^i и в системе координат Ферми — Уолкера.

Длину дуги мировой линии запишем в виде

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k = \hat{g}_{ik} d\xi^i d\xi^k = c^2 d\tau^2 - dl^2. \qquad (3.216)$$

Векторный базис в сопутствующей системе координат, т. е. системе координат ξ^i, будем обозначать через $\hat{\mathfrak{Э}}_i$ и векторный базис в системе координат Ферми — Уолкера через $\mathfrak{Э}_i^*$.

Из закона движения (3.215) могут быть определены время $d\tau$ и длина dl в системе координат Ферми — Уолкера, а также вектор 4-скорости u^i и другие параметры, характеризующие движение рассматриваемой частицы. С помощью этого же закона движения (3.215) эти величины могут быть вычислены в любой другой системе координат, в частности, в сопутствующей системе координат.

Элемент длины мировой линии C в системе координат Ферми записывается [139] в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2}, \qquad \Gamma_{ij}^{\prime k} = 0$$
$$(i, j, k = 1, 2, 3, 4). \qquad (3.217)$$

Согласно [4, 139], координаты z^i точек частицы в базисе $\mathfrak{Э}_i^*$ можно ввести так, чтобы на C выполнялись равенства

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dz^{1^2} - dz^{2^2} - dz^{3^2}, \qquad \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4). \qquad (3.218)$$

Заметим, что базис $\mathfrak{Э}_i$ координат Ферми y^i может совпадать с базисом $\mathfrak{Э}_i^*$ репера Ферми — Уолкера с координатами z^i только в случае, когда мировая линия C является геодезической, т. е. в том случае, когда КЛА свободно падает в космическом пространстве, т. е. ракетный двигатель не работает.

Компоненты бесконечно малого 4-вектора $d\bar{r}$ в любой заданной точке кривой C в базисах системы координат Ферми и Фер-

ми — Уолкера, т. е. компоненты dy^i и dz^i, связаны между собой преобразованием Лоренца.

Из определения базисов векторов $Э_i^*$ и $Э_i$, следует, что векторы $Э_\alpha^*$ движутся поступательно относительно базиса $Э_\alpha$ с постоянной 3-мерной скоростью, т. е. имеем

$$\bar{v} = v^\alpha Э_\alpha = (dy^\alpha/dt)Э_\alpha; \quad dt = d\tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3.219}$$

Компоненты dy^i и dz^k связаны преобразованием Лоренца, определяемого матрицей

$$Э_i^* = d_j^i Э_j; \quad v^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2; \quad k = \frac{1}{v^2}\left[\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} - 1\right];$$

$$(d_i^j) = \begin{pmatrix} 1 + kv^1v^1 & kv^1v^2 & kv^1v^3 & \dfrac{v^1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ kv^2v^1 & 1 + kv^2v^2 & kv^2v^3 & \dfrac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ kv^3v^1 & kv^3v^2 & 1 + kv^3v^3 & \dfrac{v^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ \dfrac{v^1}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{v^3}{\sqrt{c^2 - v^2}} & \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{pmatrix}, \tag{3.220}$$

т. е. имеем

$$dy^i = d_j^i dz^j, \quad d^2y^i/ds^2 = d_\alpha^i (d^2z^\alpha/ds^2). \tag{3.221}$$

В формуле (3.221) учитывалось, что вдоль кривой C $dz^4 = ds$ и, следовательно, $d^2z^4/ds^2 = 0$.

В [4] показано, что для 4-ускорения имеем

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{ds} = \left(\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\Gamma_{jk}^i\right)Э_i^0 = \frac{d^2y^i}{ds^2}Э_i = \frac{d^2z^\alpha}{ds^2}Э_\alpha^*. \tag{3.222}$$

В [4] Л. И. Седов отмечает: «Четырехмерное ускорение M определено независимо от выбора системы отсчета, векторы трехмерного ускорения точки M зависят существенно от выбора системы отсчета».

Из (3.221) следует, что вектор четырехмерного ускорения (умноженный на c^2) равняется вектору трехмерного ускорения точки M относительно ортогонального базиса $Э_\alpha^*$.

Для получения инерциальной информации можно принять, что в СТО или в ОТО и во всех их обобщениях, когда физическое пространство моделируется римановым пространством для малой частицы локально, можно пользоваться механикой Ньютона для описания в бесконечно малое время $d\tau$ движения частицы относительно собственной системы отсчета, определенной в данной точке M векторами базиса Ферми — Уолкера.

Пространственные базисные векторы $Э_\alpha^*$ при перемещении вдоль мировой линии C определяют в каждый момент времени

неизменно ориентированную в пространстве бесконечно малую трехмерную движущуюся поступательно вместе с точкой M платформу, которая может быть реализована физически при помощи трех идеальных малых гироскопов. Пусть на этой платформе установлены три некомпланарных малых акселерометра. Эти акселерометры покажут трехмерное ускорение $\bar{a}^* = a^{*\alpha}\Theta_\alpha^* = (d^2z^\alpha/d\tau^2)\Theta_\alpha^*$ и, следовательно, четырехмерное ускорение согласно формуле (3.221).

На основании формул (3.219), (3.220) и (3.221) для определения v^α по показаниям акселерометров получим для $\alpha = 1, 2, 3$ обыкновенные уравнения

$$v^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dt}; \quad \frac{d^2y^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \cdot \frac{v^\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = d^\alpha_\beta a^{*\beta}. \quad (3.223)$$

Легко проверить, что уравнение, соответствующее $i=4$, является следствием (3.219) и (3.223).

По измерениям $a^{*\alpha}$ система уравнений (3.223) вместе с начальными данными дает решение общей задачи об определении мировой линии в декартовых координатах в рамках СТО.

Далее Л. И. Седов переходит к рассмотрению задачи инерциальной навигации в ОТО.

Для определения преобразования координат y^k к x^j в ОТО в [4] показано, что имеет место следующее соотношение:

$$\Theta_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^j} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} = \Theta^0_k b^k_j; \quad b^k_j = \frac{\partial x^k}{\partial y^j}. \quad (3.224)$$

Очевидно, вдоль кривой C из (3.222) следует

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\Gamma^i_{jk}(x^j) = b^i_j \frac{d^2y^j}{ds^2} = \frac{1}{c^2} b^i_j d^j_\beta a^{*\beta}. \quad (3.225)$$

Учитывая, что вдоль кривой C имеем $\partial\Theta_i/\partial y^k = 0$, $\det|\partial x^k/\partial y^i| \neq 0$, получим

$$\frac{db^k_j}{ds} + \frac{dx^l}{ds} b^i_j \Gamma^k_{il} = 0. \quad (3.226)$$

В [4] отмечено: «Если систему осей гироскопов подчинить принудительным вращениям, то по измерениям соответствующих гироскопических моментов и соответственно угловых скоростей осей гироскопов в этих случаях также можно установить соответствующую систему уравнений, позволяющих решить проблему навигации как в СТО, так и в ОТО».

Решение уравнений (3.224)—(3.226) при соответствующих начальных условиях дает решение задачи об инерциальной навигации в рамках ОТО.

В п. 3.20 уже обсуждались вопросы экспериментальной проверки ОТО с помощью КЛА. Было отмечено, что эксперименты по проверке ОТО на космических аппаратах требуют специальных мер, обеспечивающих геодезичность движения. Для этой

цели наиболее эффективными являются космические зонды и спутники, свободные от сноса [131, 304]. Именно с ними связаны надежды будущих релятивистских экспериментов, так как космические аппараты снабжены устройствами, обеспечивающими им возможность двигаться вдоль геодезических траекторий без существенных отклонений.

Так, в [304] отмечалось: «При этом энергия была бы нужна только для перехода с одной инерциальной траектории на другую, что можно было бы осуществлять либо с помощью двигателей (как обычно), либо с помощью «солнечного паруса», отражающего не воздушные струи, а потоки солнечных фотонов. Таким образом, конфигурацию гравитационных космических аппаратов можно использовать для «экономной» космической навигации».

Навигационный спутник ВМС США «Triad-1», свободный от сноса (первый из серии спутников «Transit») был первым примером использования конфигурации гравитационного поля Земли, основанный на идеи геодезического движения (общий вид см. на рис. 3.15), был запущен в США 2 сентября 1972 г. и функционировал в течение года [131, 304]. В основе создания такого спутника лежит идея экранировки пробной массы сферической оболочкой от внешних негравитационных воздействий (см. рис. 3.16), представляющих развитие модели искусственной планеты, предложенной Шварцшильдом. Пробная масса была изготовлена из диа- и парамагнетиков (сплава платины и золота). Уровень компенсации негравитационных ускорений составил $\sim 10^{-8}$ см/с^2; высота орбиты $\sim$800 км; основные силы, сбивающие спутник с геодезической, в среднем были скомпенсированы на уровне $\sim 10^{-3}$.

Центральным элементом в «Triad-1» является акселерометр «Discos», помещенный в центре масс спутника, позволяющий

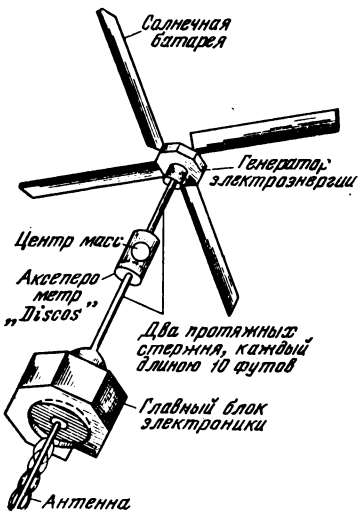
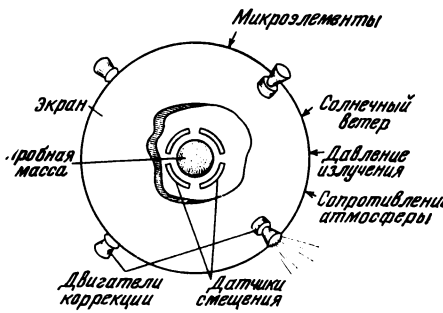


Рис. 3.15. Общий вид спутника «Triad-1» [304]

Рис. 3.16. Схема спутника, свободного от сноса



компенсировать негравитационные силы до уровня $5 \cdot 10^{-9}$ см/с^2. Положение спутника «Triad-1» прогнозировалось с точностью 100 м на две недели вперед (для обычных спутников суточная поправка составляет сотни метров). Результаты испытаний показали [304], что уход «Triad-1» составляет ~200 м/месяц, что позволило расширить вопрос о проверке влияния общерелятивистских эффектов на орбиты спутников. Аналогичный спутник «Кастор» (Франция) испытывался в мае 1975 г.

Геодинамический спутник Lageos (вес 411 кг, ∅ 60 см), запущенный 4 мая 1976 г. (США), снабжен 426 уголковыми отражателями и обеспечивает точность локации наземных объектов до 2 см [304].

В проекте спутника «Гелиос» [131] достижимый уровень компенсации должен составить $\sim 1 \cdot 10^{-10}$ см/с^2, а точность двухнедельного прогноза увеличивается до сантиметров.

Более подробный обзор можно найти в [130, 131, 132]. Здесь только отметим подготавливающийся уже много лет эксперимент с релятивистским гироскопом [131]. Такой гироскоп должен иметь остаточный дрейф не больше $\sim 10^{16}$ рад/с ($6 \cdot 10^{-4}$ угл. с/год), а точность измерения «геодезической прецессии» достигнет 0,01%. Пробный полет для испытания всей системы в целом предусмотрен программой на космическом корабле «Shuttl-10».

В целом ввод в практику космических полетов спутников, свободных от сноса, дает возможность ввести качественно новый инструмент в реализацию задачи инерциальной навигации КЛА.

3.22. Заключительные замечания

Существует обширная, практически необозримая литература, посвященная ОТО. Здесь нет возможности хотя бы дать краткий обзор основных работ в этой области. Поэтому ограничимся перечислением только некоторых из числа наиболее важных работ по ОТО.

Краткий (но весьма удачный в методическом отношении) очерк СТО и ОТО (теории гравитации) дан самим А. Эйнштейном в его лекциях, прочитанных в 1921 г. в Принстоне (США) [43]. Основные работы А. Эйнштейна, посвященные как теории относительности, так и другим разделам современной физики, изложены в четырехтомном издании его избранных работ [43].

Одной из лучших работ по теории относительности остается до настоящего времени книга В. Паули [89], несмотря на то, что она была впервые опубликована в 1920 г. Следует также отметить ряд капитальных монографий, в которых дано достаточно подробное изложение СТО и ОТО. К их числу относятся монографии Э. Эддингтона [145], В. А. Фока [56], Р. Толмена [142], П. Г. Бергмана [103], Х. Меллера [139], М. А. Тоннела [91], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [88], Р. Утияма [136] и многих других.

Среди монографий, специально посвященных теории гравитации, следует отметить трехтомник Ч. Мизнера, К. Торна и Дж. Уилера [133], Н. В. Мицкевича [159] и др.

Ряд интересных работ по общим вопросам теории относительности опубликован В. Л. Гинзбургом [67], Л. И. Седовым [171] и др.

Отмеченные выше работы предназначались в основном для читателей-физиков, имеющих определенную подготовку. Здесь можно упомянуть также книги, предназначенные для инженеров [7] и др.

Ряд специальных проблем теории относительности, таких, как например, пресловутый «парадокс с часами», физическая природа гравитационного смещения, возможность существования сверхсветовых скоростей в теории относительности, экспериментальная проверка основ теории относительности и др., довольно оживленно обсуждались в литературе начиная с момента создания теории относительности вплоть до настоящего времени.

Что касается «парадоксов с часами», то этой мнимой проблеме было посвящено громадное количество работ, несмотря на то, что разъяснение этой проблемы было дано еще в первых работах по теории относительности А. Эйнштейном [43] и В. Паули [89].

Разъяснение В. Паули основывалось на сравнении длин двух мировых линий рассматриваемых часов в 4-мерном пространственно-временном континууме (см. подробно гл. 2). Одни из рассматриваемых часов двигались в этом континууме по геодезической (т. е. по прямой линии), а другие часы по ломаной; но в 4-мерном пространственно-временном континууме такая ломаная линия короче прямой. На этом обстоятельстве и основано разъяснение «парадокса» [7].

Разъяснение А. Эйнштейна основывалось на эффекте зависимости темпа хода часов от величины гравитационного потенциала в той точке, где расположены часы, т. е. в конечном счете на эффекте гравитационного смещения.

В указанных разъяснениях не было, однако, полного расчета хода времени в сравниваемых системах отсчета.

Другой метод разъяснения «парадокса с часами» дан в так называемом методе трех инерциальных систем отсчета [7, 95, 97]. В этом методе дается полный расчет хода времени в сравниваемых системах отсчета. Этот метод изложен в главе 2 настоящей книги.

Связь эффекта гравитационного смещения с кинематикой теории относительности была показана А. Г. Барановым [147], а с более общей точки зрения — в [7, 151]. В [7] дана также точная формула для интегрального эффекта гравитационного смещения.

Вопрос существования сверхсветовых скоростей в теории относительности рассматривался во многих работах с различ-

ных точек зрения (здесь не идет речь о тахионах, сведения о которых можно найти в [7, 152—154] и др.). Так, в частности, этим вопросам посвящены работы В. Л. Гинзбурга [67]. В [7] было показано, что сверхсветовые скорости следуют прямо из преобразования Лоренца. Например, одновременная вспышка лампочек, расположенных на равных расстояниях вдоль оси x_1 в системе отсчета S_1, будет в системе отсчета S, движущейся относительно S_1 вдоль оси x_1 прямолинейно и равномерно, представляться в виде волны, распространяющейся со сверхсветовой скоростью. Однако никакого противоречия с СТО здесь нет, так как эта волна не сопровождается передачей энергии-импульса и не может, следовательно, быть использована для передачи информации. В этой же работе [7] было показано, что действие S также может распространяться со сверхсветовой скоростью, несмотря на то, что оно описывается релятивистски инвариантным уравнением Гамильтона — Якоби. Эта волна также не связана с передачей энергии-импульса от частицы к частице в потоке невзаимодействующих частиц, описываемого уравнением Гамильтона — Якоби. Суть дела сводится к тому, что уравнение Гамильтона — Якоби дает эйлерово описание потока невзаимодействующих частиц (т. е. описания того, что происходит в данной точке пространства в различные моменты времени с различными частицами). Таким образом, здесь также нет противоречия с теорией относительности.

В заключение отметим, что уравнение Гамильтона — Якоби играет совершенно особую роль как в классической, так и в квантовой механике, что показано в главе 4. Здесь, в частности, следует отметить, что уравнения характеристик уравнения Гамильтона — Якоби являются уравнениями движения как в классической, так и в релятивистской областях [7, 69]. Одной из важнейших проблем, стоящих в ОТО (теории гравитации), является проблема закона сохранения энергии-импульса. Интересные работы в этом направлении были опубликованы Л. И. Седовым [171], А. А. Логуновым с соавторами [172], Х. Меллером [149] и др.

В последние годы значительное внимание привлекает к себе возможность использования топологических методов в теории динамических систем. Здесь следует отметить работы Л. А. Люстерника, Н. П. Понтрягина, М. А. Красносельского и др. Например, в работах Л. А. Люстерника [376] исследованы топологические свойства поверхностей уровней функции n переменных. Подробно эти свойства исследованы для функций одной, двух, трех и т. д. переменных. Эти математические результаты Л. А. Люстерника иллюстрированы примерами механических систем в [39, 58] и др. Топологические методы нашли широкое применение не только в теории гравитационного поля [133, 118, 146], но и в теориях других физических полей, теории эволюции и равновесия динамических систем [39, 58], теории солитонов [121, 124, 215, 222, 235, 253].

Глава 4

КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Так как по квантовой теории существует обширная (к настоящему времени почти необозримая) журнальная и монографическая литература (см. по этому поводу заключительные замечания к настоящей главе), то здесь главное внимание уделяется изложению принципиальных и методологических вопросов единого подхода к построению моделей квантовых динамических систем на основе квантового постулата [7].

Центральным в квантовом постулате является уравнение Гамильтона — Якоби, записанное для соответствующих пространственно-временных континуумов (в евклидовом, псевдоевклидовом, римановом, финслеровом и других пространствах). Такой подход существенно отличается от известных моделей квантовой теории и позволяет объединить ранее разрозненные известные квантовые динамические системы в единую систему. Этот подход позволяет получить новые уравнения движения в общем случае релятивистских квантовых динамических систем с произвольным спином.

4.1. Некоторые основные положения теории математических моделей классической квантовой механики

Исторически квантовая теория в отличие от теории относительности возникла на основе математической модели и строилась по аналогии с классической механикой на основе принципа соответствия. После создания математических моделей квантовой теории стали искать физические интерпретации этих моделей на основе согласования с экспериментом. В отличие от классической механики в квантовой теории имеем совершенно другую картину описания явлений и процессов. Здесь микрообъекты (элементарные частицы и атомы) обладают свойствами, принципиально не допускающими наглядное описание на макроуровне в виде единой физической картины. О свойствах микрообъектов судят по их взаимодействию с измерительными приборами, которые всегда являются некоторыми стандартными

макрообъектами. Как известно, основной экспериментальный факт, установленный на основании всех наблюдений над микрообъектами, заключается в том, что в одних стандартных макроусловиях микрообъекты ведут себя как частицы (корпускулы), а в других стандартных макроусловиях — как волновые процессы.

Этот дуализм «волна — частица» является характерной особенностью микромира.

В. Гейзенберг [51] отмечает: «Ясно, что материя не может одновременно состоять из волн и частиц,— оба представления чересчур различны. Скорее разрешение трудности нужно искать в том, что обе картины (корпускулярная и волновая) суть только аналогии, которые иногда имеют место, иногда нет.

В действительности, например, экспериментально только показано, что в некоторых опытах электроны ведут себя как частицы, но при этом отнюдь не доказано, что они обладают всеми признаками корпускулярного образования. То же следует mutatis mutandis и для волновой картины. Оба представления могут быть действительны как аналогии только в известных предельных случаях».

Описанная ниже основная математическая модель квантовой теории отражает этот основной фундаментальный факт, полученный на основании всех проведенных наблюдений и экспериментов над микрообъектами различной природы. В квантовой теории понятие вероятности не может рассматриваться как следствие неполноты исходной информации или отсутствия в квантовой теории некоторых «скрытых» параметров, явно ею не учитываемых. Дело в том, что, как показал Дж. фон Нейман [402], математическая структура квантовой теории не допускает существования таких «скрытых» параметров [386].

Что же касается соотношений неопределенности Гейзенберга, то, как это подчеркивал сам В. Гейзенберг, их следует рассматривать как ограничения на области применимости классических понятий.

Прежде чем идти дальше, приведем принадлежащую Вандер-Вардену [63] общую характеристику основных свойств квантовых систем.

«I. Собственные значения образуют непрерывно возрастающую бесконечную последовательность.

II. Каждому собственному значению соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций, из линейных комбинаций которых с комплексными коэффициентами образуются все другие функции. Если их число $k>1$, то говорят о k-кратном вырождении. Эти k собственных функций всегда можно выбрать так, чтобы они были взаимно ортогональны. Если это сделать для всех значений энергии и расположить полученные функции по возрастающим собственным значениям, то получим систему из бесконечно большого числа взаимно ортогональных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Таблица 4.1

Состояние системы	Волновая функция	Луч Ψ функционального пространства
Физическая или наблюдаемая величина	Эрмитов оператор A, действующий на Ψ	Эрмитова матрица отображения функционального пространства самого на себя
Наблюдаемое значение α	Собственное значение α_i оператора или характеристические постоянные уравнения $A\Psi_i = \alpha\Psi$	Собственное значение матрицы, приведенной унитарным преобразованием координат к диагональному виду
Определенное значение α_i	Собственная функция Ψ_i оператора A, соответствующая собственному значению α_i	Луч функционального пространства, который оператор A умножает на α_i

III. При непрерывном изменении входящих в оператор H параметров (например, массы или силы внешнего поля и т. д.) собственные значения непрерывно и дифференцируемо зависят от этих параметров.

IV. Собственные функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ образуют замкнутую систему функций. Это значит, что каждая непрерывная функция ψ может быть с любой точностью аппроксимирована «в среднем» соответственно выбранной суммой $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu$, т. е. что для любого ε можно выбрать c_ν и n так, чтобы среднеквадратичная ошибка

$$\left\| \psi - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu \right\|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Ряд $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu$ называется разложением ψ по замкнутой ортогональной системе φ_ν».

Дополнительные вопросы можно найти в [388, 389, 401, 402, 403, 405] и др.

Достаточно общая ситуация, имеющая место в квантовой механике, отражена в табл. 4.1, принадлежащей Е. Вигнеру [138].

Таблица 4.2 (к стр. 234)

Вид преобразования	Преобразование операторов P_j	Преобразование компонент ψ_k
Вращение вокруг оси OZ	$P_1=P'_1\cos\alpha-P'_2\sin\alpha;$ $P_2=P'_2\cos\alpha+P'_1\sin\alpha;$ $P_3=P'_3;\ P_0=P'_0$	$\psi'_1=\psi_1(x^{1'},x^{2'},x^{3'},x^{0'})\exp\left\{-i\frac{\alpha}{2}\right\};$ $\psi'_2=\psi_2(x^{1'},x^{2'},x^{3'},x^{0'})\exp\left\{i\frac{\alpha}{2}\right\};$ $\psi'_3=\psi_3(x^{1'},x^{2'},x^{3'},x^{0'})\exp\left\{-i\frac{\alpha}{2}\right\};$ $\psi'_0=\psi_0(x^{1'},x^{2'},x^{3'},x^{0'})\exp\left\{i\frac{\alpha}{2}\right\}$
Вращение вокруг оси OY	$P_1=P'_1\cos\theta+P'_3\sin\theta;$ $P_3=P'_3\cos\theta-P'_1\sin\theta;$ $P_2=P'_2;\ P_0=P'_0$	$\psi'_1=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}+\psi_2\sin\frac{\theta}{2};$ $\psi'_2=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}-\psi_1\sin\frac{\theta}{2};$ $\psi'_3=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}+\psi_0\sin\frac{\theta}{2};$ $\psi'_0=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}-\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$
Простое преобразование Лоренца	$P_3=P'_3\mathrm{ch}\gamma+P'_0\mathrm{sh}\gamma;$ $P_0=P'_0\mathrm{ch}\gamma+P'_3\mathrm{sh}\gamma;$ $P_1=P'_1;\ P_2=P'_2$	$\psi'_1=\psi_1\mathrm{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_3\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2};$ $\psi'_2=\psi_2\mathrm{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_0\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2};$ $\psi'_3=\psi_3\mathrm{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_1\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2};$ $\psi'_0=\psi_0\mathrm{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_2\mathrm{sh}\frac{\gamma}{2}$

4.2. Квантовый постулат и элементы единой системы волновых уравнений квантовой теории

4.2.1. Вводные замечания. Одна из особенностей современной математической модели квантовой теории заключается в утверждении, что из уравнений Шредингера при $\hbar\to 0$ может быть получено уравнение Гамильтона — Якоби классической механики.

Согласно [106, 389, 404], это достигается путем подстановки в уравнение Шредингера

$$\psi = R\exp\{iS/\hbar\}, \tag{4.1}$$

которая приводит, как показано при некотором дополнитель-

ном допущении к двум уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(x) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} = 0; \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2m}(R\nabla^2 S + 2\nabla R \nabla S) = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2), действительно, при $\hbar \to 0$ приводится к уравнению Гамильтона — Якоби в классической механике. Уравнение (4.3) интерпретируется при замене переменных $P = R^2(x)$ как уравнение сохранения плотности вероятностей. В свою очередь, П. Дирак [420, с. 151] показал, что его система уравнений в первом приближении приводится к уравнениям Шредингера. Таким образом, устанавливается приближенная связь с классическим (нерелятивистским) уравнением Гамильтона — Якоби не только уравнений Шредингера, но и уравнений Дирака.

Указанная взаимосвязь лежит не только в основе математической модели современной квантовой теории, она лежит также в основе физического истолкования этой теории, согласно которому классическая механика является *предельным* частным случаем квантовой механики, включая релятивистскую квантовую механику (при $\hbar \to 0$, $c \to \infty$).

В работе [472] по этому поводу отмечено: «Хорошо известно, что, строго говоря, квантовая теория какого-либо явления, будучи более общей, не может быть выведена из классической. Тем не менее одним из наиболее часто применяемых физиками-теоретиками эвристических приемов при построении квантового описания является «квантование» классической системы, т. е. создание и изучение сначала классической модели явления, а затем переход по тем или иным рецептам к квантовой модели. Такой переход, естественно, неоднозначен, причем природа неоднозначностей оказывается весьма разнообразной. Цель данной работы — исследовать один из аспектов проблемы неоднозначности «квантования» классической системы, связанный с существованием различных лагранжианов, гамильтонианов или функционалов действия, приводящих к одним и тем же классическим уравнениям движения».

Другой особенностью математической модели релятивистской квантовой теории является полная независимость друг от друга уравнений этой теории для частиц с произвольными спинами. Таким образом, уравнения современной квантовой теории для частиц с произвольными спинами не являются элементами единой системы.

В современной квантовой теории каждой динамической переменной сопоставляется некоторый оператор в том или ином представлении; причем вводимые таким образом операторы должны удовлетворять определенным перестановочным соотношениям; введение электромагнитного поля в уравнения также производится по формальному правилу замены $\frac{\partial}{\partial x^j} \to \frac{\partial}{\partial x^j} -$

$-\frac{ie}{\hbar c}A_j$ и т. д. Все это вместе взятое составляет набор ничем не связанных между собой формальных рецептов и правил.

В данном разделе будет показано, что между уравнением Шредингера и классическим уравнением Гамильтона — Якоби, соответственно между релятивистскими квантовыми уравнениями и релятивистскими уравнениями Гамильтона — Якоби существуют не приближенные, а совершенно точные связи.

Вместе с тем будет показано, что релятивистские квантовые уравнения не являются независимыми друг от друга; наоборот, все они оказываются элементами единой системы. Причем уравнения классической и релятивистской механик не являются предельным частным случаем квантовых уравнений, а наоборот, уравнения квантовой теории получаются путем наложения одного стандартного ограничения на классические уравнения, представленные в особом волновом виде (сказанное относится как к классическому, так и к релятивистскому случаю).

Одновременно будет показано, что упоминавшаяся система независимых формальных правил квантовой теории (введение некоммутативных соотношений, электромагнитных полей и др.) может быть выведена из одного единого общего принципа. В целом квантовый постулат приводит к единой математической модели квантовой теории [7].

Все сказанное выше ни в коей мере не устраняет глубокого принципиального различия между классической и квантовой механиками. Это различие, связанное прежде всего с физической содержательной интерпретацией таких понятий, как координата, импульс частицы, волновое поле и т. д., полностью сохраняется. Вместе с тем квантовый постулат имеет конструктивный характер, так как он содержит в себе возможность получения физически правильных квантовых уравнений для частиц с высшими спинами по единому алгоритму.

Ниже изложен некоторый общий принцип, который в [7] был назван квантовым постулатом и которому подчиняются уравнения Шредингера, ФКГ, Дирака, Максвелла, некоторые уравнения для частиц со спином $s=1$ и более высоким, уравнения Эйнштейна — Шредингера, уравнения Гинзбурга — Тамма с внутренними переменными, нелинейные уравнения Шредингера (S3) (Гинзбурга — Ландау и их аналоги), уравнения sine-Гордона, Кадышевского, Тодорова и некоторые другие уравнения, записанные в соответствующих метриках пространственно-временного континуума Галилея. Минковского, Римана, де Ситтера, Финслера и др.

Отметим, что квантовому постулату подчиняются также очень интересные случаи релятивистских квантовых уравнений с внутренними переменными, предложенных Гинзбургом и Таммом [473], Гинзбургом и Манько [474] и др., некоторые модели нелинейных уравнений квантовой теории и др. Это дает основа-

ние высказать гипотезу [7], что имеющие физический смысл уравнения квантовой теории должны подчиняться квантовому постулату.

Кроме того, ниже будет показано, что при некоторых совершенно естественных дополнительных предположениях упомянутый квантовый постулат может быть строго доказан.

Квантовый постулат, таким образом, приводит к некоторому правилу отбора, позволяющему отличить физически правильные уравнения квантовой теории. Квантовый постулат является принципом, объединяющим все уравнения квантовой механики в единую систему, и в этом заключается его не только физическое, но и методологическое значение. Вместе с тем он приводит к большому количеству следствий, имеющих общее значение для всей квантовой теории.

Один из таких общих выводов заключается в утверждении, что классической механике может быть придана форма, при которой она становится в известном смысле этого слова классическим аналогом квантовой механики. Причем переход от классической к квантовой теории совершается с помощью единой стандартной процедуры. При этом связь между классической и квантовой теорией становится более прозрачной, чем это обычно предполагалось.

Центральным в квантовом постулате является уравнение Гамильтона — Якоби, записанное для соответствующих пространственно-временных континуумов (в евклидовом, псевдоевклидовом, римановом, де Ситтера, финслеровом и других пространствах). Такой подход существенно отличается от известных моделей квантовой теории и позволяет объединить ранее разрозненные известные квантовые динамические системы в единую систему. Этот подход позволяет получить новые уравнения движения в общем случае релятивистских квантовых динамических систем с произвольным спином. Конкретные примеры квантовых систем в теории управления рассмотрены в [398].

Мы не хотели, чтобы читатель затрачивал дополнительные усилия, связанные с математическими аспектами излагаемого материала, а сосредоточил свое внимание на физическом содержании излагаемых вопросов. Поэтому изложение материала данного раздела построено на использовании максимально простых математических средств, но не в ущерб математической и физической строгости изложения. Некоторые необходимые дополнительные математические методы, используемые в настоящем разделе (например, метод характеристик, спинорное исчисление и исчисление внешних форм Картана), изложены в гл. 2 и приложениях 1, 2.

4.2.2. Общая математическая структура квантового постулата. Пусть задано релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби (см. гл. 2) вида

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + m^2c^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 0). \tag{4.4}$$

Введем функцию $\Omega(x^1, x^2, x^3, x^0, S)=\text{const}$, с помощью которой функция действия S выражается неявно, т. е. $S=S(x^1, x^2, x^3, x^0)$. Воспользовавшись теперь известным преобразованием [109]

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)\Big/\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial x^k}=-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^k}\right)\Big/\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right), \tag{4.5}$$

уравнение Гамильтона — Якоби можем представить в виде

$$\left\{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^i}-\frac{e}{c}A_i\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2+m^2c^2\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2\right\}=\{\Gamma-\text{Я}\}=0. \tag{4.6}$$

Полученное уравнение (4.6) будем в дальнейшем называть *трансформированным уравнением Гамильтона — Якоби* и обозначать символом $\{\Gamma-\text{Я}\}$.

Дальше поступим следующим образом [7].

1. Трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби возводится в целочисленную степень $\alpha(2s+1)$, где s — спин частицы. Число $\alpha=1, 2, 3, \ldots$ зависит от условий, указанных ниже.

2. Полученное уравнение (в том случае, когда можно принять $\alpha=1$) рассматривается как характеристическое многообразие для системы $(4s+2)$ линейных уравнений первого порядка

$$Lu=\lambda(\partial u/\partial S) \tag{4.7}$$

для $4s+2$ функций, которые в дальнейшем будем называть *фундаментальными*. Эта совокупность $4s+2$ фундаментальных функций должна быть спинором для полуцелого спина (о спинорах см. [117]) или тензором для целого спина. Если систему уравнений (4.7), удовлетворяющую указанным условиям, невозможно написать, то выписывается система второго порядка, имеющая вид

$$Lu=\lambda(\partial^2 u/\partial S^2). \tag{4.8}$$

При этом принимается $\alpha=2$ и т. д. Все полученные таким образом уравнения должны быть релятивистски-инвариантными и содержать только старшие производные. Перечисленная совокупность требований однозначно определяет классические волновые уравнения с точностью до линейного преобразования, не меняющего релятивистской инвариантности. Могут, однако, существовать случаи вырождения. Так, например, в случае $s=0$ (скалярные частицы) должны согласно принятому правилу существовать две функции ψ_1, ψ_2. Но такие две функции не могут образовать тензора в псевдоевклидовом пространстве. Следовательно, они должны быть скалярными, тождественно совпадающими друг с другом. Соответствующие волновые уравнения также оказываются тождественными. Отметим, что все приведенные линейные уравнения должны содержать только старшие производные и быть релятивистски-инвариантными (за исключением уравнения Шредингера в классической области). Эти волновые уравнения можно рассматривать как *классический аналог квантовых волновых уравнений.*

3. Полученные в предыдущем пункте «классические» волновые уравнения подвергаются стандартному преобразованию

$$\varphi_k(x^1, x^2, x^3, x^0, S) = \psi_k(x^1, x^2, x^3, x^0) \exp\left\{-\frac{iS}{\hbar}\right\} \tag{4.9}$$

или

$$\varphi_k(x^1, x^2, x^3, x^0, S) = \psi_k(x^1, x^2, x^3, x^0) \exp\left\{+\frac{iS}{\hbar}\right\}, \tag{4.10}$$

где $\varphi(x, S)$ — вектор классических волновых функций; $\psi(x)$ — вектор квантовых волновых функций. Полученные с помощью трансформаций (4.9), (4.10) уравнения будут квантовыми уравнениями для частиц с различными спинами. Эти уравнения будут иметь вид

$$Lu = \lambda u; \tag{4.11}$$

здесь L — линейный оператор; u — вектор-функция.

Может случиться, что не существует ни спинора, ни тензора, имеющих в точности $4s+2$ компонент. Тогда следует ввести спинор или тензор с n компонентами, причем ближайшее большее целочисленное n должно удовлетворять соотношению $n > 4s+2$. К полученной таким образом системе n уравнений для n волновых функций в соответствии с изложенной выше процедурой следует добавить $[n-(4s+2)]$ инвариантных алгебраических соотношений. Тогда число независимых компонент волновых функций [1] будет в точности равно $4s+2$.

В качестве иллюстрации рассмотрим применение приведенной модели к выводу основных уравнений квантовой теории.

Пример 1. Уравнение Шредингера для одной частицы, движущейся в заданном потенциальном поле. Классическое уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид (см. гл. 2)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\right)^2 + U(x^1, x^2, x^3) = 0. \tag{4.12}$$

Трансформированное по (4.5) уравнение Гамильтона—Якоби записывается в виде

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial S}\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^i}\right)^2 + U(x^1, x^2, x^3)\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2 = 0. \tag{4.13}$$

Соответствующее классическое волновое уравнение, для которого (4.13) явля-

[1] Иногда, для того чтобы уменьшить число независимых компонент волновых функций до величины $4s+2$, к основным волновым уравнениям добавляют некоторые дополнительные дифференциальные условия (например, типа Лоренца в теории электромагнитного поля). Но таким способом число независимых компонент волновой функции не уменьшается, а сама система уравнений становится сверхопределенной. Отметим, что общая теория сверхопределенных систем, разработанная Викье, Жанэ, Томасом и др., изложена в монографии С. П. Финикова [475].

ется уравнением характеристик, принимает вид

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial S}+\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{i^2}}+U\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{4.14}$$

Применив трансформацию (4.9) и (4.14), получим уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{j^2}}+U(x^1, x^2, x^3)\psi. \tag{4.15}$$

Вывод уравнения (4.15) был опубликован И. И. Гольденблатом в 1964 г. и повторен в 1965 г. И. С. Аржаных [476].

Уравнение Шредингера выводилось разными способами в [404, 389, 477] и др. Приведенный вывод принципиально отличается от работ [404, 389, 477].

Пример 2. Уравнение Шредингера для N взаимодействующих заряженных частиц (атом с зарядом ядра Ze). Если пренебречь всеми спиновыми взаимодействиями электронов и всеми ядерными эффектами (в частности, конечностью размеров и массой ядра), то в рассматриваемом случае классическое уравнение Гамильтона — Якоби для N взаимодействующих электронов, движущихся в поле ядра, будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1^k}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2^k}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3^k}\right)^2\right]-$$

$$-Ze^2\sum_j\frac{1}{r_j}+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}=0, \tag{4.16}$$

здесь m — масса электрона; e — его заряд; r_j — абсолютная величина радиус-вектора j-го электрона; $r_{ij}=|r_i-r_j|$. Напомним, что суммирование во второй и третьей суммах (4.16) ведется по всем N электронам. В последнем слагаемом суммирование идет по всем параметрам ($i\neq j$), причем каждая пара встречается однократно [405]: $\sum_{i>j}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}$.

Преобразуя уравнение Гамильтона — Якоби (4.16) по (4.5), получим

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial t}\frac{\partial\Omega}{\partial S}+\frac{1}{2m}\left[\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1^k}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_2^k}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_3^k}\right)^2\right]\right]+$$

$$+\left[-Ze^2\sum_j r_j+\sum_{i>j}\frac{1}{r_{ij}}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2=0. \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) есть уравнение характеристического многообразия для следующего классического волнового линейного уравнения, содержащего только старшие производные:

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial S}+\frac{1}{2m}\left[\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^{k^2}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^{k^2}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^{k^2}}\right]\right]+$$

$$+\left[-Ze^2\sum_j\frac{1}{r_j}+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{4.18}$$

Подвергнув уравнение (4.18) преобразованию (4.9), получим следующее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \tag{4.19}$$

где

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_j \nabla_j^2 - Ze^2\sum_j \frac{1}{r_j} + \sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}.$$

Для стационарного случая следует положить [405]

$$\psi \Rightarrow \psi \exp\left\{-\frac{iEt}{\hbar}\right\}, \quad H\psi = E\psi, \tag{4.20}$$

где E — полная энергия электронов. Здесь $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_f \nabla_f^2\right]$ — кинетическая энергия электронов; $\left[-Ze\sum_f \frac{1}{r_j}\right]$ — кулоновское взаимодействие электронов с ядром; $\left[\sum_{i>f}\frac{e^2}{r_{if}}\right]$ — кулоновское взаимодействие электронов друг с другом.

Пример 3. Уравнение ФКГ для свободной частицы со спином $s=0$. Уравнение Гамильтона — Якоби для рассматриваемого случая, как известно, имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{4.21}$$

Подвергнув это уравнение преобразованию (4.5), получим

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2 = 0. \tag{4.22}$$

Последнее уравнение является характеристическим многообразием для следующего линейного волнового уравнения, содержащего только старшие производные:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{3^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m^2c^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} = 0. \tag{4.23}$$

Нетрудно убедиться, что полученное уравнение релятивистски инвариантно, если учесть, что S — инвариант.

Подвергнув теперь (4.23) трансформации (4.9), получим уравнение ФКГ для свободной частицы со спином $s=0$, т. е.

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{3^2}} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{4.24}$$

Пример 4. Уравнение ФКГ для частицы со спином $s=0$, движущейся в электромагнитном поле. Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для рассматриваемого случая имеет вид (4.4)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^j} - \frac{e}{c}A_j\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi^0\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{4.25}$$

Подвергнув уравнение (4.25) преобразованию (4.5), получим трансформиро-

ванное уравнение Гамильтона — Якоби

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^k}\right)^2-\frac{2e}{c}A_k\frac{\partial\Omega}{\partial x^k}\frac{\partial\Omega}{\partial S}+\frac{e^2}{c^2}A_k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2+2e\varphi^0\frac{\partial\Omega}{\partial t}\frac{\partial\Omega}{\partial S}+e^2\varphi^{0^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]+m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2=0. \tag{4.26}$$

Последнее уравнение (4.26) является уравнением характеристик для следующего линейного релятивистски инвариантного и содержащего только старшие производные волнового уравнения:

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{j^2}}-\frac{2e}{c}A_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial S\partial x^j}\right]+\left[\frac{e^2}{c^2}A_j^2+m^2c^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3,0). \tag{4.27}$$

Применив обе указанные выше подстановки (4.9), (4.10), получим соответственно два комплексно-сопряженных уравнения

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{j^2}}+\frac{2ie}{\hbar c}A_j\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{c^2}A_j^2+m^2c^2\right)\psi=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 0); \tag{4.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{j^2}}-\frac{2ie}{\hbar c}A_j\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{c^2}A_j^2+m^2c^2\right)\psi=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{4.29}$$

Остановимся теперь на одном весьма важном обстоятельстве. Классический аналог для уравнения ФКГ в случае отсутствия полей будет иметь вид (4.23)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{j^2}}+m^2c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{4.30}$$

Подстановка (4.9) дает уравнение в отсутствии электромагнитного поля

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{j^2}}-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0, \tag{4.31}$$

здесь $x^0=ict$. Поэтому в традиционных обозначениях можно написать

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi+\frac{4\pi^2}{h^2}m^2c^2\psi=0. \tag{4.32}$$

Можно получить уравнение ФКГ при наличии электромагнитного поля, т. е. уравнение (4.28) из уравнения (4.32) с помощью хорошо известной в квантовой теории замены операторов

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\to\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{ie}{\hbar c}A_k. \tag{4.33}$$

При этом уравнение ФКГ принимает вид [68, 422]

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}-eA_0\right)^2-\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{e}{c}A_j\right)^2-m^2c^2\right]\psi=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3) \text{ или}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2e\hbar}{ic^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}+\frac{e^2}{c^2}A_0^2-\right.$$
$$\left.-\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^{j\,2}}+\frac{2e\hbar}{ic}\frac{\partial A_j}{\partial x^j}+\frac{e^2}{c^2}A_j^2\right)-m^2c^2\right]\psi=0, \qquad j=1,\ 2,\ 3. \tag{4.34}$$

Отметим, однако, что для формы (4.34) уравнения ФКГ в уравнении классического аналога появится соответствующий дополнительный член, но характеристическое многообразие сохранит свой вид, так как оно составляется на основе только старших производных от функции ψ.

В большинстве работ [68, 422], учитывая, что согласно условию Лоренца

$$\partial A_j/\partial x^j=0, \tag{4.35}$$

переходят от формы (4.32) к форме уравнения ФКГ (4.28).

Таким образом, оба подхода приводят к одному и тому же результату.

Лагранжиан для уравнения ФКГ обычно записывается в следующем виде:

$$\mathscr{L}=-c^2\left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}+\frac{ie}{c}A_\nu\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{c}A_\nu\psi\right)+\mu^2\psi\psi^*\right]. \tag{4.36}$$

Однако этот лагранжиан приводит к уравнению (4.34). Для того чтобы получить уравнение (4.28), необходимо лагранжиан $\mathscr{L}$ записать в виде

$$\mathscr{L}=-c^2\left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\nu}+\frac{ie}{c}A_\nu\psi^*\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{c}A_\nu\psi\right)+\mu^2\psi\psi^*\right]+\lambda\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu}\right), \tag{4.37}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Пример 5. Уравнение Дирака для заряженных частиц со спином $s=1/2$, находящихся в заданном электромагнитном поле. Для частиц со спином $s=1/2$ число компонент волновой функции должно равняться $4s+2=4$. Как известно, объект, описываемый этими функциями в уравнениях Дирака, является спинором. Компоненты спинора имеют своеобразные законы преобразования, представленные в табл. 4.2 на с. 225. Так как уравнения Дирака являются уравнениями первого порядка, то $\alpha=1$ и, следовательно, $\alpha(2s+1)=2$. Таким образом, в соответствии с квантовым постулатом для частицы со спином $s=1/2$ трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби следует возвести в степень 2. В результате имеем

$$\{\Gamma-\text{Я}\}^2=\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^j}-\frac{e}{c}A_j\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2+m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]^2=0. \tag{4.38}$$

Временно, как и при рассмотрении уравнения ФКГ, вместо 4-потенциала A_j введем в рассмотрение так называемый «векторный» потенциал A_1, A_2, A_3 и «скалярный» потенциал φ^0. В этих обозначениях нетрудно убедиться, что уравнения классического аналога уравнений Дирака будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & (p_0-mcp_S) & -(p_1-ip_2) & p_3 \\ -(p_0-mcp_S) & 0 & p_3 & (p_1+ip_2) \\ (p_1-ip_2) & -p_3 & 0 & -(p_0+mcp_S) \\ -p_3 & -(p_1+ip_2) & (p_0+mcp_S) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\\ \varphi_0\end{pmatrix}=0, \tag{4.39}$$

где $p_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}-\dfrac{e}{c}A_jp_S$; $p_S=\dfrac{\partial}{\partial S}$, $j=1,\ 2,\ 3$; $p_0=\dfrac{\partial}{c\partial t}-\dfrac{ie}{c}\varphi^0p_S$.

Для того чтобы получить в качестве характеристического многообразия уравнений (4.39) трансформированное уравнение {Г—Я}^{2}, необходимо после выполнения всех выкладок (приведенных ниже) произвести замену $t = x^0/ic = -ix^0/c$. С помощью указанной выше подстановки вида

$$\varphi_j = \psi_j \exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\} \tag{4.40}$$

из уравнения (4.39) получаем уравнения Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & (p_0 - mc) & -(p_1 - ip_2) & p_3 \\ -(p_0 - mc) & 0 & p_3 & (p_1 + ip_2) \\ (p_1 - ip_2) & -p_3 & 0 & -(p_0 + mc) \\ -p_3 & -(p_1 + ip_2) & (p_0 + mc) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.41}$$

где $p_j = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{e}{c}A_j \quad (j = 1, 2, 3); \quad p_0 = \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\varphi^0.$

Докажем теперь, что уравнения (4.39) действительно имеют в качестве характеристического многообразия (4.38). Для этого перепишем их в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.42}$$

где a_{ij} имеют вид, представленный в табл. 4.3.

Таблица 4.3

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{23}	a_{24}	a_{34}	p_j	p_S
0	$p_0 - mcp_S$	$-(P_1 - iP_2)$	p_3	P_3	$P_1 + iP_2$	$-(P_0 + mcp_S)$	$\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{e}{c}A_j \cdot p_S$	$\frac{\partial}{\partial S}$

Матрица (4.42), следовательно, кососимметрична. Э. Картан показал [55], что кососимметричный определитель с элементами $a_{ij} = -a_{ji}$ может быть представлен в следующем виде (см. Приложение 2):

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = [a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}]^2. \tag{4.43}$$

Учитывая (4.43), легко получить уравнение характеристического многообразия для уравнений классического аналога квантовых уравнений (4.39) Дирака

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1} - \frac{e}{c}A_1\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2} - \frac{e}{c}A_2\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3} - \frac{e}{c}A_3\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \frac{e}{c}\varphi^0\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]^2 = 0. \tag{4.44}$$

Учитывая, что $i\varphi^0 = -A_0$ и $x^0 = ict$, получим из (4.44) уравнение для характеристик, аналогичное уравнению (4.38).

Инвариантность классического аналога (4.44) уравнений Дирака следует непосредственно из инвариантности самих уравнений Дирака и того обстоятельства, что переменная S является инвариантом. Таким образом, строго доказано, что уравнения Дирака полностью удовлетворяют квантовому постулату. Следует подчеркнуть, что приведенные в Приложении 2 другие формы уравнений Дирака также удовлетворяют квантовому постулату.

Система уравнений Дирака (4.41) является релятивистски-инвариантной со следующими законами преобразования компонент ψ_k, представленных в Приложении 2.

Нетрудно заметить, что преобразования компонент ψ_k ($k=1, 2, 3, 0$) существенно отличаются от соответствующих формул преобразований для компонент векторных и тензорных объектов (см. подробнее Приложение 2). Таким образом, из требований релятивистской инвариантности и едином математическом объекте с равноправными компонентами (фундаментальными функциями ψ_k) следует, что имеем дело с новым (по сравнению с векторами и тензорами) математическим объектом, который носит название спинора [55], а соответствующее поле (4.41) называется спинорным.

Из (4.41), (4.43) легко получить выражение для характеристик системы квантовых уравнений, которое будет иметь следующий вид:

$$\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]^2=\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^j}\right)^2\right]^2=0, \qquad (4.45)$$

что совпадает с известным результатом [104, 99]. Согласно (2.165) из (4.45) имеем следующее выражение для скорости распространения фронта волны θ:

$$v^2=\frac{(\partial\theta/\partial t)^2}{\sum\limits_{j=1,2,3}(\partial\theta/\partial x^j)^2}=\frac{(\partial\theta/\partial t)^2}{\frac{1}{c^2}(\partial\theta/\partial t)^2}=c^2, \qquad (4.46)$$

т. е. скорость распространения фронта волны θ в точности равна скорости света c.

Пример 6. Уравнения Максвелла классического электромагнитного поля. Поле частиц со спином $s=1$ и массой покоя $m=0$, т. е. поле фотонов, описывается уравнениями Максвелла (см. гл. 3).

Согласно квантовому постулату уравнения Максвелла для фотона, имеющего массу $m=0$ и спин $s=1$, должны иметь следующее характеристическое многообразие:

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^0}\right)^2\right]^3=0. \qquad (4.47)$$

Заметим, что уравнение (4.47) без возведения в степень 3 совпадает с уравнением эйконала геометрической оптики.

В гл. 3 было показано, что характеристики уравнений Максвелла имеют вид (3.33). Обращаем внимание читателя, что в указанном п. 3.5 приведена уточненная форма характеристик уравнений Максвелла, полученная с учетом того обстоятельства, что последнее уравнение каждой из групп уравнений Максвелла является дифференциальным следствием предыдущих уравнений (см. п. 3.5).

Вместе с тем отбрасывание этих последних уравнений недопустимо, так как при этом нарушается релятивистская инвариантность самих уравнений Максвелла. Отметим, что именно в результате такой неинвариантной процедуры в [99, 104] получались неинвариантные уравнения характеристик уравнений Максвелла

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]^2=0. \tag{4.48}$$

Приведенное уравнение (4.47) характеристического многообразия уравнений Максвелла является точным и релятивистски инвариантным.

Итак, полученное соотношение (4.47) является действительным релятивистски-инвариантным характеристическим многообразием уравнений Максвелла. Заметим, что изложенный в п. 3.5 метод можно применять для нахождения характеристических многообразий аналогичных сверхопределенных систем.

Таким образом, характеристическое многообразие уравнений Максвелла для фотона — уравнение Гамильтона — Якоби в кубе, что согласуется с квантовым постулатом.

Отметим, что В. А. Фоком [56] и в [116] также получено совершенно другим методом характеристическое многообразие типа (4.47), но не возведенное в степень 3. Этот показатель степени имеет принципиальное значение, так как указывает, что уравнения Максвелла удовлетворяют требованиям квантового постулата.

Таким образом, уравнения Максвелла также подчиняются квантовому постулату и являются элементом единой системы волновых уравнений квантовой теории.

Пример 7. О квантовании гравитационного поля. В книге Дж. А. Уилера [133] приведена следующая цитата из статьи de Witta [200]: «Никто не сможет указать последовательный путь перехода от уравнения Эйнштейна — Гамильтона — Якоби

$$(\nabla S/\delta^3 G)+{}^{(3)}R=0$$

к уравнению Эйнштейна — Шредингера».

Уравнение Эйнштейна — Шредингера имеет следующий вид [133]:

$$\nabla^2\psi/(\delta^{(3)}G)^2-({}^{(3)}R\hbar^2)\psi=0. \tag{4.49}$$

Вместе с тем, используя квантовый постулат, можно из уравнения (3.194) легко вывести уравнение (4.49). Уравнение (3.194) в трансформированном виде имеет следующую форму:

$$(\nabla\Omega/\delta^{(3)}G)^2+{}^{(3)}R(\partial\Omega/\partial S)^2=0. \tag{4.50}$$

Волновое уравнение, имеющее в качестве характеристического многообразия (4.50), может быть записано следующим образом:

$$\frac{\nabla^2\varphi}{(\delta^{(3)}G)^2}+{}^{(3)}R\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}=0. \tag{4.51}$$

Полагая далее в соответствии с квантовым постулатом

$$\varphi=\psi\exp\{-iS/\hbar\}, \tag{4.52}$$

получим уравнение Эйнштейна — Шредингера (4.49)

$$\nabla^2\psi/(\delta^{(3)}G)^2-({}^{(3)}R/\hbar^2)\psi=0. \tag{4.53}$$

Итак, уравнения Шредингера, ФКГ, Дирака, Максвелла, Эйнштейна — Шредингера были получены на основе описанной выше процедуры, которую кратко можно сформулировать следующим образом.

1. Записывается уравнение Гамильтона — Якоби для рассматриваемого случая; это уравнение подвергается стандартной трансформации (4.5). Полученное таким образом уравнение возводится в степень $\alpha(2s+1)$, где s — спин частицы, а $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ в зависимости от порядка производных, полученных в результате этой процедуры квантовых уравнений.

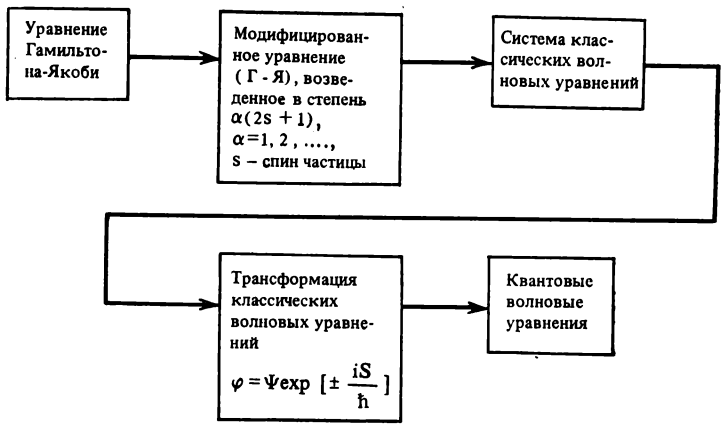
2. Трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби, возведенное в указанную выше степень, рассматривается как характеристическое многообразие для системы линейных дифференциальных уравнений для $(4s+2)$ функций. Эти уравнения являются классическим аналогом квантовых уравнений.

3. Уравнения классического аналога квантовых уравнений подвергаются подстановкам (4.9) или (4.10).

В результате получаются искомые квантовые уравнения.

Отметим, что с помощью указанной процедуры можно получить не только уравнения Шредингера, ФКГ, уравнения Дирака, Максвелла, но также и другие уравнения для частиц с более высоким спином, которые будут приведены ниже. Это дает основание высказать гипотезу, что вообще все имеющие физический смысл квантовые уравнения для частиц с различными спинами, массами и зарядами могут быть получены с помощью описанной процедуры. Будем в дальнейшем эту процедуру совместно с высказанной гипотезой называть *квантовым постулатом* (однако ниже будет показано, что справедливость этой гипотезы может быть строго доказана).

В заключение приведем структурную схему рассмотренной процедуры.



4.2.3. Квантовый постулат и нелинейные уравнения квантовой механики. Все известные линейные уравнения квантовой

механики могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\mathscr{K}\psi=\lambda\psi. \tag{4.54}$$

Здесь ψ — вектор-функция; $\mathscr{K}$ — квантовый оператор, содержащий только старшие производные.

К уравнению (4.54) можно, однако, добавить некоторую функцию f, зависящую только от младших производных вектор-функции ψ и самой функции ψ, т. е. это уравнение можно представить в виде

$$\mathscr{K}\psi=\lambda\psi+f. \tag{4.55}$$

Введенная функция f может быть как линейной, так и нелинейной.

Тот факт, что обобщение квантовых уравнений (4.54) допустимо с точки зрения квантового постулата, становится очевидным, если учесть, что поскольку характеристики дифференциальных уравнений зависят только от старших производных, то в уравнении классического аналога можно сохранить только старшие производные. При этом нелинейные члены вводятся в квантовые уравнения после того, как получена линейная форма этих уравнений.

Для проверки соответствия системы (4.55) квантовому постулату следует отбросить функцию f, так как по условию она должна содержать только низшие производные, и путем замены $\psi=\varphi\exp\{\pm iS/\hbar\}$, $(1/\hbar^k)\psi\to\partial^k\varphi/\partial S^k(\exp\{\pm iS/\hbar\})$ и т. д. перейти к классическому аналогу рассматриваемых квантовых уравнений. Этот классический аналог должен иметь в качестве своего характеристического многообразия трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби, возведенное в степень $\alpha(2s+1)$.

Таким образом, квантовый постулат не только разрешает введение нелинейностей в квантовые уравнения, но и требует, чтобы эти нелинейности охватывали только низшие производные и саму функцию ψ. Что касается старших производных функций ψ, то они должны входить в уравнения только линейно.

Это важное следствие из квантового постулата должно иметь большое эвристическое значение, так как оно указывает границы для возможного нелинейного обобщения уже известных линейных квантовых уравнений.

В качестве примера приведем два известных нелинейных квантовых уравнения: нелинейное уравнение Шредингера (S3) (уравнение Гинзбурга — Ландау) и нелинейное уравнение ФКГ (sine-Gordon). Первое уравнение имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{i^2}}+U(x,t)\psi+k|\psi|^2\psi=0. \tag{4.56}$$

Второе уравнение записывается в виде

$$\hbar^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+\sin\psi=0. \tag{4.57}$$

Заметим, что уравнения (4.56), (4.57) имеют большое значение в теории сверхпроводимости, в теории плазмы, теории элементарных частиц и других областях современной физики, а также привели к открытию нового объекта — солитонов в квантовой области.

4.2.4. Квантовые волновые уравнения для частиц со спином $s=1$.

Предварительные замечания. Квантовые волновые уравнения для частиц со спином $s=1$ были предложены Прока, Дэффином и Кеммером. Подробно эти уравнения рассмотрены В. Паули [89]. Для свободных частиц эти уравнения имеют следующий вид:

$$\psi_{ik}=\frac{\partial B_l}{\partial x^k}-\frac{\partial B_k}{\partial x^l}; \qquad \frac{\partial \psi_{lk}}{\partial x^k}+\varkappa^2 B_l=0. \tag{4.58}$$

Переход к случаю, когда имеют место электромагнитные поля, проводится с помощью общеизвестной стандартной операции замены операторов

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\to D_j=\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{ie}{c\hbar}A_j; \qquad \frac{\partial}{\partial x^j}\to D_j^*=\frac{\partial}{\partial x^j}-\frac{ie}{\hbar c}A_j. \tag{4.59}$$

В результате получим из (4.58), (4.59) следующие эквивалентные уравнения:

$$\psi_{ik}=D_iB_k-D_kB_i, \qquad D_k\psi_{ik}+\varkappa^2 B_i=0. \tag{4.60}$$

Для уравнений (4.60) существует следующий лагранжиан:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\psi_{ik}^*\psi_{ik}+\frac{1}{2}\psi_{ik}^*(D_iB_k-D_kB_i)+$$
$$+\frac{1}{2}(D_i^*B_k^*-D_k^*B_i^*)\psi_{ik}+\varkappa^2 B_i^*B_i. \tag{4.61}$$

В упоминавшемся выше обзоре В. Паули [89] приводится следующее преобразование системы (4.60). Применяя оператор D_i ко второму уравнению системы (4.60) и используя перестановочное соотношение

$$D_iD_k-D_kD_i=-\frac{ie}{c}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)=-\frac{ie}{c}F_{ik}, \tag{4.62}$$

В. Паули получает

$$\varkappa^2 D_iB_i-\frac{1}{2}\frac{ie}{c}F_{ik}\psi_{ik}=0. \tag{4.63}$$

Далее, используя уравнения, совпадающие по существу с первой группой уравнений Максвелла, т. е.

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial \psi_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial \psi_{kl}}{\partial x^i}=0 \tag{4.64}$$

и производя замену операторов (4.59), получаем

$$D_l\psi_{ik} + D_i\psi_{kl} + D_k\psi_{li} = -\frac{ie}{c}(F_{li}B_k + F_{ik}B_l + F_{kl}B_i). \qquad (4.65)$$

Наконец, учитывая (4.60) и (4.63), имеем [2]

$$\sum_k D_k^2 B_j - \varkappa^2 B_j - \frac{ie}{c} F_{jk}B_l - \frac{ie}{2c\varkappa^2}\frac{\partial F_{rs}}{\partial x^j}\psi_{rs} - \frac{ie}{2c\varkappa^2}F_{rs}D_l\psi_{rs} = 0. \qquad (4.66)$$

Учитывая, что

$$D_l\psi_{rs} = D_lD_rB_s - D_lD_sB_r, \qquad (4.67)$$

преобразуем уравнение (4.66) к следующему виду:

$$\sum_k D_k^2 B_l - \frac{ie}{2c\varkappa^2}F_{rs}(D_lD_rB_s - D_lD_sB_r) - \frac{ie}{c}F_{lk}B_l - \frac{ie}{2c\varkappa^2}\frac{\partial F_{rs}}{\partial x^l}\psi_{rs} = 0. \qquad (4.68)$$

Приведенное уравнение Паули будет подробно проанализировано в дальнейшем.

Квантовый постулат и некоторые другие уравнения для частиц со спином $s=1$. Исключив B_j из уравнений (4.60), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\psi_{k\alpha}}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\psi_{l\beta}}{\partial x^\beta}\right) + \varkappa^2\psi_{lk} = 0. \qquad (4.69)$$

Переход к случаю, когда частица находится в электромагнитном поле, производится при помощи обычной стандартной операции $\partial/\partial x^j \to \partial/\partial x^j - (ie/\hbar c)A_j$, т. е.

$$D_jD_\alpha\psi_{k\alpha} - D_kD_\beta\psi_{j\beta} + \varkappa^2\psi_{jk} = 0. \qquad (4.70)$$

С чисто математической точки зрения системы уравнений (4.69), (4.70) являются следствием уравнений (4.60). Однако с физической точки зрения рассматриваемые математические модели существенно различны.

В самом деле, волновые уравнения (4.60) написаны для 10 неизвестных функций ψ_{ik} (шесть компонент) и B_r (четыре компоненты), в то время как согласно общим требованиям к квантовым уравнениям (см. выше) общее число фундаментальных функций должно равняться в данном случае $4s+2=6$. Наличие «избыточных» волновых функций в уравнениях (4.60) является, как отмечено в [478], одной из причин появления

[2] По поводу приведенных уравнений В. Паули замечает [89]: «Следует отметить, что уравнения типа ((4.60) — примеч. авт.), которые можно непосредственно вывести из вариационного принципа, отличаются от ((4.63) — (4.66) — примеч. авт.) тем, что не содержит членов, в которых явно встречается F_{ik}».

сверхсветовых скоростей в присутствии электромагнитного поля F_{ik}.

Кроме того, уравнения (4.60) написаны не для одного, а для двух математических в смысле Вундгейлера объектов: для антисимметричного тензора ψ_{ik} и 4-вектора B_j, что противоречит изложенным выше общим требованиям к квантовым уравнениям.

И, наконец, последнее: характеристические уравнения для классического аналога системы (4.60) не удовлетворяют требованиям квантового постулата, т. е. характеристическое многообразие для этого классического аналога не совпадает с трансформированным уравнением Гамильтона — Якоби, возведенного в степень $\alpha(2s+1)$. Это характеристическое многообразие просто превращается в тождество $0 \equiv 0$.

Остановимся теперь подробнее на уравнениях (4.69), (4.70). Предположим, что в случае свободной частицы

$$\psi_{jk} = (\partial B_j/\partial x^k - \partial B_k/\partial x^j). \tag{4.71}$$

Следует особо подчеркнуть, что введение подстановки (4.71) не означает возвращение к уравнениям Прока (4.60) для свободных частиц, так как в данном случае рассматриваются функции ψ_{jk} (система (4.69)), либо функции B_j (для которых уравнения будут приведены ниже), но не одновременно с функциями ψ_{jk} и B_j, входящими в систему уравнений (4.60) одновременно.

Подстановка (4.71) в (4.69) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial B_l}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^l}\right) - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x^\beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial x^k}\right) +$$

$$+ \varkappa^2\left(\frac{\partial B_l}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\Box B_l - \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\operatorname{div} B -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^l}\Box B_k + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\operatorname{div} B + \varkappa^2\left(\frac{\partial B_l}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^l}\right) = 0$$

или

$$\boxed{\diagup}\left(\frac{\partial B_l}{\partial x^k} - \frac{\partial B_k}{\partial x^l}\right) = 0. \tag{4.72}$$

Учитывая соотношение (4.66) из (4.72), получим

$$\boxed{\diagup}\,\psi_{lk} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, 3, 0); \tag{4.73}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\boxed{\diagup}\,B_l - \frac{\partial}{\partial x^l}\boxed{\diagup}\,B_k = 0. \tag{4.74}$$

Из (4.74) следует, что

$$\boxed{\diagup}\,B_l = \operatorname{grad}\theta. \tag{4.75}$$

Таким образом, любое решение уравнений (4.69) будет удовлетворять уравнениям (4.73), но не обратно.

В самом деле, для того чтобы решения системы (4.73) удовлетворяли исходной (4.69), необходимо, чтобы начальные условия, которые задаются для системы (4.73), не противоречили системе (4.69). На дальнейших математических подробностях здесь останавливаться не будем.

Что касается вектора B_j, вихрь от которого равняется функциям ψ_{jk}, то благодаря наличию в правой части (4.75) градиента произвольной функции θ его значение становится неопределенным. В том случае, если общее решение уравнения (4.75) может быть представлено в виде

$$B_j = \bar{B}_j + \operatorname{grad} \pi, \tag{4.76}$$

где $\boxed{\diagup}\bar{B}_j = 0$, указанная неопределенность не скажется на значениях функций ψ_{jk}. При этом связь между произвольными функциями π и θ принимает следующий вид:

$$\boxed{\diagup}\pi = \theta, \tag{4.77}$$

за исключением особых случаев, таким образом, решение системы (4.69) можно искать в виде (4.71).

Остановимся теперь на вопросах о характеристиках уравнений (4.69).

Поскольку решения уравнений системы (4.73) при определенных начальных условиях, совместных с исходной системой (4.69) (см. выше), будут одновременно удовлетворять (4.69) и поскольку уравнение характеристического многообразия не зависит от начальных условий, то можно утверждать, что характеристические многообразия системы (4.73) и системы (4.69) будут совпадать друг с другом (по крайней мере для решений, представленных в виде (4.71)). То же самое справедливо для классических аналогов как системы (4.69), так и системы (4.73).

Итак, задача сводится к нахождению характеристического многообразия системы

$$\Box \varphi_{fk} + m^2c^2 \frac{\partial^2 \varphi_{fk}}{\partial S^2} = 0, \tag{4.78}$$

где $\varphi_{jk} \exp\{iS/\hbar\} = \psi_{jk}$; $-m^2c^2/\hbar^2 = \varkappa^2$. Характеристическое многообразие для системы (4.78) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} \Omega & & 0 \\ & \Omega & \\ & \ddots & \\ 0 & & \Omega \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^l}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial S}\right)^2\right]^6 = \{\Gamma - Я\}^6 = 0, \tag{4.79}$$

где $\Omega = \sum_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^l}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial S}\right)^2 \quad (j = 0, 1, 2, 3)$.

Итак, система (4.69) удовлетворяет квантовому постулату: характеристическое многообразие представляется в виде транс-

формированного уравнения Гамильтона — Якоби, возведенного в степень $\alpha(2s+1)=2\cdot 3=6$ $(\alpha=2,\ s=1)$.

Хотя система (4.69) является следствием (4.60), между ними есть существенное различие не только в физическом смысле (о чем говорилось выше), но и в математическом. В самом деле, система (4.60) не удовлетворяет квантовому постулату, в то время как (4.69) ему удовлетворяет. Что касается системы уравнения (4.75), то благодаря неопределенности функции θ вообще не приходится говорить о характеристиках этих уравнений. В самом деле, если θ принять в виде $\theta=F_{rs}(\partial B_r/\partial x^s)$, где F_{rs} — произвольный (но дифференцируемый) антисимметричный тензор, то будем получать различные характеристические многообразия в зависимости от выбора тензора F_{rs}. К этому вопросу вернемся ниже.

Отметим, что при наличии электромагнитных полей производится следующая замена операторов в уравнениях (4.69) $\partial/\partial x^k\to\partial/\partial x^k\pm(ie/\hbar c)A_k$ и, следовательно, такая же замена операторов производится в их классическом аналоге и характеристическом определителе.

Отсюда следует, что квантовый постулат будет удовлетворяться для системы (4.69) и при наличии электромагнитных полей.

В заключение отметим, что для частиц со спином $s=1$ возможно обобщение уравнений (4.69) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\psi_{l\alpha}}{\partial x^\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\psi_{k\beta}}{\partial x^\beta}\right)+\varkappa^2\,\Box\,\psi_{lk}=0 \tag{4.80}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\,\Box\left(\frac{\partial\psi_{l\alpha}}{\partial x^\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x^l}\,\Box\left(\frac{\partial\psi_{k\beta}}{\partial x^\beta}\right)+\varkappa^2\psi_{lk}=0. \tag{4.81}$$

Эти системы также будут удовлетворять квантовому постулату. Подробно системы (4.80), (4.81) будут рассмотрены в другой работе.

В соответствии с приведенным системы (4.80), (4.81) будут удовлетворять квантовому постулату и при наличии электромагнитных полей.

4.2.5. Несколько замечаний о возможной форме квантовых волновых уравнений для частиц с целыми спинами. Рассмотрим уравнения Масквелла

$$\Im_{iknm}(\partial F_{kn}/\partial x_m)=0;\qquad \partial F_{ik}/\partial x_k=j_i\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{4.82}$$

Полагая, как обычно,

$$F_{ik}=\partial A_i/\partial x_k-\partial A_k/\partial x_i\qquad (i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{4.83}$$

можно убедиться, что первое уравнение в (4.82) удовлетворяется тождественно, а второе уравнение принимает вид

$$\Box A_i-(\partial/\partial x_i)\,\mathrm{div}\,A=j_i. \tag{4.84}$$

Если применить оператор $\partial/\partial x_i$ (4-мерная дивергенция) к левой и правой частям (4.84), то получим

$$\Box \operatorname{div} A - \Box \operatorname{div} A = (\partial/\partial x_i) j_i = 0, \tag{4.85}$$

т. е. закон сохранения тока.

Нетрудно показать, что уравнения (4.83), (4.84) градиентно инвариантны, т. е. замена $A_i \to A_i + \partial\Phi/\partial x_i$ не меняет вид этих уравнений. Для уравнения (4.83) это очевидно, а для уравнения (4.84) необходимо провести математические выкладки.

Далее, взяв 4-мерный вихрь от обеих частей (4.84) и учитывая (4.83), получим

$$\Box F_{ik} = \partial j_i/\partial x_k - \partial j_k/\partial x_i. \tag{4.86}$$

Естественно, что решение системы уравнений Максвелла (4.82) будет удовлетворять системе уравнений (4.86), но не наоборот. В действительности компоненты F_{ik} не являются независимыми, так как они должны выражаться через компоненты 4-вектора A_i по формулам (4.84). Другими словами, формулы (4.83) допускают только те решения системы уравнений (4.86), которые могут быть выражены через вихрь 4-вектора A_i. Это значит, что в смысле Вундгейлера поле по-прежнему описывается единым объектом — антисимметричным тензором второй валентности F_{ik}, подчиняющимся независимой системе уравнений (4.86). Причем из всего множества решений системы уравнений (4.86) отбирается подмножество, удовлетворяющее условию (4.83).

Заметим, что функции F_{jk}, удовлетворяющие соотношению (4.86), будут тождественно удовлетворять первой группе уравнений Максвелла (4.82). Таким образом, уравнениям Максвелла можно придать вид

$$\begin{aligned} &\Im_{iklm}(\partial F_{lm}/\partial x^k) = 0 \text{ (первая группа);} \\ &\Box F_{ik} = \partial j_i/\partial x^k - \partial j_k/\partial x^i \text{ (вторая группа).} \end{aligned} \tag{4.87}$$

Ниже будет показана эквивалентность форм представления уравнений электромагнитного поля Максвелла (4.82) и (4.87).

Закон сохранения тока (4.85), т. е.

$$\operatorname{div} j \equiv \partial j_i/\partial x_i = 0 \tag{4.88}$$

вместе со вторым уравнением системы (4.87) и (4.83) приводится к следующей системе:

$$\Box F_{ik} = \frac{\partial j_i}{\partial x_k} - \frac{\partial j_k}{\partial x_i}; \quad F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}; \quad \operatorname{div} j = 0. \tag{4.89}$$

Верно, однако, и обратное. В самом деле, подставив (4.83) в (4.86), получим

$$\Box A_i = j_i + \partial\Phi/\partial x_i. \tag{4.90}$$

Взяв дивергенцию от обеих частей (4.90) и учитывая (4.88), получим

$$\Box \operatorname{div} A = \Box \Phi. \tag{4.91}$$

Из (4.91) следует, что $\Phi = \operatorname{div} A$.
Следовательно, уравнение (4.90) принимает вид

$$\Box A_i - (\partial/\partial x_i) \operatorname{div} A = j_i, \tag{4.92}$$

т. е. совпадает с уравнением (4.84).

Таким образом, группа уравнений Максвелла (4.82), (4.83), (4.88) и система уравнений (4.89) эквивалентны. Добавим, что если к обеим частям уравнений (4.86) применить оператор $\partial/\partial x_k$ и просуммировать по индексу k, то получим

$$\Box (\partial F_{ik}/\partial x_k) = \Box j_i \text{ или } \partial F_{ik}/\partial x_k = j_i,$$

т. е. вторую группу уравнений Максвелла (4.82).

Подчеркнем, что в приведенных выше рассуждениях нигде не использовалась гипотеза Лоренца

$$\operatorname{div} A = \partial A_i/\partial x_i = 0. \tag{4.93}$$

Здесь, как и ранее, оператор div носит 4-мерный характер. Если принять условие (4.93), то уравнение (4.92) принимает вид

$$\Box A_i = j_i. \tag{4.94}$$

Полученные таким образом решения вполне законны, несмотря на то, что ни условие Лоренца (4.93), ни уравнение (4.94) не удовлетворяют требованию градиентной инвариантности. Этого в данном случае не требуется, так как градиентная инвариантность должна проверяться на общих уравнениях (4.84) или (4.92), которые, как было показано, этому условию удовлетворяют.

Теперь легко перейти к волновым уравнениям для частиц с высшими целыми спинами. Для этой цели в уравнениях (4.89) для свободных частиц следует принять $j_i = 0$, оператор Даламбера заменить на оператор ФКГ, т. е. $\Box \to \boxed{/}$, вектор-потенциал $A_i \to B_i$ и $F_{ik} \to \psi_{ik}$. В результате получим

$$\boxed{/}\, \psi_{ik} = 0; \quad \psi_{ik} = \partial B_i/\partial x_k - \partial B_k/\partial x_i; \quad \psi_{ik} = -\psi_{ki}. \tag{4.95}$$

Это и есть квантовое волновое уравнение для частиц со спином $s = 1$ и $m \neq 0$. Тогда уравнения для частиц с $m \neq 0$ и $s = 1$ с учетом приведенного выше можно записать в виде

$$\boxed{/}\, \psi_{ik} = 0; \quad \Theta_{iklm} (\partial \psi_{lm}/\partial x^k) = 0.$$

Прежде всего нетрудно убедиться, что квантовый постулат удовлетворяется автоматически. В самом деле, характеристики классического аналога этих уравнений, зависящие только от старших производных (т. е. от производных функций ψ_{ik}), не-

медленно приводят к трансформированному уравнению Гамильтона — Якоби в шестой степени {Г — Я}^{6}, что и требовалось.

Здесь, как и в случае уравнений Максвелла, поле описывается только с помощью функций ψ_{ik}, а выражение тензора ψ_{ik} через 4-вектор B_i имеет характер дополнительных ограничений на множество решений.

Лагранжиан для рассматриваемой системы (4.95) имеет вид

$$\mathscr{L} = \left(\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_n}\frac{\partial \psi^*_{ik}}{\partial x_n}\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi_{ik}\psi^*_{ik} + \lambda_{ik}\left[\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_i}\right) - \psi_{ik}\right]. \tag{4.96}$$

Отметим, что уравнения (4.96) можно было бы вывести из уравнений Кэммера — Дэффина — Прока. Однако здесь они получены заменой $\Box \to \underline{\boxed{}}$.

Весьма интересен случай поведения поля ψ_{ik} при наличии внешнего электромагнитного поля A_i. Здесь путем стандартной замены операторов $\partial/\partial x_k \to \partial/\partial x_k \pm (ie/\hbar c)A_k$ для каждой компоненты поля ψ_{ik} получим уравнения ФКГ при наличии внешних полей.

Отсюда следует, что каждая из компонент рассматриваемого поля распространяется в точности со скоростью света c. Здесь следует помнить, что вектор B_i не имеет самостоятельного значения и служит для отбора решений уравнений (4.95) и является объектом второго рода (см. гл. 1).

В случае частиц со спином 2 могут быть написаны аналогичные уравнения

$$\underline{\boxed{}}\,\psi_{ik} = 0; \qquad \psi_{ik} = \frac{\partial C_i}{\partial x_k} + \frac{\partial C_k}{\partial x_i}; \qquad \psi_{ik} = \psi_{ki}. \tag{4.97}$$

Здесь C_i — некоторый вектор, дающий возможность провести отбор решений уравнений (4.97), имеющих физический смысл.

Легко видеть, что классический аналог указанных уравнений (4.97) удовлетворяет квантовому постулату. Лагранжиан для (4.97) имеет вид

$$\mathscr{L} = \left(\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_n}\frac{\partial \psi^*_{ik}}{\partial x_n}\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi_{ik}\psi^*_{ik} + \lambda_{ik}\left[\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_k} + \frac{\partial C_k}{\partial x_i}\right) - \psi_{ik}\right]. \tag{4.98}$$

В общем случае для частиц со спином s необходимо найти тензор валентности $\psi_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, обладающий такими свойствами симметрии или антисимметрии, которые наряду с условиями приравнивания нулю некоторых его инвариантов привели бы к существованию в точности $(4s+2)$ независимых компонент этого тензора. В том случае, когда это достигнуто, квантовые уравнения для частиц со спином s могут быть записаны в виде

$$\underline{\boxed{}}\,\psi_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0 \tag{4.99}$$

с дополнительными условиями (4.95), (4.97) в зависимости от

симметрии или антисимметрии перестановок его индексов. Кроме того, должны быть добавлены упоминавшиеся выше алгебраические соотношения, выражающие равенство нулю некоторых инвариантов этого тензора.

Здесь необходимо сделать одно замечание. Когда приравниваются нулю некоторые инварианты рассматриваемого тензора, то действительно уменьшается число независимых компонент. Так, в механике сплошных сред, приравнивая нулю первый инвариант тензора напряжений, приходим к так называемому девиатору напряжений, который имеет только пять независимых компонент, в то время как сам тензор напряжений имеет шесть независимых компонент. В квантовой механике в тех случаях, когда число введенных компонент волновой функции превышает $(4s+2)$, вводят иногда в качестве дополнительных ограничений не алгебраические, а дифференциальные соотношения. Этим, однако, цель не достигается, так как при этом просто превращаем исследуемую систему дифференциальных уравнений в сверхопределенную с тем же числом неизвестных функций. Не вдаваясь в излишние подробности, отметим только, что общая теория сверхопределенных систем дифференциальных уравнений, построенная Рикье, Жанэ, Томасом и др., достаточно подробно изложена в [475].

Вернемся к уравнениям Максвелла. Было показано, что из этих уравнений следует

$$\Box F_{ik}=\partial j_i/\partial x_k-\partial j_k/\partial x_i \tag{4.100}$$

при условии

$$F_{ik}=\partial A_i/\partial x_k-\partial A_k/\partial x_i. \tag{4.101}$$

Если принять вихрь от обеих частей второй группы уравнений Максвелла

$$\partial F_{ik}/\partial x_k=j_i, \tag{4.102}$$

то, учитывая (4.100), нетрудно получить

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial F_{k\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)-\Box F_{ik}=0. \tag{4.103}$$

Отсюда следует, что множество решений системы (4.103), удовлетворяющее условию (4.101), охватывает как свободные электромагнитные поля, так и поля, вызванные током.

Можно выделить подмножество свободных электромагнитных полей и полей, вызванных наличием тока j_i, а также определить значение этого тока $j_i=j_i(x^1, x^2, x^3, x^0)$ $(i=1, 2, 3, 0)$ с помощью (4.102), в которые следует подставить полученные решения системы (4.103). Системой (4.103) можно воспользоваться для описания частицы со спином $s=1$ и массой $m\neq 0$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \psi_{k\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \psi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)-\boxed{/}\,\psi_{ik}=0; \quad \psi_{ik}=-\psi_{ki}. \tag{4.104}$$

Эти уравнения не могут быть получены из уравнений Кэммера — Дэффина — Прока для частиц со спином $s=1$. Аналогично мо-

гут быть получены квантовые волновые уравнения для частиц со спином $s=2$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \psi_{k\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \psi_{l\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)+\boxed{/}\,\psi_{lk}=0; \qquad \psi_{lk}=\psi_{kl}. \tag{4.105}$$

Эта система уравнений существенно отличается от уравнений Фирца — Паули [89, 429] хотя бы потому, что здесь отсутствуют дополнительные алгебраические соотношения.

Не будем здесь подробно обсуждать эти уравнения. Отметим, что если предположить, что имеем частицу со спином $s=1$ и массой $m=0$ (фотон), и произвести замену $m^2c^2/\hbar^2=\nu^2/c^2$, то из (4.95) получим

$$\square\,\psi_{ik}-\frac{\nu^2}{c^2}\psi_{ik}=0; \qquad \psi_{ik}=\frac{\partial B_l}{\partial x_k}-\frac{\partial B_k}{\partial x_l}. \tag{4.106}$$

При $\nu\to 0$ приходим к уравнениям Максвелла. При больших ν будут обнаруживаться квантовые эффекты.

4.2.6. Основные требования к волновым уравнениям квантовой механики и их классическим аналогам. Само собой разумеется, что как уравнения классического аналога, так и сами квантовые уравнения должны быть релятивистски инвариантными (в релятивистской области). В случае тензорных полей (для частиц с целочисленными спинами) релятивистская инвариантность обнаруживается непосредственно на основе принципов тензорного исчисления. В случае спинорных полей (для частиц с полуцелыми спинами) релятивистская инвариантность уравнений требует специального рассмотрения (И. М. Гельфанд и А. М. Яглом [62]). Ниже следуем [62].

Введем следующие обозначения. Преобразование Лоренца будем обозначать следующим образом:

$$x^i\to x'^i=l^i_k x^k. \tag{4.107}$$

Преобразование компонент спинора (гиперспинора или спин-тензора) будем обозначать

$$\psi'=\Pi_s(\psi). \tag{4.108}$$

Преобразования Π_s должны быть представлениями группы Лоренца (4.107).

Рассмотрим систему первого порядка

$$^kL\,(\partial\psi/\partial x_k)+i\varkappa\psi=0, \tag{4.109}$$

где ψ — вектор-функция с $2n$ компонентами. Матрица ^kL имеет компоненты $^kL_p{}^i$. Будем предполагать, что эти компоненты $^kL_p{}^i$ могут быть действительными или комплексными числами. Предполагается, что вектор-функция ψ преобразуется по $2n$-мерному представлению группы Лоренца (4.107), т. е.

$$\psi'=S\psi, \tag{4.110}$$

где S — $2n$-мерная матрица.

Подставив (4.107) в (4.109) и (4.110), получим следующую систему матричных уравнений [62, 65, 66]:

$$^{i}L = l^{i}_{j} S (^{j}L) S^{-1}. \tag{4.111}$$

Итак, если коэффициенты матрицы ^{i}L таковы, что система уравнений (4.111) тождественно выполняется, то и уравнения (4.109) будут релятивистски инвариантными [62, 65, 66].

Задача может быть поставлена иначе. Допустим, что наряду с преобразованиями Лоренца (4.107) известно преобразование S функций ψ и требуется найти коэффициенты матрицы ^{i}L. Очевидно, система матричных уравнений (4.111) приведет к линейным однородным уравнениям для нахождения коэффициентов этих матриц. Задача может быть решена, если определители этих линейных однородных уравнений равны нулю. В этом случае часть неизвестных коэффициентов может быть задана, а остальные определяются из (4.111). Таким образом, матричное уравнение (4.111) для заданной вектор-функции ψ приводит к бесконечному множеству релятивистски инвариантных уравнений первого порядка для компонент функции ψ.

Возникает фундаментальный вопрос: что такое компоненты вектор-функции ψ? Возьмем уравнение Кеммера — Дэффина (4.60) для частицы со спином $s=1$, когда эти уравнения записаны в виде уравнений первого порядка. В эти уравнения, как отмечалось, в качестве объекта входят антисимметричный тензор второй валентности (шесть компонент) и 4-вектор (четыре компоненты). Таким образом, вопреки основному требованию квантового постулата уравнения Кеммера — Дэффина записаны не для одного, а для двух объектов, причем закон преобразования для каждого из них имеет свою матрицу S. Следовательно, матрица S распадается в этом случае на две независимые матрицы. Изложенное противоречит приведенным выше требованиям. Объект согласно квантовому постулату должен быть единым, а матрица S не должна распадаться на независимые матрицы для отдельных компонент вектор-функции ψ, состоящей из отдельных объектов.

Для существования лагранжиана уравнений типа (4.109) необходимо и достаточно выполнения условий [62, 65, 66]

$$(L^{0}\psi_{1}, \psi_{2}) = (\psi_{1}, L^{0}\psi_{2}). \tag{4.112}$$

Сам лагранжиан будет иметь следующий вид [62]:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2i}\left\{\left(^{k}L \frac{\partial\psi}{\partial x^{k}}, \psi\right) - \left(\psi, {}^{k}L \frac{\partial\psi}{\partial x^{k}}\right)\right\} + \varkappa(\psi, \psi), \tag{4.113}$$

а вектор тока и тензор энергии-импульса могут быть записаны в виде

$$s^{k} = (\varepsilon/\hbar)\,(^{k}L\psi, \psi); \tag{4.114}$$

$$T^{k}_{j} = \left(\frac{1}{2i}\right)\left\{\left(^{k}L \frac{\partial\psi}{\partial x^{j}}, \psi\right) - \left(\psi, {}^{k}L \frac{\partial\psi}{\partial x^{j}}\right)\right\} \tag{4.115}$$

соответственно. Плотность заряда для рассматриваемых уравнений определяется как

$$\rho = S^0/c = (\varepsilon/\hbar c)\,(L^0\psi,\ \psi), \tag{4.116}$$

а для плоских волн, если плотность энергии

$$W = -T_0^0 = -\left(\frac{1}{2i}\right)\left\{\left(L^0\frac{\partial\psi}{\partial x^0},\ \psi\right) - \left(\psi,\ L^0\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)\right\} \tag{4.117}$$

будет положительной, полная энергия будет положительно определенной. Для этого случая [62, 65, 66]

$$(\psi^{(0)},\ \psi^{(0)}) \geqslant 0. \tag{4.118}$$

Напомним, что число компонент волновой функции ψ должно быть $4s+2$, где s — спин частицы. В этом случае, если невозможно найти математический объект с требуемым числом компонент $4s+2$, приходится вводить объект с большим числом компонент $2n > 4s+2$. В этом случае систему $2n$ волновых уравнений необходимо дополнять органичивающими ее решения условиями.

Из имеющих физический смысл квантовых уравнений должны следовать уравнения сохранения вектора плотности потока вероятности и тензора энергии-импульса. Эти законы сохранения получаются автоматически, если для рассматриваемой системы уравнений существует лагранжиан. Если лагранжиан не существует, то необходимо другим способом доказать существование искомых уравнений.

Наконец, фундаментальным требованием является следующее: квантовые уравнения должны удовлетворять квантовому постулату, сформулированному выше.

Здесь следует, однако, отметить, что если уравнения удовлетворяют квантовому постулату, то для них автоматически выполняются законы сохранения энергии и импульса.

В самом деле, для всякого решения уравнений Гамильтона — Якоби эти законы выполняются. Следовательно, они будут выполняться и для классического аналога квантовых уравнений, бихарактеристики которых описывают уравнения движения частиц. Отсюда следует, что законы сохранения будут выполняться в классическом смысле для всякого частного решения уравнений классического аналога вида

$$\psi_k = \varphi_k \exp\{\pm iS/\hbar\}.$$

Отсюда следует, что эти законы будут выполняться в среднем по некоторому множеству траекторий. Следовательно, они будут выполняться и для квантовых уравнений, удовлетворяющих квантовому постулату.

4.2.7. Градиентная инвариантность уравнений Гамильтона — Якоби и квантовых уравнений. Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби, как известно, в общем случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^l} - \frac{e}{c}A_l\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{4.119}$$

Приняв, что

$$A_j \to A_j + \partial\Phi/\partial x^j, \tag{4.120}$$

получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^l} - \frac{e}{c} A_l - \frac{e}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial x^l}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{4.121}$$

Положив

$$\overline{S} = S - \frac{e}{c}\Phi, \tag{4.122}$$

получим

$$\left(\frac{\partial \overline{S}}{\partial x^j} - \frac{e}{c} A_j\right) + m^2c^2 = 0. \tag{4.123}$$

Таким образом, градиентная инвариантность уравнений Гамильтона — Якоби доказана, так как уравнения (4. 119) и (4. 123) имеют одну и ту же форму и, кроме того, характеристики как уравнения (4.119), так и (4.123) (т. е. уравнения движения) будут совпадать друг с другом.

Ясно также, что полные интегралы уравнений (4.119) и (4.123) будут совпадать друг с другом. Следовательно, применение метода Гамильтона — Якоби будет приводить к одним и тем же уравнениям для траекторий движения частиц.

При переходе к трансформированной форме уравнений Гамильтона — Якоби, когда неизвестной функцией является

$$\Omega = \Omega(x^1, x^2, x^3, x^0, S) = \text{const}, \tag{4.124}$$

также будем иметь градиентную инвариантность.

В самом деле, решение уравнения (4.119) $S = S(x^1, x^2, x^3, x^0)$, как видели, градиентно инвариантно. Поэтому градиентно инвариантно будет и уравнение (4.124), являющееся решением трансформированного уравнения Гамильтона — Якоби и представляющее функцию Ω как функцию координат в неявном виде.

Очевидно, что из градиентной инвариантности уравнений Гамильтона — Якоби следует градиентная инвариантность как классического аналога квантовых уравнений, так и самих квантовых уравнений. Это можно показать детально, но не будем останавливаться на этом вопросе.

В. Паули показал, что если существует лагранжиан для квантовых уравнений, то уравнения будут градиентно инвариантными [89]. Очевидно, что в этом случае градиентно инвариантным будет их классический аналог. В настоящей работе рассматриваются только уравнения, для которых лагранжиан существует и его можно выписать в явном виде.

4.2.8. О гиперболическом характере релятивистских волновых уравнений, удовлетворяющих квантовому постулату. Характеристическое многообразие для классических аналогов квантовых уравнений, как выше было показано, должно иметь

следующий вид:

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2+m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]^{\alpha(2s+1)}=0. \tag{4.125}$$

Отсюда следует, что при переходе к квантовым уравнениям коэффициенты $\frac{e}{c}A_i$ или $\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ могут встретиться только у низших производных или у самих функций ψ_k, встречающихся в этих уравнениях. Это обстоятельство было выше подробно разъяснено.

Таким образом, характеристики квантовых релятивистских уравнений, удовлетворяющих основному постулату, будут иметь следующий вид:

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2\right]^{\alpha(2s+1)}=0. \tag{4.126}$$

Эти характеристики (сопадающие по существу с уравнением эйконала в геометрической оптике) будут действительны, что и доказывает в общем виде гиперболический характер квантовых уравнений, удовлетворяющих основному постулату.

В простейшем случае характеристическое многообразие имеет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2=0, \tag{4.127}$$

что соответствует волновому уравнению вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{12}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{22}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{32}}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{02}}+\ldots=0, \tag{4.128}$$

где тремя точками обозначены члены, содержащие низшие производные или саму фунцию ψ. Старшие производные соответствуют волновому уравнению.

Из уравнения (4.126) следует, что скорость распространения фронта волны в релятивистских гиперболических квантовых уравнениях будет всегда строго равняться скорости света. Кроме того, всякое начальное возмущение, занимающее конечный объем в пространстве, будет с течением времени асимптотически приближаться к возмущению со сферическим фронтом волны.

В связи с изложенным уместно привести следующее замечание, принадлежащее Р. Куранту [99, с. 512]: «Сферические волны для любых линий временного типа существуют только в случаях двух и четырех переменных и притом только для дифференциальных уравнений, эквивалентных волновому уравнению. Если удастся доказать это предположение, то этим будет установлено особое, существенно важное отличительное свойство четырехмерного пространственно-временного многообразия. Однако уже то обстоятельство, что наше утверждение справедливо в случае постоянных коэффициентов и нетрудно до-

казывается в этом случае, является, как мне кажется, само по себе довольно существенным отличительным свойством четырехмерного мира».

4.2.9. Некоторые замечания о работах по 5-мерному представлению волновых уравнений. Отметим, что в работах В. А. Фока [56], Ю. Б. Румера [109] и др. уже приводились классические волновые уравнения, записанные в 5-мерном виде, из которых путем стандартной трансформации типа (4.9), (4.10) получались квантовые уравнения. Однако в работах этих авторов не было никаких указаний, как получить классические волновые уравнения для частиц с различными спинами и на их основе непосредственную связь с трансформированным уравнением Гамильтона—Якоби, возведенного в степень $\alpha(2s+1)$. Отметим также, что приведенные В. А. Фоком в [56] 5-мерное уравнение Гамильтона — Якоби и волновое уравнение в 5-пространстве для частиц с нулевым спином ($s=0$) не являются уравнениями классической релятивистской механики (в эти уравнения вводится независимая 5-я координата u, физический смысл которой не определяется).

Кроме того, В. А. Фок вводит своеобразную 5-мерную метрику

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \frac{e}{m^2c^2}(A_\nu dx^\nu + du)^2, \qquad (4.129)$$

что вынуждает его ввести действие S, зависящее от пяти координат (x^1, x^2, x^3, x^0, u), и действие W, зависящее от четырех пространственно-временных координат. При этом функции S и W связаны соотношением

$$S = (e/c)u + W. \qquad (4.130)$$

Метрика (4.129), как отмечает В. А. Фок: «... подобрана так, чтобы она могла дать уравнения движения заряженной частицы. Поэтому естественно, что она не является универсальной, а зависит от отношения заряда к массе частицы» [422, с. 55].

В рассматриваемом случае [7] уравнение Гамильтона—Якоби записывается просто для функции $\Omega(x^1, x^2, x^3, x^0, S) = \text{const}$, дающий действие $S(x^1, x^2, x^3, x^0)$ в неявном виде. Кроме того, роль пятой координаты, как указывалось, играет просто действие S.

Таким образом, в исследуемой модели в отличие от (4.129) имеем 4-мерную метрику, как это принято в релятивистской механике, не зависящую от заряда частицы и наличия электромагнитных полей. Поэтому, несмотря на внешнее сходство, 5-мерное уравнение Фока, записанное для частиц со спином $s=0$, и рассмотренные уравнения имеют совершенно различный механический смысл.

Вместе с тем весьма существенное различие между предлагаемой структурой и структурой Фока заключается в следующем. В нашем случае трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби возводится в степень $\alpha(2s+1)$

$$\{\Gamma-Я\}^{\alpha(2s+1)}=0. \qquad (4.131)$$

Полученный таким образом полином от $\partial\Omega/\partial x^i$ и $\partial\Omega/\partial S$ рассматривается как характеристическое многообразие для системы линейных дифференциальных уравнений порядка α для $(4s+2)$ фундаментальных функций. Эта система является классическим аналогом для квантовых уравнений. Причем в этих уравнениях пятая координата является действием S в его действительном механическом смысле.

Другими словами, если некоторая система линейных дифференциальных уравнений порядка α для $4s+2$ функций, зависящих от пяти координат x^1, x^2, x^3, x^0, S, имеет в качестве характеристического многообразия не полином (4.131), а какой-то другой полином от $\partial\Omega/\partial x^i$ и $\partial\Omega/\partial S$, то эта система не может рассматриваться как классический аналог квантовых уравнений даже в том случае, если ее характеристическое многообразие представимо в виде $f(\partial\Omega/\partial x^i, \partial\Omega/\partial S)\{\Gamma-Я\}=0$, где $f(...)$ — некоторый полином, не сводящийся к трансформированному уравнению Гамильтона — Якоби.

Это основное положение в предлагаемой структуре полностью отсутствует в структуре Фока. По указанным причинам между концепцией Фока и нашей имеется существенное различие.

Отметим также, что в упоминавшейся работе В. А. Фока имеется следующее утверждение [422, с. 57]: «Квантовомеханическое волновое уравнение (или система уравнений) должно иметь в качестве уравнения характеристик классическое уравнение Гамильтона — Якоби».

В действительности, однако, квантовые уравнения, удовлетворяющие квантовому постулату (т. е. уравнения ФКГ, Дирака, Максвелла, sine-Гордона, некоторые уравнения для частиц со спином $s=1$ и др.) отнюдь не будут иметь в качестве характеристического многообразия уравнение Гамильтона — Якоби. В действительности эти уравнения, как было показано, имеют в качестве характеристического многообразия уравнения, аналогичные уравнениям эйконала.

Характеристическое многообразие уравнения Шредингера, Шредингера — Гинзбурга — Ландау (нелинейное уравнение Шредингера ($S3$)), Эйнштейна — Шредингера также ничего общего не имеют с уравнением Гамильтона — Якоби.

Только классические аналоги квантовых уравнений, записанные в 5-мерном виде (роль пятой координаты играет действие S) имеют в качестве характеристического многообразия трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби, возведенное в степень $\alpha(2s+1)$, как это было подробно показано выше.

Возведение трансформированного уравнения Гамильтона — Якоби в степень $\alpha(2s+1)$ имеет принципиальное значение, так как только в этом случае, как уже отмечалось, могут быть найдены классические волновые уравнения для $4s+2$ функций, являющиеся классическим аналогом квантовых уравнений.

Приведенными соображениями определяется существенное различие между изложенной в настоящей работе теорией и работой В. А. Фока.

Модель квантового постулата существенно отличается и от модели Маслова [463]. Так, в [463, с. 13] В. П. Маслов и М. В. Федорюк отмечают: «Мы поставили во главу угла не уравнение Гамильтона — Якоби, а его решение $S(x)$ и лагранжево многообразие Λ^n».

4.2.10. Основные следствия из квантового постулата. Рассмотрим некоторые следствия из квантового постулата. В тех случаях, когда имеем дело с уравнениями классического аналога квантовых уравнений первого порядка, в них появятся члены вида $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j} + \frac{e}{c} A_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial S}$. В результате подстановки

$$\varphi_k = \psi_k \exp\left\{\pm \frac{iS}{\hbar}\right\}$$

получим следующее выражение:

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x^j} \pm \frac{ie}{\hbar c} A_j.$$

Введем теперь два оператора

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{ie}{\hbar c} A_j; \qquad D_j^* = \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{ie}{\hbar c} A_j.$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что известная в квантовой механике замена операторов $\partial/\partial x^j \to \partial/\partial x^j \pm \pm (ie/\hbar c) A_j$ не является самостоятельным положением, а, как отмечалось, непосредственно вытекает из уравнения Гамильтона — Якоби и квантового постулата. Из квантового постулата [7] нетрудно получить известные некоммутационные перестановочные соотношения

$$[p_j, q_k] = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}.$$

Рассмотрим теперь уравнения классического аналога второго порядка. В этих уравнениях будут встречаться члены вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{e}{c} A_j \frac{\partial}{\partial S}\right)\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \frac{\partial \varphi_r}{\partial S}\right) = \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{e}{c} A_j \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial S \partial x^k} +$$

$$+ \frac{e}{c} A_k \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^j \partial S} + \boxed{\frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_r}{\partial S}} + \frac{e^2}{c^2} A_j A_k \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial S^2}.$$

Следует особо подчеркнуть, что при выписывании уравнений характеристик члены, взятые в рамку, не должны учитываться, так как характеристики составляются только на основании старших производных от неизвестных функций.

Этот результат находится в полном соответствии с квантовым постулатом, поскольку уравнение характеристик классического аналога, т. е. трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби, не содержит производных от вектор-потенциала A_j.

Здесь уместно напомнить, что уравнения характеристического многообразия (или фронта волны), т. е. уравнения поверхности, на которой возможны разветвления решений (т. е. разрывы старших производных) зависят только от коэффициентов при старших производных рассматриваемой линейной системы уравнений.

О характеристиках квантовых уравнений. Было показано, что характеристики уравнений ФКГ, Дирака, Максвелла и др. описываются следующими уравнениями:

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2\right]=0 \qquad (x^0=ict). \qquad (4.132)$$

Уравнение (4.132) совпадает с уравнением эйконала в геометрической оптике. Таким образом, скорость распространения фронта во всех упомянутых уравнениях в точности равняется скорости распространения света c.

Докажем теперь, что все квантовые уравнения, удовлетворяющие квантовому постулату, сформулированному выше, будут иметь скорость распространения фронта волны, в точности равную скорости света c.

В самом деле, в уравнении характеристического многообразия для таких квантовых уравнений будут присутствовать только производные $\partial\varphi/\partial x^j$. Внешние электромагнитные поля будут отсутствовать, как это следует из изложенного выше.

Так как φ является скаляром, то $\partial\varphi/\partial x^j$ будут компонентами вектора. Но вектор имеет только один инвариант

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2\right]=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]=0. \qquad (4.133)$$

Следовательно, характеристики указанных квантовых уравнений должны иметь вид

$$\left[\sum_{j=1,2,3,0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2\right]^{2n}=0 \qquad (2n\geqslant\alpha(2s+1)). \qquad (4.134)$$

Возможен, однако, совсем другой случай, когда характеристический определитель рассматриваемой системы уравнений тождественно обращается в нуль. В этом случае рассматриваемая система уравнений не удовлетворяет квантовому постулату. Более того, эта система уже не является гиперболической и с точки зрения изложенной концепции эти уравнения не могут

рассматриваться как физически правильные. Но уравнение (4.133) является уравнением эйконала. Следовательно, скорость распространения фронта волны для любых квантовых уравнений, удовлетворяющих квантовому постулату, будет в точности равняться скорости света c как для свободных частиц, так и для частиц, находящихся в электромагнитном поле. Теорема доказана.

Заметим, что в последнее время появился ряд работ [478, 479], в которых утверждается, что скорость распространения фронта волны для уравнений Кеммера — Дэффина — Прока (спин $s=1$), Рариты — Швингера (спин $s=3/2$) и т. д. может быть больше скорости света при наличии электромагнитных полей. Эти уравнения имеют характеристический определитель, тождественно обращающийся в нуль, и поэтому эти уравнения не удовлетворяют квантовому постулату.

О характеристиках уравнений классического аналога квантовых уравнений при наличии электромагнитных полей. Докажем теперь следующую теорему: если характеристическое многообразие классического аналога квантовых уравнений в отсутствие электромагнитного поля описывается уравнением

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]^{2n} = 0 \qquad (2n \geqslant \alpha(2s+1)), \tag{4.135}$$

то соответствующее уравнение характеристического многообразия при наличии электромагнитного поля будет иметь вид

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2 + m^2c^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial S}\right)^2\right]^{2n} = 0 \qquad (2n \geqslant \alpha(2s+1)). \tag{4.136}$$

В самом деле, при введении полей в уравнении характеристического определителя должна быть произведена замена операторов

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^i} \to \frac{\partial\Omega}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\frac{\partial\Omega}{\partial S}. \tag{4.137}$$

Это следует из формулировки квантового постулата. Справедливость сформулированной теоремы доказана.

Таким образом, нет необходимости составлять уравнение характеристик для указанных уравнений классических аналогов при наличии электромагнитных полей. Как ясно из изложенного, достаточно ограничиться составлением уравнений характеристик классического аналога квантовых уравнений для свободных частиц. В этом случае при наличии электромагнитных полей уравнение характеристик классического аналога квантовых уравнений будет иметь вид (4.136).

Правило отбора. Допустим, что дана некая система линейных дифференциальных уравнений для волновых функций Φ_k, зависящей от переменных x^1, x^2, x^3, x^0, S. Будем обозначать

эту систему

$$L(\varphi)=0. \tag{4.138}$$

Если в результате указанной выше подстановки

$$\varphi_k=\psi(x^1, x^2, x^3, x^0)\exp\left\{\pm\frac{iS}{\hbar}\right\} \tag{4.139}$$

получим какую-либо из известных систем квантовых уравнений, то система (4.138) может рассматриваться как классический аналог квантовых уравнений, если ее характеристики удовлетворяют квантовому постулату.

Допустим, что система (4.138) написана для свободных полей и, следовательно, коэффициенты у производных $\partial\varphi/\partial x^j$ могут иметь только числовые значения, не зависящие от потенциалов электромагнитного поля A_j, а коэффициенты — у производных $\partial\varphi_k/\partial S$, $\partial^2\varphi_k/\partial S^2$ и т. д. могут иметь коэффициенты только mc, m^2c^2 и т. п. Следовательно, характеристический определитель рассматриваемой системы классического аналога будет зависеть только от компонент вектора $\partial\varphi/\partial x^k$ и инварианта $\partial\varphi/\partial S$ (напоминаем, что во всех рассматриваемых системах уравнений пятая координата S является инвариантом преобразований координат x^1, x^2, x^3, x^0).

Выше уже было отмечено, что из компонент вектора можно образовать только один инвариант $\left[\sum\limits_{j=1,2,3,0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2\right]=0$. Но так как характеристическое многообразие должно быть релятивистским инвариантом, следовательно, общее уравнение этого характеристического многообразия может быть представлено в общем случае в виде полинома

$$\sum_{n,l} C_{nl}\left[\sum_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2\right]^{n-l}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)^l=0 \qquad (n\geqslant\alpha(2s+1)). \tag{4.140}$$

Здесь коэффициенты C_{nl} зависят от коэффициентов при производных уравнениях классического аналога (4.138). Вместе с тем в соответствии с требованиями квантового постулата, характеристическое многообразие для уравнений классического аналога должно иметь вид

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)^2+m^2c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)^2\right]^n=0. \tag{4.141}$$

Таким образом, можно удовлетворить требованию квантового постулата, если потребовать, чтобы коэффициенты при производных в уравнениях классического аналога были таковы, что полином [4.140] свертывался в бином Ньютона (4.141) с точностью до некоторого общего числового множителя. Все известные квантовые уравнения для свободных частиц имеют в качестве коэффициентов целочисленные значения (включая компоненты) или значения различных степеней от mc. Если при-

нять, что это условие является общим требованием, то остается *только конечное число* возможностей для выбора коэффициентов при производных в уравнениях классического аналога, при которых полином (4.140) свертывается в бином Ньютона (4.141).

Итак, существует только конечное число уравнений классического аналога, удовлетворяющих требованиям квантового постулата. Будем называть полученный результат *правилом отбора*. Вместе с тем правило отбора приводит к конструктивному методу получения квантовых уравнений из квантового постулата.

Следует отметить, что при использовании лагранжевого формализма может быть получено, вообще говоря, неограниченное множество квантовых уравнений, так как коэффициенты при различных инвариантах, входящих в выражение лагранжиана, могут иметь в общем случае любые значения. Ясно, что лагранжевый формализм приводит в общем случае к неограниченному множеству уравнений и только некое конечное подмножество этих уравнений будет удовлетворять квантовому постулату.

В этом заключается не только практическое, но и принципиальное значение установленного правила отбора. Поясним это примерами.

Пример 8. Рассмотрим частицу со спином $s=2$ и массой, отличной от нуля, $m\neq 0$. Ограничимся случаем свободной частицы. Число волновых функций в данном случае равно $4s+2=10$. Очевидно, этому требованию можно удовлетворить, если принять в качестве волновых функций ψ_{ik} симметричный тензор второй валентности. С помощью этого тензора и его производных по координатам можно образовать следующие инварианты:

$$1)\ \frac{\partial\psi^*_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda};\qquad 2)\ \frac{\partial\psi^*_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial\psi_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu};\qquad 3)\ \frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}+\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu};$$

$$4)\ \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu};\qquad 5)\ \psi^*_\nu\psi^\nu;\qquad 6)\ \psi^*\psi,$$

где $\psi=\sum_\nu \psi_{\nu\nu}$ — инвариант.

Если приведенные инварианты умножить на заданные числовые коэффициенты и сложить, то получим лагранжиан, который приводит к релятивистски инвариантным уравнениям, носящим характер уравнений на собственные значения. При этом инварианты типа 5 и 6 должны быть умножены на коэффициенты $[m^2c^2/\hbar^2]$ и по крайней мере один из них должен войти в линейную комбинацию. Очевидно, любые линейные комбинации указанных инвариантов приводят к релятивистски инвариантным уравнениям, имеющим характер уравнений на собственные значения.

Одна из таких линейных комбинаций приводит к уравнениям Фирца—Паули для частицы со спином $s=2$. Если взять $\mathscr{L}=(\partial\psi^*_{\mu\nu}/\partial x_\lambda)(\partial\psi_{\mu\nu}/\partial x_\lambda)+\varkappa^2\psi^*_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$, то получим другие уравнения вида $\Box\psi_{\mu\nu}+\varkappa^2\psi_{\mu\nu}=0$.

При

$$\mathscr{L} = \frac{\partial \psi^*_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \psi_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \psi^*_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} + \varkappa^2 \psi^*_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}$$

получим другие уравнения. При этом такие уравнения в отличие от уравнений Фирца — Паули не накладывают ограничений вида $\psi = 0$; $\partial \psi_{\mu\nu}/\partial x_\nu = 0$.

Таким образом, вариационный принцип не дает единственную возможность написать в действительности правильные уравнения для частиц с заданным спином, так как истинный лагранжиан остается неизвестным среди неограниченного множества возможных лагранжианов.

Так, И. М. Гельфанд и А. М. Яглом [62, с. 730] отмечают: «Если при этом мы не будем требовать положительности заряда или энергии, то ни одно из наших уравнений не будет иметь никаких преимуществ перед другими. В свете этих замечаний нет никаких оснований приписать, как это сделал Баба, протону типа а) с параметрами $\alpha = 3/2$ и $\beta = \sqrt{15/2}$, дающее заряд и энергию обоих знаков, поскольку это уравнение не обладает никакими преимуществами по сравнению с бесчисленным множеством других уравнений».

Пример 9. Приведенные выводы могут быть усилены утверждением о том, что одни и те же уравнения могут быть получены из различных лагранжианов [472]. Так, уравнение ФКГ для скалярного вещественного поля может быть выведено не только из обычного полевого лагранжиана

$$\mathscr{L}_1 = \int dx \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - m^2 \psi^2 (x, t) \right\},$$

но и, например, из [472]

$$\mathscr{L}_2 = \int dx \left\{ \frac{\partial \psi (x, t)}{\partial t} \frac{\partial \psi (-x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi (x, t)}{\partial x} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial \psi (-x, t)}{\partial x} - m^2 \psi (x, t) \psi (-x, t) \right\}.$$

Приведенный выше квантовый постулат устраняет отмеченную неопределенность: согласно этому постулату правильным лагранжианом является тот, который приводит к таким волновым уравнениям классического аналога, для которых возведенное в степень $\alpha(2s+1)$ трансформированное уравнение Гамильтона — Якоби является характеристическим многообразием. Это приводит или к единственному решению задачи или к конечному числу возможностей. Следовательно, квантовый постулат содержит в себе правило отбора, сформулированное выше, для нахождения правильного лагранжиана среди возможных.

О необходимости квантового постулата. Если принять предположение, что из классического аналога квантовых уравнений могут быть получены правильные квантовые уравнения, то легко получить доказательство необходимости квантового постулата, сформулированного выше.

В самом деле, предположим, что характеристическое многообразие классического аналога квантовых уравнений имеет вид

полинома от инвариантов (4.140), не сводящегося к трансформированному уравнению Гамильтона — Якоби (4.141).

Этим самым в рамках классической релятивистской механики вводится новый инвариант $\varphi=\varphi(x^1, x^2, x^3, x^0, S)$, который уже не является решением трансформированного уравнения Гамильтона — Якоби и поэтому не имеют физического смысла три независимых базисных инварианта для свободной частицы: 1) длина мировой линии этой частицы; 2) длина 4-вектора энергии-импульса $p_j^2=-m^2c^2$; 3) действие $S=S(x^1, x^2, x^3, x^0)$. Поэтому уравнение (4.140) не имеет физического смысла в классической релятивистской механике, а уравнение $\Omega(x^1, x^2, x^3, x^0, S)=\text{const}$ не дает уже действия S.

Возникшее противоречие может быть устранено только в том случае, если коэффициенты C_{kl} в (4.140) допускают его свертывание к биному Ньютона (4.141), т. е. к трансформированному уравнению Гамильтона — Якоби.

Этим самым доказывается необходимость квантового постулата.

В заключение отметит, что полученные результаты должны иметь важное значение при нахождении волновых квантовых уравнений для частиц с высшими спинами.

4.2.11. Общие выводы.

Вывод 1. Из сформулированного выше квантового постулата следует, что между механикой классической и механикой квантовой существует не приближенная, а точная алгоритмическая связь.

Для системы квантовых уравнений (уравнения Шредингера, ФКГ, Дирака, Максвелла, определенного типа уравнений со спином $s=1$ и с высшими спинами, Эйнштейна — Шредингера и др.) могут быть указаны такие классические волновые уравнения (аналог квантовых уравнений), из которых квантовые уравнения получаются единой стандартной трансформацией (периодичность по действию) $\varphi_k=\psi_k\exp\{\pm iS/\hbar\}$.

Классические волновые уравнения (аналог квантовых уравнений) должны иметь в качестве своих характеристик трансформированное уравнение $\{\Gamma-Я\}^n$, $n\geqslant\alpha$ $(2s+1)$, как отмечалось выше. Таким образом, бихарактеристики таких уравнений должны совпадать с уравнениями движения классических частиц.

Указанная связь между классической и квантовой механиками носит точный, а неприближенный характер, и поэтому она существенно отличается от обычных интерпретаций этих связей, в которых постоянная Планка $\hbar\to 0$.

В то же время существование точной алгоритмической связи между классической и квантовой механиками не нарушает обычной физической интерпретации квантовой теории.

Вместе с тем благодаря наличию установленной связи между уравнениями Гамильтона — Якоби и квантовыми уравнениями эти уравнения оказываются элементами единой системы.

Вывод 2. Как выше было показано, только те уравнения,

рассматриваемые как классический аналог квантовых уравнений, имеют физический смысл в рамках классической механики, характеристики которых удовлетворяют требованиям квантового постулата. Это положение было названо правилом отбора.

Вывод 3. Замена операторов $\frac{\partial}{\partial x^j} \to \frac{\partial}{\partial x^j} \pm \frac{e}{c} A_j \frac{\partial}{\partial S}$ в модифицированном уравнении {Г — Я} и классическом аналоге квантовых уравнений непосредственно приводит к замене операторов $\frac{\partial}{\partial x^j} \to$ $\to \frac{\partial}{\partial x^j} \pm \frac{ie}{\hbar c} A_j$ в самих квантовых уравнениях. Такая замена является не каким-либо самостоятельным положением, а есть следствие квантового постулата. Аналогичным следствием квантового постулата являются некоммутативные перестановочные соотношения.

Вывод 4. Квантовый постулат допускает введение нелинейных функций (нелинейные квантовые уравнения типа Шредингера — Гинзбурга — Ландау, sine-Гордона и др.) от младших производных или самих волновых функций; старшие производные, определяющие характеристическое многообразие, должны входить в уравнения линейно. Таким образом, квантовый постулат непосредственно указывает пути и допускает нелинейное обобщение квантовой теории.

Вывод 5. Квантовые уравнения, удовлетворяющие квантовому постулату, должны иметь скорость распространения фронта волны, в точности равную скорости света c, так как для таких уравнений уравнение характеристик должно независимо от наличия или отсутствия электромагнитного поля совпадать с уравнением эйконала, возведенное в степень $n \geqslant \alpha(2s+1)$.

Вывод 6. Поскольку уравнение Гамильтона — Якоби для замкнутых систем описывает обратимые процессы, то, учитывая однозначную связь между уравнением Гамильтона — Якоби и уравнениями квантовой теории, можно сделать вывод о принципиально обратимом характере процессов, описываемых квантовыми уравнениями.

Вывод 7. Установленная точная связь между уравнением Гамильтона — Якоби и уравнениями квантовой теории указывает на невозможность существования скрытых переменных в квантовой теории, ее логическую непротиворечивость и замкнутость. Эта теорема особым методом была доказана Дж. фон Нейманом [402]. Обсуждение этого вопроса можно найти в [33, 386, 419, 480].

Вывод 8. Квантовый постулат допускает возможность существования квантовых уравнений с внутренними параметрами типа Гинзбурга — Тамма — Манько [398]; позволяет по соответствующему уравнению Гамильтона — Якоби для взаимодействующих частиц [481] вывести соответствующие квантовые уравнения; вывести квантовые уравнения в пространствах-вре-

мени Галилея, Минковского, Римана, де Ситтера [195], n-мерном, Финслеровом [372, 388] и др. через соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби.

В связи с этой схемой остановимся еще раз на внутренней структуре квантового постулата [7], элементами которой являются квантовые уравнения для частиц с различными спинами. Содержание структуры заключалось в следующем.

1. Выписывается уравнение Гамильтона — Якоби для рассматриваемой частицы, находящейся в заданном электромагнитном поле.

2. С помощью преобразования (формула (4.5)) уравнение Гамильтона — Якоби представляется в так называемом трансформированном виде и это уравнение возводится в степень $\alpha(2s+1)$. Здесь s — спин частицы, а α имеет целочисленное значение.

3. Выписывается система линейных дифференциальных уравнений для $(4s+2)$ фундаментальных функций в 5-мерном пространстве (x^1, x^2, x^3, x^0, S). Эта система должна иметь в качестве своего характеристического многообразия модифицированное уравнение Гамильтона — Якоби, возведенное в степень $\alpha(2s+1)$. При этом, если оказывается возможным написать эту систему в виде дифференциальных уравнений первого порядка, то α принимается равным 1. Если же она может быть написана только в виде дифференциальных уравнений второго порядка, то $\alpha=2$ и т. д.

4. Полученная таким образом система дифференциальных уравнений дает волновое представление классической механики. В самом деле, характеристики этой системы уравнений совпадают с модифицированным уравнением Гамильтона — Якоби, возведенным в степень $\alpha(2s+1)$, а бихарактеристики совпадают с уравнениями движения частиц. Так как в классической механике спин s не играет никакой роли, то возможны различные волновые представления классической механики.

5. С помощью единой трансформации (формула (4.9)) классические волновые уравнения для частиц с заданными спинами переводятся в соответствующие квантовые уравнения.

В связи с описанной структурой необходимо подчеркнуть следующий вывод. Элементами указанной структуры являются уравнения Шредингера, ФКГ, Дирака, Максвелла, для частиц со спином $s=1$ и др. Это дало основание высказать гипотезу, что вообще уравнения квантовой теории для частиц с различными спинами также должны быть элементами указанной структуры. Вместе с тем, если указанная гипотеза подтвердится, то она будет иметь большое эвристическое значение. Подтвердим это примером. Так, В. Паули предложил два типа уравнений для частиц со спином $s=1$. В уравнениях первого типа волновые функции этих частиц представлены в виде антисимметричного тензора второй валентности, но характеристики этих уравнений тождественно равнялись нулю, а поэтому этот тип уравнений не

удовлетворяет описанной выше структуре. В уравнениях Паули второго типа волновые функции представлены в виде тензора третьей валентности, обладающий определенными свойствами симметрии. Этот второй тип уравнений Паули также не подчиняется описанной выше структуре. Таким образом, если эта структура верна, то оба типа уравнений Паули не имеют физического значения.

Заметим, что в случае электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла, число независимых компонент поля должно равняться $(4s+2)=6$, что в действительности имеет место. Характеристики уравнений Максвелла даются формулой (4.47).

В случае описания электромагнитного поля с помощью 4-потенциала A_i показатель степени 3 в уравнении характеристик сохраняется, хотя компоненты 4-потенциала удовлетворяют уравнениям второго порядка. Это происходит потому, что благодаря условию Лоренца имеется только три независимых компоненты четырехпотенциала A_i.

Аналогичное замечание может быть сделано также по поводу частиц со спином $s=1$ и отличной от нуля массы [3].

4.3. К вопросу о квантовых волновых уравнениях для системы взаимодействующих частиц

4.3.1. Классические (дорелятивистские) квантовые уравнения. В классическом (дорелятивистском) случае для системы N заряженных взаимодействующих электронов в поле ядра атома имеет место следующее квантовое уравнение:

$$i\hbar(\partial\psi/\partial t)=H\psi, \tag{4.142}$$

где

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_j\nabla^2-Ze^2\sum_j\frac{1}{r_j}+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}.$$

Это уравнение приведено в работе Г. Бете [405] [см. уравнение (4.19)]. Напомним, что уравнение (4.142) получено в предположении, что всеми спиновыми взаимодействиями электронов можно пренебречь, можно пренебречь также ядерными эффектами (в частности, конечностью размеров и массой ядра).

---

[3] Не вдаваясь в дальнейшие подробности, отметим, что для исследования предложенной структуры при любом значении спины s можно применить метод, предложенный И. М. Гельфандом и А. М. Ягломом [62] или Ю. В. Новожиловым [110] и др. Отметим, что в [110], как в п. 5. 3, носящим название «$2(2s+1)$-компонентные функции для спина s», так и на с. 121 [110] подчеркивается: «Наиболее экономное построение приводит к спинорным полям, имеющим $2(2s+1)$ компонент», что совпадает с положениями описанной выше структуры.

Как показано в п. 4.2.2, уравнению (4.142) соответствует классическое уравнение Гамильтона—Якоби вида

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left[\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1^k}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2^k}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3^k}\right)^2\right]\right]-$$
$$-Ze^2\sum_j\frac{1}{r_j}+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}=0. \qquad (4.143)$$

Здесь m — масса электрона; e — его заряд; r_j — абсолютная величина радиуса-вектора j-го электрона; $r_{ij}=|r_i-r_j|$. Суммирование во второй и третьей суммах (4.19), (4.142) ведется по всем N электронам, в последнем слагаемом суммирование идет по всем параметрам ($i\neq j$), причем каждая пара встречается однократно.

Уравнение Гамильтона—Якоби обладает следующими двумя важными свойствами.

1. Характеристики уравнения Гамильтона—Якоби (4.143) являются уравнениями движения в механике Ньютона.

2. Имеет место теорема Гамильтона—Якоби [106]

$$\partial S/\partial\alpha_k=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{3n})=\beta_k=\text{const},$$

где α_k — постоянные интегрирования; β — произвольная константа.

Теорема Гамильтона—Якоби дала возможность утверждать, что уравнение Гамильтона—Якоби является только промежуточным моментом в методе интегрирования дифференциальных уравнений механики.

В действительности уравнение Гамильтона—Якоби, как следует из квантового постулата (см. п. 4.2), имеет гораздо большее значение, которое опирается на первое из указанных его свойств.

Вместе с тем вместо одного уравнения Гамильтона—Якоби (4.143), написанного для системы N взаимодействующих частиц, можно написать более общую систему N уравнений Гамильтона—Якоби для каждой из взаимодействующих частиц в отдельности; причем функция S_i, написанная для i-й частицы, будет зависеть только от переменных $(x_k^i,\ t)$, $k=1,\ 2,\ 3$. Переменные x_k^p, $p\neq i$, будут входить только в выражения для потенциальной энергии взаимодействия частиц, а для каждого отдельного i-го уравнения Гамильтона—Якоби они могут рассматриваться как параметры или как известные функции времени.

Следовательно, имеем следующую систему взаимосвязанных уравнений Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t}+\frac{1}{2m_i}\left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_1^i}\right)^2+\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_2^i}\right)^2+\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_3^i}\right)^2\right]+$$
$$+V(x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1,\ \ldots,\ x_1^i,\ x_2^i,\ x_3^i,\ \ldots,\ x_1^n,\ x_2^n,\ x_3^n,\ t,\ e^+,\ e^-)=0. \qquad (4.144)$$

Связь между уравнениями Гамильтона—Якоби осуществляется с помощью потенциальной энергии взаимодействия V (...), которая в точности совпадает с потенциальной энергией взаимодействия в уравнении (4.143).

Нетрудно убедиться, что если написать уравнение для характеристик каждого из приведенных уравнений Гамильтона—Якоби в отдельности, то оно будет совпадать с уравнениями движения Ньютона.

Действительно, для любого уравнения вида

$$\partial\varphi/\partial t + \Phi(\partial\varphi/\partial x_1, \ldots, \partial\varphi/\partial x_n, x_1, \ldots, x_n, t) = 0, \qquad (4.145)$$

согласно гл. 2, имеет место следующее уравнение характеристик [99, 104]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial(\partial\varphi/\partial x_i)}; \qquad \frac{d(\partial\varphi/\partial x_i)}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \qquad (4.146)$$

Из (4.146) и (4.144) следует, что

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\right), \qquad \frac{\partial^2 S_i}{\partial x_i\,\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \qquad (4.147)$$

Следовательно, имеем

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad (4.148)$$

т. е. уравнения движения Ньютона.

Второе условие, которому подчиняется уравнение Гамильтона—Якоби, также выполняется. Хотя для рассматриваемого случая существенно первое свойство этих уравнений.

Если теперь использовать квантовый постулат, то, воспользовавшись уравнением (4.143), придем к следующему особому уравнению [405]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^{i^2}}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^{i^2}}\right)+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^{i^2}}\right)\right]-\left(Ze^2\sum_j\frac{1}{r_j}-\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}\right)\psi + \\ + i\hbar(\partial\psi/\partial t) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, N). \qquad (4.149)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к (4.149).

Здесь не будем останавливаться на возможном физическом истолковании полученного уравнения (4.149). Перейдем теперь к краткому рассмотрению релятивистского случая.

4.3.2. Релятивистские квантовые уравнения для n взаимодействующих частиц с заданными спинами s_i. Как известно, проблема взаимодействия релятивистских частиц в классическом (доквантовом) случае широко обсуждается в современной литературе [88—90, 119, 168, 405, 427, 429, 460, 471, 481, 482, 489, 490—495]. В связи с тем, что в монографической литературе этот

вопрос практически не рассматривался, дадим краткий обзор работ в этом направлении.

Так, Р. Фейнман в [490, с. 202] отметил следующее: «Нам удалось найти такое выражение для действия, учитывающего только движение зарядов, что его вариация давала уравнения движения этих зарядов. Это выражение для действия A имеет вид

$$A = \sum_i m_i \int (\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu)^{1/2} d\alpha_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} e_i e_j \iint \delta(I^2_{ij})\, \dot{X}^i_\mu(\alpha_i)\, \dot{X}^j_\mu(\alpha_j)\, d\alpha_i\, d\alpha_j, \qquad (1)$$

где

$$I^2_{ij} = [X^i_\mu(\alpha_i) - X^j_\mu(\alpha_j)]\,[X^i_\mu(\alpha_i) - X^j_\mu(\alpha_j)];$$

$X_\mu{}^i(\alpha_i)$ — четырехмерный радиус-вектор i-частицы как функция некоторого параметра α_i, а $\dot{X}_\mu{}^i(\alpha_i) = dX_\mu{}^i(\alpha_i)/d\alpha_i$. Первый член этого выражения — это просто интеграл от собственного времени, обычное действие релятивистской механики свободных частиц с массой m_i (как обычно, здесь производится суммирование по повторяющимся индексам μ). Второй же член описывает электрическое взаимодействие зарядов. Суммирование производится по всевозможным парам зарядов (множитель 1/2 введен для того, чтобы каждую пару учитывать один раз, а член с $i=j$ отброшен для того, чтобы исключить действие зарядов на самих себя). Взаимодействие представлено в виде двойного интеграла от дельта-функции от квадрата пространственно-временного интервала I^2 между двумя точками, лежащими на пути интегрирования. Таким образом, о взаимодействии можно говорить только в том случае, когда этот интервал обращается в нуль, т. е. когда один из зарядов лежит на световом конусе другого.

Благодаря тому, что взаимодействие было принято точно наполовину опережающим и наполовину запаздывающим, оказалось возможным сформулировать такой принцип наименьшего действия, который не удается получить, если считать взаимодействие лишь запаздывающим.

Итак, в столь простом выражении содержалась вся классическая электродинамика». И далее: «Такая же идея была высказана ранее Френкелем, и поэтому мы назвали эти поля — полями Френкеля. Наша теория, учитывающая лишь взаимодействие между разными частицами, была эквивалентной теории полей Френкеля, использующей наполовину опережающие и наполовину запаздывающие решения».

Несколько ранее подобная идея была высказана В. Е. Тиррингом в работе [491, с. 37], в которой было отмечено: «Если мы рассматриваем систему заряженных частиц, характеризуемых греческими индексами, то оказывается, что (1.1), (1.2) и (1.11) можно скомбинировать в интеграл действия Фоккера— Шварцшильда — Тетроде

$$W = \sum_\alpha \int ds \dot{z}^2_\alpha \frac{m_\alpha}{2} + \sum_{\alpha > \beta} e_\alpha e_\beta \int ds\, ds' \{\dot{z}_\alpha(s)\, \dot{z}_\beta(s)\, \overline{D}(z_\alpha(s) - z_\beta(s'))\}. \qquad (1.36)$$

Если варьировать мировые линии частиц, а W рассматривать как интеграл от функции Лагранжа вдоль этих линий, то уравнения Эйлера

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\alpha(s)} = \frac{\partial L}{\partial z_\alpha(s)} \tag{1.37}$$

действительно оказываются как раз уравнениями движения (1.11). Поле, образованное другими частицами, в соответствии с (1.37) следующим образом действует на движение данной частицы:

$$m_\alpha \ddot{z}_{\alpha k} = e_\alpha \dot{z}^i_\alpha(s) \sum_{\beta<\alpha} \int ds' \left[\dot{z}_{\beta i}(s') \frac{\partial}{\partial z^k_\alpha(s)} - \right.$$
$$\left. - z_{\beta k}(s') \frac{\partial}{\partial \dot{z}^i_\alpha(s)} \right] \overline{D}(z_\alpha(s) - z_\beta(s')). \tag{1.38}$$

Поскольку (1.36) симметрично по индексам α и β, мы вынуждены использовать полусумму опережающего и запаздывающего взаимодействия. Выбрав в двойной сумме (1.36) $\alpha>\beta$, можно устранить бесконечную собственную энергию, но при этом теряется член, соответствующий обратному действию поля излучения». Отметим, что в (1.36) $D(x)$ — инвариантная функция.

Помимо указанных работ, в последние годы этой проблеме были посвящены работы [492—496]. Так, в работе А. Н. Гордеева [492] для двух взаимодействующих электронов было приведено следующее уравнение движения:

$$\frac{d}{dx_0}\left(\frac{m_1 c^2 V_1}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) = e_1\left(\frac{E_2+E_2^+}{2} + v_1 \times \frac{H_2+H_2^+}{2}\right). \tag{4.150}$$

Аналогичный вид имеет уравнение движения для второго электрона. В (4.150) через $E_2^+ = -\partial\varphi_2^+/\partial x - \partial A_2/\partial x_0$ обозначена напряженность опережающего электрического поля второго электрона, φ_2^+ — опережающий скалярный потенциал второго электрона. Аналогично определяются остальные величины.

В работе F. Rohrlich [493, с. 317] уравнение движения для взаимодействующих электронов имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_a \dot{\xi}^\mu_a}{\sqrt{1-\dot{\xi}_a^2}}\right) = \sum_b \left(\frac{\partial A^\mu_b}{\partial \xi_{a\mu}} - \frac{\partial A^\mu_a}{\partial \xi_{b\mu}}\right)\dot{\xi}_{b\nu} = \sum_b F^{\mu\nu}(\xi_{ab})\,\dot{\xi}_{ab\nu}, \tag{4.151}$$

где $\dot{\xi}_{ab} = \dot{\xi}_a - \dot{\xi}_b$; $F^{\mu\nu}(\xi_{ab}) = \partial A^\nu_{ab}/\partial \xi^\mu_{ab} - \partial A^\mu_{ab}/\partial \xi^\nu_{ab}$, $A^\mu_a = \sum_{b\neq a} A^\mu_{ab}$.

Аналогичные (4.150), (4.151) уравнения приведены в [494].

На необходимость введения системы n уравнений Гамильтона — Якоби для n взаимодействующих релятивистских частиц было указано в работе Н. П. Клепикова и А. Н. Шатний [495].

В работе M. Pauri и G. M. Prosperi [481] дан обзор работ до 1976 г., а в работе F. Rohrlich [493] приведен критический обзор работ до 1979 г.

Для системы n взаимодействующих заряженных релятивистских частиц можно написать систему n совместных уравнений Гамильтона — Якоби сле-

дующего вида:

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i^k}-\frac{e_i}{c}A_k^i\right)^2+m_i^2c^2=0, \qquad k=0,1,2,3;\ i=1,2,\ldots,n. \tag{4.152}$$

Здесь $A_k{}^i$—k-я компонента электромагнитного потенциала взаимодействия, зависящая от координат всех частиц и скоростей всех частиц, кроме i-й частицы. Координаты и скорости всех частиц, кроме i-й, должны быть заданы в моменты времени t' и t'', соответствующие запаздывающему и опережающему потенциалу, а координаты i-й частицы рассматриваются в момент времени t, $t'<t<t''$.

Нетрудно убедиться, что характеристиками системы уравнений Гамильтона — Якоби (4.152) являются приведенные системы уравнений типа (4.150), (4.151).

Применяя к системе уравнений Гамильтона — Якоби (4.152) для n взаимодействующих частиц со спинами s_i, $i=1, 2, \ldots, n$, особый алгоритм, необходимо прежде всего привести систему (4.152) к трансформированному виду (см. п. 4.2)

$$\left[\left(\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i^k}-\frac{e_i}{c}A_k^i\frac{\partial\Omega_i}{\partial S_i}\right)^2+m_i^2c^2\left(\frac{\partial\Omega_i}{\partial S_i}\right)^2\right]^{\alpha(2s_i+1)}=0. \tag{4.153}$$

Здесь s_i — спин i-й частицы.

Классические волновые уравнения, содержащие по $4s_i+2$ фундаментальных функций, должны быть написаны для каждой отдельной частицы. Для этого в соответствии с алгоритмом, указанным в [698], могут быть получены квантовые квазирелятивистские волновые уравнения для взаимодействующих частиц с различными спинами.

Пример 1. Рассмотрим в качестве иллюстративного примера взаимодействие двух заряженных частиц со спином $s_1=0$ и $s_2=1/2$ и $m_1\neq0$, $m_2\neq0$. Квантовые релятивистские волновые уравнения будут иметь следующий вид:

$$L_0(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, A_1{}^i)=0,$$
$$L_1(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, A_2{}^i)=0,$$
$$L_2(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, A_2{}^i)=0,$$
$$L_3(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, A_2{}^i)=0,$$
$$L_4(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_0, A_2{}^i)=0.$$

Операторы L определены в указанной работе.

Напомним, что в потенциал $A_1{}^j$ входят координаты первой частицы, взятые в момент времени t, а также координаты и скорости второй частицы, взятые в момент времени t'' и t', соответствующие опережающему и запаздывающему потенциалу. Аналогично записывается потенциал взаимодействия $A_2{}^j$. Благодаря этому обстоятельству система (4.154) становится совместной.

Приведенная система уравнений (4.154) объединяет в единую систему уравнения ФКГ и Дирака. Потенциалы взаимодействия $A_1{}^k$ и $A_2{}^k$ определены выше. Для решения системы уравнений (4.154) предварительно должна быть

решена классическая задача и найдены в явном виде потенциалы взаимодействия A_1^k и A_2^k. В дальнейшем возможно уточнение этого решения на основе решенной на первом этапе квантовой задачи (4.154).

Таким образом, здесь имеется возможность построения алгоритма последовательных приближений построения моделей взаимодействия.

Однако эти вопросы выходят за рамки настоящей книги и не будут рассматриваться.

4.4. Заключительные замечания

По квантовой механике и ее приложениям, как и по теории относительности, существует почти необозримая литература. Здесь не представляется возможным сделать хотя бы краткий обзор в этой области. Поэтому ниже будут указаны в виде примеров некоторые из числа наиболее интересных и имеющих отношение к тематике книги публикаций в этой области.

Среди фундаментальных монографий, посвященных принципам квантовой теории, следует отметить небольшую монографию В. Гейзенберга [51], в которой основное внимание уделяется физическим принципам теории; математическому аппарату посвящена вторая часть этой работы.

Другой фундаментальной монографией, сохраняющей свою актуальность и до настоящего времени, является книга В. А. Фока [422]. К этой же серии следует отнести книги В. Паули [89], П. А. М. Дирака [44], Г. Бете [405] и др. Здесь следует особо выделить прекрасную книгу Луи де Бройли [68], посвященную теории Дирака.

Современное изложение квантовой теории можно найти в [482—484] и др. Среди более популярных книг отметим работы [110, 388, 389].

Сжатое, но удачное в методическом отношении изложение квантовой теории дано Хиллом [485] (главным образом благодаря принятой последовательности рассмотрения основных положений этой теории и важнейших выводов из них). Аналогичное изложение дано в [42].

Качественным аспектам квантовой теории посвящена очень интересная монография А. Б. Мигдала [486]. Принципиальные вопросы квантовой теории обсуждались также в весьма интересных работах М. А. Маркова [488], В. Л. Гинзбурга [67], Д. И. Блохинцева [388], И. А. Малкина и В. И. Манько [398], Б. Б. Кадомцева [10], Л. Д. Фаддеева [377], [269] и многих других.

Большое значение, например для современной теории сверхпроводимости, имеют нелинейные обобщения уравнений Шредингера, полученные В. Л. Гинзбургом и Л. Д. Ландау [24]. Дальнейшее развитие квантовой теории на основе квантовых уравнений с внутренними переменными отражено в работах В. Л. Гинзбурга и Е. И. Тамма [473].

В последние годы особое внимание было уделено квантовой теории поля. Здесь в первую очередь отметим работы Н. Н. Боголюбова, А. А. Логунова и А. Т. Тодорова [487], Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [427], В. В. Берестецкого [426], И. М. Лифшица и Л. Д. Питаевского [426]. Отметим также работы [428, 429, 489].

В [7], на основе которой был изложен квантовый постулат, предлагалась другая модель квантовой теории. В этой модели уравнения квантовой теории являются элементами единой системы, причем связь с классической механикой становится не приближенной, а точной. Квантовый постулат приводит к принципу отбора уравнений, удовлетворяющих всем физическим требованиям. В частности, уравнения, удовлетворяющие квантовому постулату, не могут привести к нарушению причинности.

Глава 5

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ МЕР КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

(обзор некоторых результатов по смежным проблемам)

В данной главе кратко рассмотрены некоторые вероятностные модели и подходы к выбору количественных мер информации, нашедшие свое применение в информационной теории управления [34—40]. Особенности и взаимосвязь рассматриваемых в данной главе мер (меры информации Хартли, Больцмана, Фано, Котельникова и Фишера) обсуждаются в рамках математической статистики; мера количества информации Шеннона, ее обобщения и применения иллюстрируются на примерах информационной теории управления. Отмеченные взаимосвязи с процессами наблюдения, измерения и идентификации параметров динамических процессов и систем управления, а также связь с термодинамическими аспектами процессов обработки и сжатия информации уточняются и обобщаются в рамках более общих физических моделей.

5.1. Информационные модели в теории динамических систем управления

В последнее время получили развитие информационные подходы в анализе и синтезе систем автоматического управления (САУ), которые отдельными авторами формулируются в виде информационной теории управления [36—40]. Последнюю в первом приближении возможно охарактеризовать такими особенностями, как разработка методов теории на основе: 1) энтропийной (информационной) теории моделей и описаний процессов управления; 2) информационных ограничений (пропускная способность, пороги различимости состояний, предельные физические возможности и физическая реализуемость); 3) информационных критериев управления (минимальная потеря информации, минимальная конечная энтропия и др.).

Область приложения информационной теории управления — сложные системы управления, характеристики неопределенности в которой, как и в теории информации, суть энтропийные (информационные) характеристики процессов управления [36, 37]. Информационная теория управления соответствует и адекватна управлению системами с неупорядоченными состояниями и в

идейном отношении разрабатывает точки зрения на управление как на процесс искомого алгоритма упорядочения объекта управления. Она создает свои концепции в теории сложности систем управления.

На интуитивном уровне очевидна аналогия в преобразовании сообщения (сигнала) в информационной системе и преобразовании состояния объекта в системе управления. Теория информации, рассматривающая процессы передачи сообщений, и теория управления, изучающая процессы преобразований состояний объекта, имеют много качественных аналогий [39]. Несмотря на различия в структурах, для систем передачи информации и управления едины методология и результаты, достигнутые в решении общих фундаментальных проблем: оптимизации, фильтрации, помехоустойчивости (робастности), квантования, распознавания, обучения и т. д.

Роль собственно информационных процессов и систем в управлении трудно переоценить в инженерном (физическом) плане: они входят в общую систему управления, а информационные процессы сами по себе существенны для всех каналов систем управления.

Замкнутость информационных процессов в системах управления обусловливает особую проблему (в отличие от информационных систем) поиска источников информации от объектов управления, проблемы информационного контакта с объектом управления с целью получения информации о его состоянии. Эта проблема контакта очень сложна и отвечает теории отражения и передачи материальных (физических, химических, биологических и др.), энергетических (механических, термодинамических и др.) и информационных состояний объекта. Задачи определения существования и построения процессов отражения состояния объекта в сигнальную форму имеют самостоятельное значение с точки зрения возможности физической реализуемости такого отражения в прямой или косвенной форме.

Кроме проблемы поиска источников информации в САУ существует «обратная» задача (другая особенность информационных процессов в САУ), заключающаяся в реализации воспроизведения сигнальной формы — маломощного информационного сигнала — в перемещение органа управления на новом уровне мощности (проблема сервомеханизмов).

Рассмотрим еще несколько особенностей исследования динамических систем в информационной теории управления.

Так, дискретизация процесса путем квантования его по уровню и времени имеет ряд отличий в системах управления по сравнению с информационными системами, в основном это связано с особенностями объекта импульсного дискретного управления. Такими особенностями являются, например, связь момента дискретизации с оптимизацией процесса по его ресурсам, игровые ситуации с импульсными коррекциями, минимизация числа дискретных коррекций в связи с их стоимостью и т. п. Квантование

в информационной теории управления также связывают с фиксацией условных порогов различимости состояний объекта [37]. Введение порога различимости объективно приводит к квантово-механическим аналогам принципа неопределенности в управлении [39].

Проблема предельных возможностей управляемых систем связана с дальнейшим увеличением их разрешающей способности и, в частности, скорости преобразования информации.

Однако существует физическое ограничение (зависящее от физической природы носителя информации и фазового объема системы) по количеству информации, передаваемой в единицу времени, носящее релятивистский и квантовый характер [39].

Такие ограничения (предельная скорость переработки информации с учетом вырождения энергетических уровней в физических системах определяется соотношением $I/mt=c^2I/(Et)$, где I — количество информации; m — масса; E — энергия; t — время, откуда в частном случае следует искомое ограничение — оценка Г. Бремермана в виде $c^2/\hbar=1.35\cdot10^{47}$ бит/с) оказываются логарифмически зависящими от кратности вырождения и аналогичны в пределе ограничению в релятивистской механике — скорости света.

Однако уже У. Р. Эшби показал, что для моделирования поведения системы с 10^6 двоичными рецепторами необходимо устройство с памятью не меньше чем $10^{3\cdot10^5}$ бит информации. В этом случае указанная граница Бремермана выступает уже как реально оцениваемая величина. На необходимость учета подобных обстоятельств указывалось неоднократно в работах по теории управления [39]. С учетом этих обстоятельств разрабатываются квантоворелятивистские аспекты управления, получившие в настоящее время развитие и первые результаты [29—35, 39, 69, 86, 87].

Предыдущие результаты позволяют говорить об управлении на основании категории «определенность — неопределенность» [37]. Эта концепция управления обычно трактуется в виде учета всей имеющейся априорной информации (начальная неопределенность), а также новой, возникающей в процессе управления. На основании этой концепции достигаются в управлении более существенные и содержательные результаты по сравнению с концепцией «только неопределенность».

Информационная теория управления сложными системами характеризуется не только как формально-математическая теория, но и как содержательная теория. Новые факты и открытия на основе чисто качественных наблюдений, а также роль конкретных исследований и эксперимента являются существенными для управления объектами с неупорядоченными состояниями, их моделями и описаниями [39].

По всей вероятности, наиболее трудной в информационной теории управления является проблема верификации. Последняя представляет установле-

ние связей и соответствий между информацией о состоянии объекта в виде определенного сигнала и реальными материальными и энергетическими процессами в объекте управления. Наиболее полное качественное и количественное доказательство связи информации (сигнала) и конкретного материального и энергетического процесса в объекте управления представляет задачу распознавания «черного ящика» (задача о построении корректной модели), которое, очевидно, должно совершаться с участием специалистов теории конкретного объекта управления, за которыми остается оценка информативности того или иного признака и всей проблемы верификации. Решение подобных задач составляет одну из центральных проблем теории моделей процессов управления [39].

Одним из значительных результатов теории информации является разработка адекватных структур прямых и корректирующих каналов систем передачи информации [497]. В сложных системах управления с наличием не только обратных, но и прямых связей, результаты по прямым связям в теории информации существенно обогащают теорию разомкнутых (формирующих и компенсирующих) цепей систем управления. Теорема о прямом и компенсирующем канале в теории информации имеет связь с принципом двухканальности в теории инвариантности систем управления [37, 39].

Ранние информационные подходы к сложности моделей конечных объектов оценивались числом двоичных знаков в программе описания объекта, зависящей от невязки или уклонения существующего распределения его отдельных значений от нормального. В общем случае за меру сложности, по Колмогорову, принимается ее энтропия, адекватная длине программы описания системы. Каждой сложной динамической системе приписывается соответствующее значение энтропии. Оценка математических ожиданий и дисперсии системы в этом случае имеет расплывчатый характер, зависящий, в частности, от конкретной выборки, порога различимости и т. д. В настоящее время рассматриваются различные информационные подходы на энтропийной основе в оценке сложности системы управления [71—73].

Одной из существенных информационных проблем в управлении является сжатие информации или редукция данных на основе оценки потери информации. Информационные подходы в этой области связываются с использованием обобщенных мер энтропии (энтропии Реньи и др.) [38].

В настоящем разделе кратко формулируются некоторые основные результаты информационной теории управления и устанавливается взаимосвязь информационных аспектов проблемы построения структур инвариантных динамических систем с новыми задачами общей теории управления: 1) информационная оценка наблюдаемости динамических систем и взаимосвязь с задачей оптимизации структур процессов фильтрации; 2) информационные и термодинамические критерии в теории инвариантных нелинейных САУ; 3) нечеткая логика принятия решений и робаст-

ность алгоритмов управления инвариантными САУ; 4) оценка сложности по Колмогорову алгоритмов управления; 5) обобщение полученных результатов на новый класс динамических систем управления — квантовые и релятивистские системы.

В общей теории управления уже имеется определенный опыт исследования взаимосвязей между отдельными из перечисленных задач, что нашло свое отражение в опубликованных монографиях, статьях и обзорах [38, 39, 42, 69, 72 и др.]. В настоящей главе исследование взаимосвязей указанных задач основано на единой мере — информационной энтропии и количестве информации (в смысле Шеннона и их обобщениях) как для классических (включая релятивистский случай), так и квантовых динамических систем управления.

В связи с этим рассмотрение указанных аспектов начнем с описания возможных мер энтропии и количества информации.

5.2. Предварительные замечания о моделях количественных мер информации

5.2.1. Теория информации (в узком смысле этого термина) создана на основе прикладных задач передачи информации по каналам связи. Для систем связи была разработана внутренне непротиворечивая теория, основанная на общих законах передачи информации, которые не зависят от частного вида рассматриваемых систем. Это было достигнуто на основе аксиоматического анализа новой величины, названной количеством информации. Возможности использования этой величины существенно выходят за рамки проблем передачи информации. Такое многогранное понятие, как информация, естественно, не может иметь единого и пригодного для всех ситуаций способа измерения ее количества. Эта мысль была четко сформулирована в работе К. Шеннона и У. Уивера [497] и многократно обсуждалась в научной и научно-популярной литературе [498—501].

В связи с отмеченным А. Н. Колмогоров в [502] подчеркивает следующее обстоятельство: «В качестве итога исследований аксиоматического направления можно считать выясненным, что никакой другой столь же естественной скалярной сводной характеристики информации, содержащейся в одном случайном объекте ξ относительно другого случайного объекта η, кроме $I(\xi, \eta)$, существовать не может. Однако так как «информация» по своей природе не обязана быть (и в действительности не является!) скалярной величиной, то никакие аксиоматические исследования указанного направления не могут ответить на вопрос о том, сколь полно характеризует величина $I(\xi, \eta)$ интересующую нас «информацию» и «вместе с тем надо понимать, что при всей увлекательности идей теории информации подобное стирание качественных особенностей информации имеет место только с известным приближением и при определенных условиях». В [498—500] достаточно подробно освещены результаты дискуссий по поводу выбора количественных мер информации.

Теория информации показала, однако, что для определенных классов задач существуют общие принципы, присущие разным подходам к измерению информации. В частности, весьма плодотворной оказалась мысль К. Шеннона [501] измерять количество информации как разность неопределенностей рассматриваемого объекта до и после получения информации. В статистической теории информации, таким образом, выбор соответствующей меры сводится к выбору меры неопределенности, что можно сделать многими равноправными способами. Можно, например, указать на алгоритмический подход к измерению количества информации, предложенный А. Н. Колмогоровым [502] и основанный на введении меры неопределенности объекта через сложность задающего этот объект алгоритма. Такой метод, как отмечалось в п. 5.1, имеет особое значение для задач теории управления [72, 73, 503]. Следует отметить также, что предложенный алгоритмический подход дает возможность построить корректную и непротиворечивую теорию вероятностей, нестатистические варианты теории информации, исследовать отдельные (не массовые) явления и конечные объекты. Методологические особенности такого подхода можно найти в [72, 503—515].

Обоснованием необходимости и полезности понятия энтропии и выраженного через нее количества информации является указанная Шенноном возможность выразить через эти величины пропускную способность канала и эпсилон-энтропию (ε-энтропия) сообщения или энтропию при заданном уровне точности. Последняя величина (менее используемая, чем пропускная способность) полезна для непрерывных величин, энтропия которых бесконечна. Пропускная способность и ε-энтропия, согласно теоремам Шеннона [501], позволяют описывать условия, когда введение соответствующих методов кодирования и декодирования делает возможной передачу по заданным системам связи. В этих задачах можно варьировать и выбирать оптимальным образом методы кодирования и декодирования [529].

Довольно часты также ситуации, когда количество информации вычислить и оценить проще, чем специальные характеристики (более адекватные данной реальной задаче), а на основе знания количества информации можно затем исследовать и эти специальные характеристики. В качестве примера подобных ситуаций можно указать на задачи статистической оценки сигналов [530]. В частности, по известному количеству информации можно оценить снизу среднеквадратичную ошибку оценки параметра при заданной точности ε. В довольно широком классе случаев эта оценка оказывается асимптотически точной при $\varepsilon \to 0$. Такая схема получения оценок распространяется и на более сложные ситуации. На основе изменения количества информации можно также получать оценки приращения риска при редукции данных [516—528]. Очень полезным является использование понятия ε-энтропия в более широком классе задач теории управления [528].

Сравнение понятий теории информации и теории управления показывает, что и при передаче сообщений, и при управлении имеем дело с информацией, которая лежит в основе функционирования информационных систем и систем управления. В последние годы широко обсуждаются вопросы основ теории информации и взаимосвязь с физическими теориями (см. [528, 534]). Понятия современной теории информации предлагается рассматривать как первичные, на базе которых возможно построить физические теории. В частности, в [531, 532] предлагается вводить понятия теории информации в качестве первичных и использовать их при построении статистической механики. Здесь можно постулировать существование инвариантной меры вероятности (безразмерный элемент фазового объема), а затем получить все распределения Гиббса из условия максимума информационной энтропии [532]. Другим примером подобного подхода могут служить некоторые задачи молекулярной биологии [73]. Особенно четко связь между методами и понятиями теории информации и физическими теориями прослеживается в термодинамике. При этом в ряде случаев в основу обеих теорий могут быть положены основные положения теории автомодельных распределений вероятностей и автомодельных обобщенных случайных полей [533].

Многочисленные исследования взаимосвязи между информационным и физическим содержаниями понятия энтропии привели в результате к единому мнению, что энтропия как функционал распределения вероятностей состояний физической системы является одновременно и мерой количества информации, которое может быть передано при заданных ограничениях, если рассматриваемая система используется в качестве носителя сигналов, и мерой неопределенности макросостояния этой системы, и характеристикой степени ее неравновесности. При заданной средней энергии этот функционал достигает максимума на равновесном распределении, а достигнутый максимум имеет смысл термодинамической энтропии [39]. Это обстоятельство существенно и позволяет рассматривать ряд новых вариационных задач, решение которых столь актуально для исследования сложных проблем оптимального управления. Этот факт описан в работах Р. Л. Стратоновича [30], где показано, что задачам теории информации можно дать классификацию в виде трех вариационных задач.

Таким образом, единство различных аспектов понятия энтропии проявляется для достаточно широкого круга задач, в которых состояние физической системы может быть описано с помощью распределения вероятностей. К этому кругу задач относятся задачи математической статистики, в частности, тех задач, в рамках которых нет необходимости учитывать некоммутативность различных переменных, а квантовый характер проявляется, например, лишь в дискретности энергетического спектра. Исследование подобных задач проводилось рядом авторов [30—35].

При последовательном квантовом описании физической системы передачи информации, когда распределение вероятностей

заменяется оператором плотности, а соответствующий функционал, характеризующий энтропию его естественным квантовым обобщением, инвариантным по отношению к унитарным преобразованиям, ситуация значительно сложнее. Систематическое исследование свойств энтропии, заданной через оператор плотности, было предпринято в работах Дж. фон Неймана [402] и С. Эльзасера [535]. В последующих работах была выяснена роль квантового обобщения энтропии в физической теории информации и роль физических измерений в процессах наблюдения и оценивания параметров на квантовом уровне. И в этом случае квантовое обобщение энтропии достигает максимума при заданной средней энергии на распределении Гиббса, что позволяет внести формализм матрицы плотности в равновесной термодинамике [402, 536—539].

Более сложным является исследование свойств неравновесных систем. В этом случае часто за квантовым обобщением классической энтропии оставляют только его информационный аспект, не отождествляя с физической энтропией. Согласно [34], основной причиной подобного подхода является то обстоятельство, что замкнутость физической системы не изменяется со временем и, следовательно, не подчиняется H-теореме физической кинетики. Если систему можно представить в виде суммы большого числа N подсистем, то соответствующая сумма от квантового обобщения энтропии отдельных подсистем может со временем возрастать. Тогда становится целесообразным отождествление этой величины с физической энтропией, хотя вопрос об определении «истинной» энтропии сложной физической системы остается открытым [34].

Выяснение природы затронутых вопросов необходимо для рассмотрения потерь информации и работы, обусловленных возрастанием физической энтропии согласно термодинамике необратимых процессов [39, 534]. Данные вопросы непосредственно соприкасаются с проблемой построения корректных физических, расчетных и математических моделей явлений и процессов [39, 42], обсуждаемых в главе 1.

Процесс измерений и извлечения информации по результатам наблюдений происходит при взаимодействии физических систем и связан с обменом энергией. Вследствие этого обстоятельства одним из центральных вопросов при исследовании указанной проблемы является нахождение зависимостей между извлекаемым по результатам наблюдений количеством информации и затраченной работой. Этим самым устанавливается однозначная связь между понятиями «количество информации» и «физическая энтропия».

Следовательно, одной из задач термодинамики информационных процессов является установление связей (предельных соотношений) между термодинамическими характеристиками (энтропия, энергия) и информационными (количество информации, точность) [39, 534].

Тогда информационные процессы — получение информации (измерение), передача и обработка информации (вычислитель-

ные процессы) — удобно рассматривать одновременно как единую систему с тремя подуровнями. Понятие физической энтропии позволяет дать количественную формулировку второго закона термодинамики, который запрещает в изолированной системе процессы, сопровождающиеся увеличением энтропии (ее производством). Из этого следует заключение о необходимости энергетических затрат при фактическом измерении координат физической системы и регистрации этой информации.

Второй закон термодинамики накладывает, согласно [30], дополнительные ограничения на возможности физической реализуемости информационных систем. Так, если система находится при температуре T, то для получения и записи количества информации dI о ней необходимо потратить как минимум TdI энергии (ибо в противном случае измеритель и информационный преобразователь тепловой энергии в механическую при их объединении образовали бы вечный двигатель). Отсюда следует также вывод о необходимости минимальных энергетических затрат для физических каналов с шумом, соответствующим заданной температуре T. В этом заключается в данном случае термодинамический критерий физической реализуемости информационных систем. В [34] показано также, что процесс репродукцирования информации при взаимодействии подсистем неизбежно связан с термодинамически необратимыми процессами, сопровождается возрастанием энтропии и потерей суммы количеств полезных работ, содержащихся по отдельности в каждой из взаимодействующих систем. Так как любая информация является результатом измерения (сравнения) и взаимодействия по крайней мере двух элементов, то перечисленные факты необходимо учитывать при исследовании физических моделей процессов передачи информации по заданной количественной мере информации.

5.2.2. Здесь сделаем несколько предварительных замечаний к вопросу об исследовании вероятностных мер количества информации. В основу математической модели теории информации (в ее статистическом варианте) положены результаты Р. Хартли [540], Р. Фишера [541], К. Шеннона [501], А. Н. Колмогорова [502], А. Я. Хинчина [542], М. С. Пинскера [543], Р. Л. Добрушина [544], И. М. Гельфанда и А. И. Яглома [545], А. Файнстейна [546], Р. Фано [547], Р. Галлагера [548], С. Кульбака [549], их последователей [550—555] и мн. др.

Построенная А. Н. Колмогоровым аксиоматическая теория вероятностей позволила получить единую количественную меру информации, а развитие методов и понятий термодинамики (на основе вероятностных концепций) и их применение в теории информации позволило расширить возможности самой теории информации. Например, метод математического анализа семантического и прагматического аспектов количества информации опирается на известный из статистической механики и термодинамики метод Гиббса, что еще раз подтверждает идеи К. Шеннона [501] и А. Н. Колмогорова [502] о плодотворности математических и физических аналогий в теории информации. Дальнейшее развитие эта идея по мнению многих авторов получила в релятивистской [29] и квантовой теориях информации [30—35]

и др. (методы и понятия которых начали разрабатываться совсем недавно), учитывающих развитие идей и методов релятивистской и квантовой теорий, термодинамики и статистической радиофизики. Создание подобных теорий потребовало перестройки статистической теории информации (подобно перестройке классической механики при построении релятивистской квантовой теории [7]) с учетом требований квантовых каналов связи, релятивистских и квантовых эффектов при передаче информации.

Здесь ограничимся рассмотрением в рамках математической статистики некоторых подходов к построению вероятностных мер количества информации (Хартли, Фишера и их разновидностей) с иллюстрациями вопросов исследования процессов наблюдения, измерения и передачи информации.

5.3. Статистические и доминируемые структуры

Прежде всего рассмотрим основные определения и понятия математической статистики [555], связанные с понятием статистической структуры, которое играет роль, аналогичную роли вероятностного пространства в теории вероятности.

Допустим, что задано пространство наблюдений Ω, а самим наблюдениям соответствует некоторая случайная величина $x \in X \subset \mathfrak{A}$ с заданным распределением вероятностей $p(x)$. Априори предполагается, что распределение вероятностей принадлежит известному семейству $\mathscr{P}$, т. е. $p(x) \in \mathscr{P}$, $x \in X$. *Статистической структурой* (*экспериментом*) в математической статистике называется тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$. Для семейства $\mathscr{P}$ с помощью введения индекса θ, называемого параметром, часто используется другое обозначение: $\mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

Статистическая структура $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ (семейство $\mathscr{P}$) называется доминируемой, если существует положительная σ-конечная мера μ[1] на $(\Omega, \mathfrak{A})$, такая, что выполняется одно из двух эквивалентных условий: 1) каждое распределение из $\mathscr{P}$ абсолютно непрерывно относительно μ; 2) каждое распределение из $\mathscr{P}$ имеет вероятностную плотность относительно μ.

Пример 1. Допустим, что в частном случае рассматриваемая доминируемая статистическая структура задана с помощью параметра θ и вероятностной плотности $p_\theta(x) = dP_\theta/d\mu$. В этом случае такая структура может быть записана в следующем виде: $[\Omega, \mathfrak{A}, \{p_\theta, \theta \in \Theta\}]$.

Допустим, что μ доминирует структуру и абсолютно непрерывна относительно меры μ'. Тогда мера μ' также доминирует эту же структуру и [555]

$$\frac{dP_\theta}{d\mu'} = \frac{dP_\theta}{d\mu}\frac{d\mu}{d\mu'}.$$

[1] Напомним, что мера μ называется σ-конечной на $(\Omega, \mathfrak{A})$, если Ω представимо в виде счетного объединения измеримых множеств конечной меры μ.

Таким образом, мера, доминирующая некоторую статистическую структуру, не единственна. Однако для доминирующих структур всегда возможно выбрать в качестве доминирующей меры вероятностную. Такую возможность устанавливается следующая теорема.

Теорема 5.1 [555]. *Статистическая структура* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ *является доминируемой тогда и только тогда, когда найдется вероятностное распределение* P^* *на* $(\Omega, \mathfrak{A})$, *называемое привилегированным, доминирующее* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$ *и обладающее следующими свойствами: 1) распределение* P^* *абсолютно непрерывно относительно всякой меры, доминирующей* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathscr{P})$; 2) *распределение* P^* *является строго выпуклой комбинацией мер из некоторого не более чем счетного подмножества* $\mathscr{P}'$ *мер из* $\mathscr{P}$, $P^* = \sum_{p \in \mathscr{P}} C_p P \left(C_p > 0, \sum_{p \in \mathscr{P}'} C_p = 1 \right)$; 3) *распределение* P^* *эквивалентно* P, *т. е.*

$$[P(A) = 0 \forall P \in \mathscr{P}] \Leftrightarrow P^*(A) = 0 \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Таким образом, могут быть построены статистические структуры, обусловливающие вероятностные логические суждения. Одна из таких структур — модель вероятностной логики — рассмотрена в [556].

5.4. Некоторые основные положения базовой, вероятностной и нечеткой логик теории сложных систем

В теории управления в последние годы большое внимание уделяется логическим вопросам исследования сложных САУ в условиях неопределенности. Теоретической основой исследования в зависимости от постановки задачи являются вероятностная или нечеткая логики [556, 39]. Здесь рассмотрим кратко некоторые модели вероятностной и нечеткой логик, используемые в дальнейшем изложении, и возможные их обобщения в виде более общей модели [556]. Такое обобщение основано на выделении общих постулатов, присущих как вероятностной, так и нечеткой логикам, и объединении их в базовую логику. Добавление дополнительных гипотез позволяет получать модели вероятностной или нечеткой логики.

5.4.1. Вероятностная логика. Рассмотрим одну из моделей вероятностной логики, предложенной в [556]. В терминах вероятностей $p(x)$ над областью возможных состояний $x \in X$ в пропозициональном исчислении вероятностная логика введена на основе следующих постулатов.

П1. $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$, $\forall x \in X$.

П2. $p(x \vee y) = p(x) + p(y)$; если x и y взаимно независимые события.

П3. $p(x) = p(y)$, x и y логически эквивалентны.

П4. $p(x \vee \bar{x}) = 1$ (закон исключения среднего).

Из постулатов П1—П4 получены следующие результаты [556]:

$$0 \leqslant p(x) \leqslant 1; \tag{5.1}$$

$$p(F) = 0, \quad p(T) = 1; \tag{5.2}$$

$$p(x \wedge y) \leqslant \min(p(x), p(y)) \leqslant \max(p(x), p(y)) \leqslant p(x \vee y); \tag{5.3}$$

$$p(\bar{x}) = 1 - p(x); \tag{5.4}$$

$$p(x \wedge y) = p(x) + p(y) - p(x \vee y); \tag{5.5}$$

$$p(x \supset y) = p(\bar{x} \vee y) = p(\bar{x}) + p(x \wedge y); \tag{5.6}$$

$$p(x \equiv y) = p((x \supset y) \wedge (y \supset x)) = p((\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)) =$$
$$= 1 - p(x \vee y) + p(x \wedge y), \tag{5.7}$$

где $\bar{x}$ — противоположное событие к x; T (True — истинно) — достоверное событие; F (False — ложно) — недостоверное событие.

Рассмотрим логические связки AND, OR, NOT с точки зрения приведенных результатов вероятностной логики. В этом случае

$$z = x \text{ AND } y \Rightarrow Z = \min(X, Y), \quad z \in Z, \quad x \in X, \quad y \in Y; \tag{5.8}$$

$$z = x \text{ OR } y \Rightarrow Z = \max(X, Y); \tag{5.9}$$

$$z = x \text{ NOT } y \Rightarrow Z = 1 - Y. \tag{5.10}$$

Введенным определениям (5.8)—(5.10) соответствуют два экстремальных значения: TRUE=1 и FALSE=0. В данном случае логическая переменная характеризуется функцией принадлежности к соответствующим предельным точкам 0 и 1 интервала [0, 1]. Если предположить, что логическая переменная, например X, характеризуется не только функцией принадлежности интервалу [0, 1], но и характеризует одновременно вероятность события x, то в этом случае можно рассмотреть соответствующие аналоги определений (5.8)—(5.10).

Предположим, что случайные события носят бинарный характер (т. е. происходит или не происходит). Тогда, например для (5.10), имеем

$$z = \text{NOT } y, \quad Z = p(z) = p(\bar{y}) = 1 - p(y) = 1 - Y. \tag{5.11}$$

В терминах распределения вероятностей событий x и y можно записать

$$X = p(x) = p(x \wedge y) + p(x \wedge \bar{y}); \tag{5.12}$$

$$Y = p(y) = p(x \wedge y) + p(\bar{x} \wedge y). \tag{5.13}$$

Из соотношений (5.12), (5.13), с учетом неравенств $0 \leqslant p(\cdot) \leqslant 1$ следует

$$0 \leqslant p(x \wedge y) \leqslant \min(X, Y); \tag{5.14}$$

$$0 \leqslant XY \leqslant \min(X, Y); \tag{5.15}$$

$$\max(X,\ Y)\leqslant p(x\vee y)\leqslant 1; \tag{5.16}$$

$$\max(X,\ Y)\leqslant X+Y-XY\leqslant 1. \tag{5.17}$$

Приведем здесь анализ двух других логических связок (5.8) и (5.9). Так, для $z=x$ AND y. $Z=p(x\wedge y)$ имеем следующие следствия.

1. $Z=0\Leftrightarrow p(x\wedge y)=0\Leftrightarrow x\supset\bar{y}$ AND $y\supset\bar{x}$, т. е. случайные события x и y взаимно исключают друг друга (противоположные события).

2. $Z=XY\Leftrightarrow p(x\wedge y)=p(x)p(y)$, т. е. x и y статистически независимы.

3. $Z=\min(X,\ Y)\Leftrightarrow p(x\wedge\bar{y})=0$, OR $p(\bar{x}\wedge y)=0\Leftrightarrow x\to y$ OR $y\to x$, т. е. x и y строго имплицируют.

Для логической связки $z=x$ OR y, $Z=p(x\wedge y)=1-p(\bar{x}\wedge\bar{y})$ выполняются следующие условия.

1′. $Z=1\Leftrightarrow p(\bar{x}\wedge\bar{y})=0\Leftrightarrow\bar{x}\supset y$ AND $y\supset\bar{x}$, т. е. должно произойти событие x или y.

2′ $Z=X+Y-XY\Leftrightarrow p(x\wedge y)=p(x)p(y)$, т. е. x и y статистически независимы.

3′. $Z=\max(X,\ Y)\Leftrightarrow p(x\wedge\bar{y})=0$ OR $p(\bar{x}\wedge y)=0\Leftrightarrow x\to y$ OR $y\to x$, т. е. имеет место импликация и в этом случае строгая импликация $x\to y$ дает необходимое условие $x\supset y$.

В приведенных условиях имеет место соотношение $p((x\supset y)\vee\vee(y\supset x))=1$.

Из изложенного следует, что условия 1 и 1′ независимы и дают $x=y$. Условия 2 и 2′ эквивалентны и отражают специфику вероятностной логики, в которой атомарные [556] высказывания предполагаются статистически независимыми, а сама логика содержит в качестве составных элементов мультипликативные и аддитивные связки. Условия 3 и 3′ также оказываются эквивалентными и непосредственно отражают тот факт, что логическим связкам в вероятностной логике можно поставить в соответствие (как и в нечеткой логике) операции max/min.

5.4.2. Базовая логика в условиях неопределенности. Допустим, что задана структура $L\ (X, F, T, \vee, \wedge)$ на множестве элементов X с максимальным элементом T и минимальным элементом F, удовлетворяющая следующим условиям.

P1. $\forall x\in L,\quad x\vee x=x,\wedge x=x.$

P2. $\forall x, y\in L,\ x\vee y=y\vee x,\ x\wedge y=y\wedge x,$

P3. $\forall x, y, z\in L,\quad x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z,\ x\wedge(y\wedge z)=$
$=(x\wedge y)\wedge z.$

P4. $\forall x, y\in L,\ x\vee(x\wedge y)=x,\ x\wedge(x\vee y)=x.$

P5. $\forall x\in L,\ x\vee T=T,\ x\wedge T=x,\ x\vee F=x,\ x\wedge F=F.$

P6. $\forall x, y\in L,\ x\leqslant y\Leftrightarrow\exists z\in L: y=x\vee z.$

Предположим, что каждый элемент L характеризуется значением истинности по степени принадлежности к интервалу $[0, 1]$ с помощью отображения $p: L \to [0, 1]$ со следующими свойствами.

P7. $p(F)=0, \quad p(T)=1.$

P8. $\forall x, y \in L,\ x \leqslant y \Rightarrow p(x) \leqslant p(y).$

P9. $\forall x, y \in L,\ p(x \wedge y)+p(x \vee y)=p(x)+p(y).$

Функция $p(x)$ обладает следующим свойством:

$$p(x \wedge y) \leqslant \min(p(x), p(y)) \leqslant \max(p(x), p(y)) \leqslant p(x \vee y). \tag{5.18}$$

Приведенные постулаты о структуре L дополняются еще одним

P10. $\forall x, y \in L,\ x \equiv y \Leftrightarrow p(x \wedge y)=p(x \vee y),$

что приводит к соотношению

$$\forall x, y, z \in L,\ x \equiv y \Leftrightarrow (x \wedge z) \equiv (y \wedge z)\ \mathrm{AND}\ (x \vee z) \equiv (y \vee z). \tag{5.19}$$

Из (5.19) следует

$$\forall x, y, z \in L,\ p(x \wedge y)=p(x \vee y) \Rightarrow p(x \wedge z)=p(y \wedge z)\ \mathrm{AND}\ p(x \vee z)=p(y \vee z). \tag{5.20}$$

Рассмотрим метрические аналоги введенных постулатов. Введем обозначение

P11. $\forall x, y \in L,\ d(x, y)=p(x \vee y)-p(x \wedge y).$

В [557, 558] показано, что $d(x, y)$ является квазиметрикой на L:

$$d(x, x)=0,\ 0 \leqslant d(x, y) \leqslant 1,\ d(x, y)+d(y, z) \geqslant d(x, z). \tag{5.21}$$

Из (5.21) и постулата P10 получаем

$$d(x, y)=0 \Leftrightarrow x \equiv y. \tag{5.22}$$

Следует подчеркнуть, что приведенные свойства и постулаты являются основой как для вероятностной, так и для нечеткой логики. Метрические свойства структуры L приводят к следующему свойству логической тождественности:

P12. $\forall x, y \in L; \quad p(x \equiv y)=1-d(x, y)=1-p(x \vee y)+p(x \wedge y).$

Из P12 следует, что два конгруэнтных элемента на L эквивалентны со значением 1, а максимально неэквивалентные элементы «эквивалентны» со значением 0. По аналогии с пропозициональным [556] исчислением вводится постулат

P13. $\forall x, y \in L,\ p(x \supset y)=p(x \equiv x \wedge y)=1-d(x, x \wedge y)=1-p(x)+p(x \wedge y)=1+p(y)-p(x \wedge y)=1-d(y, x \vee y).$

Тогда операция отрицания в терминах эквивалентности или импликации имеет вид

P14. $\forall x \in L,\ p(\bar{x}) = p(x \equiv F) = p(x \supset F) = 1 - p(x)$.

Аналогично

$$p(T \equiv x) = p(T \supset x) = p(x). \tag{5.23}$$

Постулат P13 приводит к следующему свойству:

$$\forall x, y \in L,\ p(y) = p(x \vee y) - 1 + p(x \supset y) \geqslant$$
$$\geqslant p(x) - (1 - p(x \supset y)). \tag{5.24}$$

Выражение (5.24) показывает нижнюю границу значения истинности для переменной y по соответствующим значениям для x и $x \supset y$ и показывает ограничение формы правила modus ponens. Из (5.24) следует, что из условия $x \supset y$ вытекает условие $p(y) \geqslant p(x)$ и $p(y) \geqslant \max(p(x_i))$, где $x_i \supset y$. Последнее условие содержит в себе важное правило вида **if** x_i **then** y, широко используемое в теории нечетких систем и исследовании моделей нечетких аппроксимаций и рассуждений [39]. Предположим теперь, что элементами структуры L являются $x \equiv y$, $x \supset y$, $\bar{x}$. Из постулатов P10 и P13 следует

$$p(x \vee (x \supset y)) + p(x \wedge (x \supset y)) = 1 + p(x \wedge y), \tag{5.25}$$

что приводит к условию

$$p(x \vee \bar{x}) + p(x \wedge \bar{x}) = 1. \tag{5.26}$$

Из (5.26) следует, что закон исключения среднего ($p(x \vee \bar{x}) = 1$) и закон противоречия ($p(x \wedge \bar{x}) = 0$) являются эквивалентными с точки зрения этой модели. Аналогично изложенному вводится постулат о дистрибутивности

P15. $\forall x, y, z \in L,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Рассмотрим подробнее постулат

P16. $\forall x \in L,\ p(x \vee \bar{x}) = 1$.

Как отмечалось, постулат P16 означает закон исключения среднего. В работе [556] показано, что добавление постулата P16 к системе постулатов P1—P15 приводит к системе постулатов П1—П4, т. е. к модели вероятностной логики. Таким образом, добавление закона исключения среднего к системе постулатов базовой логики P1—P15 позволяет вывести из последней модель вероятностной логики.

5.4.3. Нечеткая логика. В основе простейшей модели нечеткой логики лежит система постулатов многозначной логики Лукасевича для функции принадлежности $p(x)$, удовлетворяющей условию

L1. $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$.

Для функции $p(x)$ выполняется следующая система постулатов.

L2. $p(\bar{x}) = 1 - p(x)$.

L3. $p(x \wedge y) = \min(p(x), p(y))$.

L4. $p(x \vee y) = \max(p(x), p(y))$.

L5. $p(x \supset y) = \min(1, 1 - p(x) + p(y))$.

L6. $p(x \equiv y) = \min(1 - p(x) + p(y), 1 + p(x) - p(y))$.

Приведенная система постулатов L1—L6 составляет основу многозначной логики Лукасевича $L_{\aleph_1}$.

Рассмотрим теперь вместо постулата P16 постулат

P17. $\forall x, y \in L, p(x \supset y) = 1$ OR $p(y \supset x) = 1$.

В [556] показано, что система постулатов P1—P15 совместно с постулатом P17 тождественна система постулатов L1—L6. Таким образом, система постулатов базовой логики P1—P15 совместно с постулатом P17 приводит к модели нечеткой логики.

5.5. Количество информации Хартли и его асимптотическая связь с энтропией Больцмана

Допустим, что $(\Omega, \mathfrak{A}; P_\theta, \theta \in \Theta)$ — заданная статистическая структура и задана некоторая упорядоченная группа I. Предположим, что информация, содержащаяся в структуре, задается некоторым элементом из группы I. В рассматриваемой ситуации на интуитивном уровне должны выполняться следующие условия [555]: 1) информация, доставляемая некоторой статистикой, совпадает с информацией в структуре, индуцируемой этой статистикой; 2) информация, доставляемая статистикой, не превосходит информации, содержащейся во всей структуре; 3) информация, доставляемая достаточной статистикой, равна информации всей структуры; 4) информация, доставляемая подобной статистикой, равна нулю; 5) информация, доставляемая одной из эквивалентных статистик, одинакова; 6) информация, доставляемая парой независимых статистик, равна сумме информаций от каждой из них. Приведенные условия дают возможность ввести одновременно и понятие условной информации в терминах σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{A}$.

Традиционные меры количества информации в случае доминируемой структуры являются линейными функционалами от $\log P_\theta(x)$. В данном разделе рассмотрим меру количества информации Хартли [540, 555].

5.5.1. Допустим, что имеется M равновероятных (равноправных) возможностей. Априорная неопределенность, связанная с M исходами, определяется численной величиной H, носящей на-

звание энтропии

$$H=f(M), \tag{5.27}$$

где $f(\cdot)$ — возрастающая неотрицательная функция от M.

Для определения вида функции f используется *принцип аддитивности*. Для сложной системы число равноправных возможностей M равно произведению числа возможных исходов m каждой из подсистем. В случае n испытаний число равноправных возможностей равно $m^n=M$. Согласно принципу аддитивности для функции $f(M)$ должно выполняться следующее соотношение:

$$f(m^n)=nf(m). \tag{5.28}$$

Вводя обозначение $x=m^n$, имеем $n=\ln x/\ln m$.
Тогда из (5.28) следует

$$f(x)=k\ln x, \qquad k=\ln x/\ln m. \tag{5.29}$$

Логарифмическая мера

$$H=k\ln M \tag{5.30}$$

называется хартлиевским количеством информации [548, 549].

В (5.29), (5.30) k — положительная постоянная, не зависящая от x и определяет выбор единиц измерения количества информации. Существует три основные единицы измерения информации: 1) при $k=1$ энтропия измеряется в натах (натуральные единицы); 2) при $k=1/\ln 2$ энтропия выражается в двоичных единицах (битах); 3) при $k=1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/град (постоянная Больцмана) энтропия соответствует физической шкале измерения.

Если равноправность возможностей заключается в условии, что случайная величина ξ принимает одно из M значений, то вероятность $p(\xi)$ каждого ее значения равна $p(\xi)=1/M$ и формулу для H (5.30) в натуральных единицах измерения можно записать в виде

$$H=-\ln p(\xi). \tag{5.31}$$

Согласно идеи К. Шеннона [501], количество пришедшей информации I измеряется величиной снятой неопределенности

$$I=H_{\text{апр}}-H_{\text{апос}}, \tag{5.32}$$

где $H_{\text{апр}}$ и $H_{\text{апос}}$ — априорная и апостериорная меры неопределенности соответственно. В случае меры Хартли количество информации I совпадает, следовательно, с первоначальной энтропией, т. е. апостериорная энтропия равна нулю и сообщение ξ, имеющее энтропию H, сможет передать количество информации I, равное величине H.

Формально выражение (5.31) сохраняет свой вид и для случая, когда вероятности различных возможностей не равны. В этом случае каждой реализации случайной величины ξ при-

писывается определенное значение энтропии, которую можно рассматривать как случайную величину. Поскольку апостериорная энтропия для реализации равна нулю, то информация численно равна первоначальной энтропии

$$I(\xi) = H(\xi) = -\ln p(\xi). \tag{5.33}$$

Из (5.33) следует, что при уменьшении априорной вероятности $p(\xi)$ информация I и энтропия H возрастают.

Пример 1. Информация по Хартли допускает алгебраическую интерпретацию [559]. Пусть M — конечное множество, $|M|$ — его мощность. Информация элемента $\xi \in M$ определяется аналогично (5.30) в виде

$$I(\xi) = \log |M|. \tag{5.34}$$

Если на множестве M задано отношение эквивалентности (рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение [560]), то оно порождает разбиение M на непересекающиеся классы. Фактор-множеством называется множество классов эквивалентности и обозначается $M/\sim$. Если π: $M \to M/\sim$ — каноническое проектирование, сопоставляющее каждому элементу $\xi \in M$ его класс эквивалентности $\pi(\xi)$, то информация элемента ξ определяется как

$$I(\xi) = \log |\pi(\xi)|. \tag{5.35}$$

Если существует один класс эквивалентности, то информация каждого элемента максимальна и совпадает с хартлиевским количеством информации. В [559] показано, что если число классов эквивалентности равно N ($N = |M/\sim|$), то

$$\sum_{\xi \in M} 2^{-(I(\xi)+\log N)} = 1. \tag{5.36}$$

Из (5.36) следует, что величина

$$p(\xi) = 2^{-(I(\xi)+\log N)} \tag{5.37}$$

является нормированной мерой на M. Отношение эквивалентности не является произвольным, а образуется в результате передвижения элементов по некоторым определяемым орбитам.

Пример 2. Допустим, что X — алфавит (конечное множество), $X^n = M$ — множество слов длины n в алфавите X. Если на множестве X не задана структура, то первой мерой информации, которую допустимо ввести на алфавите X, является хартлиевская мера информации. Предположим, что на X^n канонически действует симметрическая конечная группа S_n, переставляющая позиции букв слова заданным образом. Множество X^n является S_n-подмножеством и существует количество информации разбиения. Если буква $a_i \in X$ входит m_i раз в слово $\xi \in X^n$, $i = 1, 2, \ldots, |X| = k$, то разбиение $n = \sum_{i=1}^{l \leqslant k} m_i$ определяет композицию $(m_1, \ldots, m_l)$ слова ξ. Все слова одной и той же орбиты имеют одну и ту же композицию и наоборот. В [559] величина $I_0(\xi) =$

$= \log |G_\xi|$, $G = S_n$ была названа 0-информацией слова ξ и равна

$$I_0(\xi) = \log \frac{n!}{\prod_{i=1}^{l} m_i!}.$$

0-информация минимальна и равна нулю для слова, в которое входит только одна буква, и максимальна, если буквы встречаются в слове одинаково часто [559].

Число безусловных орбит, которое требуется для нахождения меры 0-информации, совпадает с числом всевозможных разбиений $n = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $l \leqslant k$ (k— размер алфавита) и равно $N = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Пример 3. Введенное развитие хартлиевского количества информации на основе отношения эквиалентности было описано в [559], а величина I_0 в [559] названа информацией по Фитингофу. Вес по Фитингофу произвольного слова x с композицией $(m_1, \ldots, m_l)$ обозначается через $\Phi(x)$ и имеет вид (квазиэнтропия [561])

$$\Phi(x) = -\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{n} \log \frac{m_i}{n}. \tag{5.38}$$

В [559] показано, что для любого слова длины n

$$I_0(x) = n(\Phi(x) + 0(1)); \tag{5.39}$$

$$p(x) = 2^{-n(\Phi(x)+0(1))}. \tag{5.40}$$

Тогда из (5.39) следует другое определение для веса по Фитингофу (5.38)

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I_0(x). \tag{5.41}$$

Так как вес по Фитингофу определен для любого рационального стохастического вектора $(m_1/n, m_2/n, \ldots, m_k/n)$, $(m_i/n) \geqslant 0$ и $\sum_i (m_i/n) = 1$, то это определение продолжается по непрерывности на произвольный вещественный стохастический вектор $P = (p_1, \ldots, p_k)$ в виде

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i. \tag{5.42}$$

5.5.2. Выражение (5.42) называется энтропией Больцмана и согласно (5.41) является асимптотическим следствием информации по Хартли. Другое доказательство асимптотической эквивалентности меры Хартли и меры Больцмана дано в [30] и кратко рассмотрено ниже в п. 5.6.

Таким образом, справедливо соотношение между случайной энтропией $H(\xi)$ (5.31) и энтропией Больцмана

$$H_\xi = M[H(\xi)], \tag{5.43}$$

т. е. величина (5.42) является усредненной энтропией, которая играет основную роль в теории информации Шеннона [501].

5.6. Свойства безусловной и условной энтропии. Энтропийная устойчивость

5.6.1. Рассмотрим без доказательства некоторые свойства энтропии (5.42) и ее обобщения, которые будем использовать в дальнейшем.

Свойство 1. Средняя и случайная энтропия всегда неотрицательны.

Свойство 2. Энтропия (5.42) имеет максимальное значение, равное $\ln M$, когда $P(\xi)=1/M$.

Свойство 3. Совместная энтропия $H_{\xi\eta}$ распадается на сумму энтропий $H_{\xi\eta}=H_{\xi}+H_{\eta}$, если случайные величины ξ и η независимы.

По аналогии с (5.42) условная энтропия имеет вид

$$H_{\xi_k\ldots\xi_n|\xi_1\ldots\xi_{k-1}} = -\sum_{\xi_1\ldots\xi_n} p(\xi_1, \ldots, \xi_n)\log p(\xi_k, \ldots, \xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) =$$

$$= M[H(\xi_k, \ldots, \xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1})]. \tag{5.44}$$

Свойство 4. Для произвольного распределения $p(\xi)$ и $q(\xi)$ выполняется неравенство

$$\sum_{\xi} p(\xi)\log\frac{p(\xi)}{q(\xi)} \geqslant 0. \tag{5.45}$$

Свойство 5. Энтропия (5.44) обладает свойством иерархической аддитивности

$$H_{\xi_1,\ldots,\xi_n} = H_{\xi_1} + H_{\xi_2|\xi_1} + H_{\xi_3|\xi_1\xi_2} + \ldots + H_{\xi_n|\xi_1\ldots\xi_{n-1}}. \tag{5.46}$$

Свойство 6. Условная энтропия (5.44) связана с безусловной энтропией (5.42) следующим неравенством:

$$H_{\xi|\eta} \leqslant H_{\xi}. \tag{5.47}$$

Из (5.47) следует, что при добавлении условий условная энтропия не увеличивается.

Введенные определения энтропий и их свойств получили свое отражение в одной из фундаментальных теорем теории информации, которая формулируется следующим образом.

Теорема 5.2 [30]. *Все 2^n реализаций η можно разбить на два множества A_n и B_n так, что 1) суммарная вероятность множества A_n меньше ε : $p(A_n)\to 0$ при $n\to\infty$; 2) вероятности реализаций второго множества B_n становятся равновероятными в смысле*

$$\left|\frac{\ln p(\eta) - \ln p(\eta')}{\ln p(\eta)}\right| \to 0, \qquad \eta \in B_n, \quad \eta' \in B_n \tag{5.48}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\ln[1/p(\eta)]}{n} - H\right| < \varepsilon. \tag{5.49}$$

Из теоремы 5.2 следует, что все реализации, за исключением некоторой весьма маловероятной группы, имеют вероятности, заключенные между $a^{-n(H+\varepsilon)}$ и $a^{-n(H-\varepsilon)}$, где a — основание системы логарифмов.

Из (5.49) следует, что при $n\to\infty$, $\varepsilon\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}(H(\eta)/n)\to H_\eta,$$

т. е. получаем асимптотическое совпадение мер Хартли и Больцмана. Из изложенного следует, что если ξ_1 принимает одно из m значений, то имеется m^n различных реализаций процесса $\eta=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с независимыми значениями и только $M=a^{nH_{\xi^1}}$ реализаций, являющихся равновероятными, следует принимать во внимание. При $p=1/m$ $H_{\xi_1}=\ln m$ и доля $a^{nH_{\xi_1}}/m^n$ реализаций, которые следует рассматривать, неограниченно уменьшается при увеличении n. Следовательно, подавляющее большинство реализаций является несущественным и его можно не принимать во внимание. Этот факт является одним из центральных в теории кодирования и имеет существенное значение при построении алгоритмов обработки и сжатия больших массивов информации.

Пример 1. Предположим, что подлежащий кодированию текст является последовательностью букв, принадлежащих конечному алфавиту. Через m обозначим число имеющихся различных между собой символов. Данный текст будем рассматривать в виде простой цепи Маркова и предположим, что текст кодируется в тот же алфавит. Кодируя более кратко наиболее часто встречающиеся цепочки и оставляя более длинную кодировку для более редких цепочек, имеем возможность сжатия кодированного текста по сравнению с первоначальным. Возможные размеры сжатия и выбор оптимального для этой цели кода зависят от статистической структуры текста.

Каждая n-членная цепочка ξ символов входящего текста имеет определенную вероятность $p(\xi)$ и определенную длину $l(\xi)$ цепочки кодированного текста, в которую она переходит после кодирования. В [542] отношение $l(\xi)/n$ предложено рассматривать как «коэффициент сжатия» для данной n-членной цепочки ξ. Применив к этому отношению операцию математического ожидания, получим «среднее сжатие» для цепочек длины n

$$\mu_n=\left[\sum_{\xi} p(\xi)\, l(\xi)\right]\Big/n. \tag{5.50}$$

Величина $\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$ называется *коэффициентом сжатия* определенного текста при заданном коде и дает возможность измерять сжатие текста при фиксированном способе кодирования. Необходимо определить по доминируемой статистической структуре наименьшее значение коэффициента сжатия, которого можно достигнуть с помощью надлежащего кода. Ответ дает следующая теорема [542].

Теорема 5.3. *Если энтропия поступившего текста равна H, то нижняя грань коэффициента сжатия μ по всем возможным кодам равна $H/\log m$, где m — число различных между собой символов текста.*

Из теоремы 5.3 следут, что для определения нижней грани возможного сжатия текста посредством кодирования нет необходимости в детальном изучении его статистической структуры, а необходимо знать только его энтропию H и число различных входящих в него символов. Поскольку $\log m$ есть максимальное значение для H (свойство 2) при данном числе символов, то величину $H/\log m$ в [542] предложено называть «относительной энтропией» данного текста. Варианты сжатия процессов обработки информации рассмотрены в [561].

5.6.2. Отмеченный факт асимптотической эквивалентности мер Хартли и Больцмана тесно связан с понятием *энтропийной устойчивости*, которое формулируется следующим образом [30]: семейство случайных величин $\{\eta^n\}$ называется энтропийно устойчивым, если отношение $H(\eta^n)/H_{\eta^n}$ при $n\to\infty$ сходится по вероятности к единице

$$P\{|H(\eta^n)/H_{\eta^n}-1|\geqslant\varepsilon\}<b_n \tag{5.51}$$

при любом $n\geqslant N(\varepsilon, b)$, $\varepsilon>0$, $b>0$. В (5.51) предполагается, что $0<H_{\eta^n}<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} H_{\eta^n}\to\infty$.

Теорема 5.2 в терминах энтропийной устойчивости для асимптотической эквивалентности рассматриваемых мер может быть сформулирована в более общем виде.

Теорема 5.4 [30]. *Если семейство случайных величин $\{\eta^n\}$ является энтропийно устойчивым, то множество реализаций каждой случайной величины можно разбить на два подмножества A_n и B_n таким образом, что 1) суммарная вероятность реализаций подмножества $A_nP(A_n)\to0$ при $n\to\infty$; 2) реализации второго подмножества B_n становятся относительно равновероятными в смысле соотношения*

$$\left|\frac{\ln P(\eta)-\ln P(\eta')}{\ln P(\eta)}\right|\to0 \text{ при } n\to\infty,\ \eta\in B_n,\ \eta'\in B_n; \tag{5.52}$$

3) число M_n реализаций B_n связано с энтропией H_{η^n} соотношением

$$\lim_{n\to\infty}(\ln M_n/H_{\eta^n})\to1, \tag{5.53}$$

Из (5.53) следует асимптотическая эквивалентность рассматриваемых мер Хартли и Больцмана.

Пример 2. На практике свойство энтропийной устойчивости часто проверяют путем вычисления дисперсии $D[H(\eta^n)]$ случайной энтропии

$$D[H(\eta^n)]=M[H^2(\eta^n)]-H^2_{\eta^n}. \tag{5.54}$$

При предположении, что дисперсия (5.54) с ростом n растет не слишком быстро, из неравенства Чебышева следует энтропийная устойчивость в смысле (5.51).

В [30] доказаны следующие теоремы, относящиеся к рассматриваемому вопросу.

Теорема 5.5. *Если существует равный нулю предел*

$$\lim_{n\to\infty}\{D[H(\eta^n)]/H^2_{\eta^n}\}=0, \tag{5.55}$$

то семейство случайных величин $\{\eta^n\}$ *является энтропийно устойчивым.*

Теорема 5.6. *Если энтропия* H_{η^n} *неограниченно возрастает и существует ограниченный верхний предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{D[H(\eta^n)]}{H_{\eta^n}}<C, \tag{5.56}$$

то семейство случайных величин энтропийно устойчиво.

Теорема 5.7. *Если существуют конечные пределы (удельная энтропия и удельная дисперсия)*

$$H_1=\lim_{n\to\infty}(H_{\eta^n}/n); \qquad D_1=\lim_{n\to\infty}D[H(\eta^n)]/n \tag{5.57}$$

и $H_1\neq 0$, *то семейство случайных величин энтропийно устойчиво.*

В [30] был рассмотрен характеристический потенциал $\mu_0(\alpha)$ энтропии $H(\eta)$

$$\exp\{\mu_0(\alpha)\}=\sum_{\eta}e^{\alpha H(\eta)}p(\eta)=\sum_{\eta}p^{1-\alpha}(\eta). \tag{5.58}$$

В терминах (5.59) справедлива следующая *термодинамическая интерпретация* теоремы 5.4.

Теорема 5.8 [30]. *Пусть потенциал (5.58) определен и дифференцируем в отрезке* $s_1<\alpha<s_2$ ($s_1<0$; $s_2>0$) *и пусть уравнение*

$$d\mu_0(s)/d\alpha=(1+\varepsilon)H_\eta \qquad (\varepsilon>0) \tag{5.59}$$

имеет корень $s\in[0, s_2]$. *Тогда подмножество A реализаций* η, *определенное условием*

$$H(\eta)/H_\eta-1>\varepsilon, \tag{5.60}$$

имеет вероятность

$$p(A)\leqslant\exp\{-s\mu_0'(s)+\mu_0(s)\}. \tag{5.61}$$

Остальные реализации, составляющие дополнительное подмножество B, имеют вероятности, связанные соотношением

$$\left|\frac{\ln p(\eta)-p(\eta')}{\ln p(\eta)}\right|<\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad (\eta,\ \eta'\in B); \tag{5.62}$$

причем число M этих реализаций удовлетворяет неравенству

$$1-\varepsilon+\frac{1}{H_\eta}\ln[1-\exp\{-s\mu_0'(s)+\mu_0(s)\}]<\frac{\ln M}{H_\eta}<1+\varepsilon. \tag{5.63}$$

Из (5.59) следует, что при $\varepsilon=0$, $d\mu(0)/d\alpha=H_\eta$ и существует нулевой корень $s=0$. При малых ε производная $\mu_0'(s)=d\mu_0(s)/d\alpha$ допускает разложение в ряд Маклорена, из которого следует, что корень уравнения (5.59) имеет вид

$$s=\varepsilon H_\eta/\mu_0''(0)+0(s^3). \tag{5.64}$$

Если разложить в ряд выражение, стоящее в экспоненте (5.61), то с учетом (5.64) получим

$$p(A) \leqslant \exp\{-\varepsilon^2 H_\eta^2/2\mu_0''(0)\}(1+0(\varepsilon^3)). \tag{5.65}$$

В силу общих свойств характеристического потенциала $\mu_0''(0) = D[H(\eta)] > 0$ и из (5.65) следует

$$p(A) \leqslant \exp\{-\varepsilon^2 H_\eta^2/2D[H(\eta)]\}(1+0(\varepsilon^3)). \tag{5.66}$$

Из (5.66) нетрудно получить, в частности, условия типа (5.55). На основе приведенных результатов могут быть получены такие понятия, как информационная устойчивость, каноническая устойчивость и др., которые рассмотрены в [543, 544, 30].

5.7. Меры количества информации Котельникова и Фано

Пусть x_k, y_i — элементы ансамблей X и Y соответственно; $p(x_k)$ — вероятность элемента $x_k \in X$; $p(x_k|y_i)$ — условная вероятность элемента $x_k \in X$ при условии $y_i \in Y$. Мера энтропии H_K по Котельникову [562] определяется следующим выражением:

$$H_K(p_k) = 1 - \max_k p_k. \tag{5.67}$$

Энтропия (5.67) удовлетворяет следующим аксиомам: 1) симметричная непрерывная выпуклая функция переменных от p_k; 2) $\min\limits_{p_k} H_K(p_k) = H_K(p_k')$, $p_k = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; 3) $\max\limits_{p_k} H_K(p_k) = H_K(p_k'')$, $p_k'' = (1/k, \ldots, 1/k)$.

Аксиома выпуклости энтропии $H_K(p_k)$ накладывает условие положительной определенности меры (5.67).

Соответствующая мера количества информации Котельникова имеет вид

$$J_K(p_k, p(x_k|y_i)) = \sum_X \max_k p_k p(x_k|y_i) - \max_k p_k. \tag{5.68}$$

Таким образом, под мерой информации Котельникова понимается средняя разность апостериорной и априорной максимальных вероятностей случайных событий. В качестве последних могут быть, например, вероятности правильного распознавания некоторой ситуации.

Р. Фано в [547] предложил меру I количества информации в y_i относительно x_k в виде

$$I(x_k, y_i) = \log[p(x_k, y_i)/p(x_k)]. \tag{5.68}$$

Выражение (5.68) показывает, что информацию доставляют те сведения, которые меняют вероятность элемента $x_k \in X$.

5.8. Энтропия непрерывных случайных величин. Меры информационного расхождения и различающей информации

5.8.1. Обобщение выражения (5.42) на непрерывный случай имеет определенные особенности [543, 544, 30]. Формальное обобщение (5.42) в виде

$$H_\xi = -\int p(\xi)\log p(\xi)d\xi \tag{5.69}$$

является неинвариантной величиной по отношению к невырожденному преобразованию типа $\eta = f(\xi)$. Величина (5.42) в отличии от (5.69) является инвариантной по отношению к указанному преобразованию.

В [30] вместо (5.69) рассмотрена величина, определяющая энтропию H_ξ, в виде

$$H_\xi = -\int_X p(x)\ln\frac{p(\xi)}{\nu(\xi)}d\xi, \tag{5.70}$$

где $\nu(x)$ — вспомогательная мера плотности распределения вероятностей, которая предполагается заданной и обладает следующим свойством:

$$\int_X \nu(\xi)\,d\xi = N, \tag{5.71}$$

где N — величина конечная. Вводя нормированную плотность вида

$$q(\xi) = \nu(\xi)/N, \tag{5.72}$$

получим из (5.70)

$$H_\xi = \ln N - \int_X p(\xi)\ln\frac{p(\xi)}{q(\xi)}d\xi. \tag{5.73}$$

Величина (5.73) допускает возможные обобщения на комбинированные случаи (когда непрерывная случайная величина имеет концентрации в отдельных изолированных точках и т. п.) и на более абстрактные модели [543, 544]. Выражение

$$H_\xi^{P|Q} = \int p(\xi)\ln\frac{p(\xi)}{q(\xi)}d\xi \tag{5.74}$$

является неотрицательным и определяет энтропию распределения вероятности $p(\xi)$ относительно распределения вероятности $q(\xi)$. Из (5.70) как частный случай следует (5.69) при равномерной единичной плотности $\nu_0(\xi) = d\nu/d\xi = 1$.

Энтропия (5.74) используется в математической статистике как показатель степени различия мер P и Q и называется мерой Кульбака. При несовпадении мер P и Q величина (5.74) положительна, а при $P(\cdot) = Q(\cdot)$ она равна нулю.

В более общем случае так называемая *обобщенная энтропия Больцмана — Гиббса* определяется следующим образом [30]: пусть существует на заданном измеримом пространстве и абсолютно непрерывна производная Радона — Никодима $d\nu/d\mu$ вероятностной меры ν по соответствующей мере μ; тогда обобщенная мера энтропии Больцмана — Гиббса имеет вид

$$H \equiv -\int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu. \tag{5.75}$$

Свойства меры (5.75) и ей аналогичных (типа меры энтропии Сегала) рассмотрены более подробно в работах, приведенных в [735—738].

Пример 1. Отмеченными свойствами обладает также другая мера различия

$$s(P, Q) = \inf \int_P^Q ds; \tag{5.76}$$

$$ds^2 = 2H^{P|P\pm\delta P} = 2\int \ln \frac{P(d\zeta)}{P(d\zeta) \pm \delta P(d\zeta)} P(d\zeta). \tag{5.77}$$

Мера (5.76) является «расстоянием» между P и Q. Выражение (5.77) может быть записано в эквивалентном виде [30] (разлагая в ряд функцию $\ln(1\pm\delta P/P)$ по $\delta P/P$)

$$ds^2 = \int [\delta \ln P(d\zeta)]^2 P(d\zeta). \tag{5.78}$$

При сближении P и Q энтропии $H^{P|Q}$, $H^{Q|P}$ и величина $^1/_2 s^2(P, Q)$ совпадают.

Теорема 5.9 [30]. *Квадрат «расстояния» (5.76) ограничен сверху суммой энтропий*

$$s^2(P, Q) \leqslant H^{P|Q} + H^{Q|P}. \tag{5.79}$$

Энтропию (5.74) можно интерпретировать как дефект энтропии (нехватка до максимального значения $\ln N$). Аналогичным образом определяется условная энтропия непрерывных случайных величин.

5.8.2. Рассмотрим некоторые особенности и следствия информационных мер типа (5.74)—(5.75) [549].

Информационные меры

$$I(2:1) = \int p_2(x) \log \frac{p_2(x)}{p_1(x)} d\lambda(x); \tag{5.80}$$

$$I(1:2) = \int p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} d\lambda(x) \tag{5.81}$$

называются направленными расхождениями.

Выражение

$$J(1, 2) = I(1:2) + I(2:1) = \int (p_1(x) - p_2(x)) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} d\lambda(x) \tag{5.82}$$

было названо С. Кульбаком [549] расхождением.

Выражения (5.80), (5.81) являются несимметричными функ-

циями и в связи с этим получили соответствующее наименование. Мера (5.82) обладает всеми свойствами метрики (расстояния), кроме неравенства треугольника [30].

Меры (5.80)—(5.82) нашли свое применение в задачах математической статистики, в частности, при распознавании сложных гипотез [38, 518, 519, 563—568].

Пример 2. Предположим, что задано выборочное евклидово пространство двух измерений с элементами $X=(x, y)$ и имеются две гипотезы: H_1—x и y являются зависимыми переменными с совместной плотностью распределения вероятностей $p(x, y)$; H_2—x, y являются независимыми переменными с соответствующими плотностями распределения вероятностей $p_1(x)$, $p_2(y)$.

В данном случае выражение (5.81) принимает следующий вид:

$$I(1:2)=\int\int p(x, y)\log\frac{p(x, y)}{p_1(x)\,p_2(y)}\,dx\,dy. \tag{5.83}$$

Выражение (5.83) определяют как среднюю информацию в x относительно y или наоборот и характеризует меру информационной связи между x и y (по Шеннону). Более подробно свойства меры (5.83) рассмотрены в [543, 544].

Если гипотеза H_1 задает двумерное нормальное распределение с плотностью

$$p(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2\rho\,\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}, \tag{5.84}$$

где ρ — коэффициент корреляции случайных величин x и y, а гипотеза H_2 задает произведение частных нормальных плотностей распределения вероятностей

$$p_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\},\quad p_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}, \tag{5.85}$$

то из (5.83) с учетом (5.84), (5.85) следует

$$I(1:2)=-1/2\log(1-\rho^2). \tag{5.86}$$

Таким образом, величина $I(1:2)$ зависит только от коэффициента корреляции ρ.

Для рассматриваемого случая расхождение $J(1, 2)$ по (5.82) принимает вид

$$J(1, 2)=\int\int(p(x, y)-p_1(x)\,p_2(y))\log\frac{p(x, y)}{p_1(x)\,p_2(y)}\,dx\,dy=\frac{\rho^2}{1-\rho^2}. \tag{5.87}$$

Пример 3. Предположим теперь, что

$$p(x, y)=p_1(x)\,p_2(y/x)=p_1(x)\,p_2(y-x)=p_1(x)\,p_2(\xi). \tag{5.88}$$

В этом случае x можно интерпретировать как сигнал с уровнем мощности S на входе канала связи, y — выход канала связи и равен $y=x+\xi$, ξ — аддитивный независимый шум в канале связи с уровнем мощности N. Мера (5.83) характеризует свойства канала связи. Плотность двумерного нормаль-

ного распределения $p(x, y)$ с учетом (5.88) может быть записана в виде

$$p(x, y) = \frac{1}{2\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\} \frac{1}{2\sigma_y \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left(y - \frac{\rho\sigma_y}{\sigma_x} x\right)^2\right\};$$

$$\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1; \qquad \rho^2 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = \frac{S}{S+N}, \tag{5.89}$$

где $S = E(x^2)$ —средняя мощность сигнала на входе канала связи.

Из (5.83), (5.84) с учетом (5.88)—(5.89) получим

$$I(1:2) = -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{S}{S+N}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{S}{N}\right), \tag{5.90}$$

$$J(1, 2) = \frac{S/(S+N)}{1 - [S/(S+N)]} = \frac{S}{N}. \tag{5.91}$$

В теории информации максимальная величина выражения (5.90) интерпретируется как пропускная способность канала, выражение (5.91) характеризует отношение полезного сигнала к шуму и часто используется для определения характеристики канала связи [530, 548, 554].

Пример 4. В дискретном варианте меры энтропии Шеннона и Кульбака имеют соответственно вид

$$H_{\text{Ш}}(p_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k = \langle \ln p_k^{-1} \rangle;$$

$$H_{\text{К}}(p_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln [p_k/(1-p_k)] = H_{\text{Ш}} + \langle \ln (1-p_k) \rangle.$$

Соответственно в данном варианте меры количества информации Шеннона и Кульбака могут быть выражены через дискретный вариант направленного расхождения $I(p_1 : p_2) = \sum_X p_1(x) \ln [p_1(x)/p_2(x)]$ в следующем виде [562]:

$$I_{\text{Ш}}(p_k, \psi_k) = \langle I(p_k : \psi_k) \rangle, \qquad \psi_k = \sum_{k=1}^{n} p_k p_k(x_k \mid y_i) = \langle p_k(x \mid y) \rangle,$$

$$I_{\text{К}}(p_k, \varphi_k) = \langle I(p_k : \varphi_k) \rangle,$$

где

$$\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} p_k p(x_k \mid y) - p_k p(x_k \mid y)/(1-p_k)$$

— вероятность того, что признак x принимает значение x_i при условии, что $y \neq y_i \in Y$. Отметим, что меры Котельникова и Шеннона ограничены сверху, а мера Кульбака ограничена только в случае, когда вероятностные меры $p_k(x_k \mid y_i)$ абсолютно непрерывны относительно друг друга.

Пример 5. Допустим, что в (5.83) случайная величина y является параметром $\theta\in\Theta$ (Θ — заданное пространство), $p(x, \theta)$ — совместная плотность распределения вероятностей x и θ, $p_3(x|\theta)$ — условная плотность распределения x при фиксированном θ, $p_1(x) = \int\limits_{\Theta} p_2(\theta)\, p_3(x|\theta)\, d\theta$.

При априорно известной мере $p_2(\theta)$ величина

$$I(1:2) = \int\int p(x, \theta) \log \frac{p(x, \theta)}{p_1(x)\, p_2(\theta)}\, dx\, d\theta \tag{5.92}$$

определяет количество информации в эксперименте $\mathscr{E} = (\theta, p_3(x|\theta))$ по Линдли [569, 570].

5.8.3. Рассмотрим кратко понятие различающей информации $I(\theta_1 \to \theta_2; x)$, которое имеет вид [572]

$$I(\theta_1 \to \theta_2; x) = \ln[p(x|\theta_1)/p(x|\theta_2)], \tag{5.93}$$

где $p(x|\theta_i)$ $(i=1, 2)$ — вероятность гипотезы θ_i при наблюдении $x\in X$. Мера (5.93) определяет количество информации для различения в пользу гипотезы θ_1 против гипотезы θ_2 в наблюдении x.

Мера (5.93) связана с мерой Фано (5.68) следующим образом:

$$I(\theta_1 \to \theta_2; x) = I(\theta_1, x) - I(\theta_2, x). \tag{5.94}$$

Проверим соотношение (5.94). По определению количество информации (5.68) по Фано дает возможность записать правую часть (5.94) с учетом теоремы Байеса в виде

$$I(\theta_1, x) - I(\theta_2, x) \equiv \ln \frac{p(\theta_1|x)}{p(\theta_1)} - \ln \frac{p(\theta_2|x)}{p(\theta_2)} = \ln \frac{p(x|\theta_1)}{p(x|\theta_2)}. \tag{5.95}$$

Выражение (5.95) совпадает с (5.93).

Если применить оператор усреднения к количеству различающей информации (5.93) по ансамблю $(X, p(x, \theta_i))$, $i=1, 2$, то получим меру Кульбака. В частности,

$$M_{p(\cdot|\theta_1)}[I(\theta_1 \to \theta_2; x)] = I(1:2),\ M_{p(\cdot|\theta_2)}[I(\theta_2 \to \theta_1; x)] = I(2:1). \tag{5.96}$$

Тогда расхождение (5.82) с учетом (5.96) примет вид

$$J(1, 2) = M_{p(\cdot|\theta_1)}[I(\theta_1 \to \theta_2; x)] + M_{p(\cdot|\theta_2)}[I(\theta_2 \to \theta_1; x)]. \tag{5.97}$$

Приведенные примеры и выражения устанавливают взаимосвязь мер количества информации Фано, различающей информации и направленных расхождений по Кульбаку, энтропии и количества информации Котельникова и Шеннона

5.9. Мера и некоторые экстремальные свойства количества информации Фишера

5.9.1. Предположим, что θ_1 — векторный параметр, связанный с θ_2 соотношением вида $\theta_2=\theta_1+\Delta\theta$. В этом случае $p(x|\theta_1)$ и $p_2(x|\theta_2)=p(x|\theta_1+\Delta\theta)$ принадлежат одному семейству с близкими значениями на множестве своих параметров. Допустим, что размерность пространства параметров равна n. Множество значений параметров считается открытым и выпуклым.

При дополнительных условиях регулярности $p(x|\theta)$ [549] имеют место следующие соотношения:

$$M_{p(\cdot|\theta_1)}[I(\theta_1 \to \theta_1+\Delta\theta;\ \bar{x}] = I(1:2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}\Delta\theta_i\,\Delta\theta_j; \qquad (5.98)$$

$$\Phi = \|\varphi_{ij}\|,\ J(1,2) = J(\theta_1,\ \theta_1+\Delta\theta) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}\Delta\theta_i\,\Delta\theta_j, \qquad (5.99)$$

где Φ — информационная матрица Фишера,

$$\varphi_{ij} = \int_X p(x|\theta_1)\left(\frac{1}{p(x|\theta_1)}\frac{\partial p(x|\theta_1)}{\partial\theta_i}\right)\left(\frac{1}{p(x|\theta_1)}\frac{\partial p(x|\theta_1)}{\partial\theta_j}\right)dx. \qquad (5.100)$$

При $n=1$ (скалярные параметры) имеем

$$M_{p(\cdot|\theta_1)}[I(\theta_1 \to \theta_1+\Delta\theta;\ x)] = M_{p(\cdot|\theta_1)}[(p'_{\theta_1}/p_{\theta_1})^2] \doteq J(\theta_1). \qquad (5.101)$$

Равенство (5.101) в развернутом виде

$$J(\theta_1) = \int_\theta p(x|\theta_1)\left(\frac{p'(x|\theta_1)}{p(x|\theta_1)}\right)^2 dx \qquad (5.102)$$

называется количеством информации по Фишеру [549, 573]. Доказательство соотношения (5.98) можно найти в [549].

Соотношения (5.98)—(5.101) показывают взаимосвязь мер различающей информации, направленного расхождения и количества информации по Фишеру.

Рассмотрим некоторые полезные для информационной теории управления оценки меры количества информации по Фишеру.

Пример 1. Предположим, что функция плотности распределения вероятностей $p(y|x)$ является гауссовой со средним значением $m_1(x)$ и дисперсией $m_2(x)\neq 0$. В этих условиях выражение (5.100) имеет вид [574]

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}_2(x)}{m_2(x)}\right)^2 + \frac{[\dot{m}_1(x)]^2}{m_2(x)}. \qquad (5.103)$$

Если $m_1(x)$ — вектор средних значений, зависящий от x, а m_2 — невырожденная ковариационная матрица, не зависящая от параметра, то

$$p(y|x) = (2\pi)^{-l/2}|m_2|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-m_1(x))^T m_2^{-1}(y-m_1(x))\right\} \qquad (5.104)$$

и из (5.103) следует

$$J(x) = \left(\frac{\partial m_1(x)}{\partial x}\right)^T m_2^{-1} \frac{\partial m_1(x)}{\partial x}. \qquad (5.105)$$

Для скалярных параметров $m_2 = \sigma_x^2$ и из (5.105)

$$J(x) = 1/\sigma_x^2. \qquad (5.106)$$

Допустим, что $F(x)$ — функция распределения вероятностей нормальной случайной величины с параметрами (0, 1). Тогда [575]

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F'(x)]^2}{F(x)}\, dx \approx 0{,}904.$$

Следует отметить одно важное обстоятельство для выражения (5.106). Дело в том, что в классе всех распределений, зависящих от параметра сдвига (при дополнительных условиях гладкости) и имеющих заданную дисперсию, минимум информационного количества Фишера достигается на гауссовском распределении вероятностей случайных величин. Из этого следует, что оценка параметра сдвига ухудшается для выборок из гауссовской совокупности. В свою очередь гамма-распределение выделяется по аналогичному признаку среди всех распределений на R_+^1, зависящих от параметра масштаба [576].

5.9.2. Обсудим кратко некоторые экстремальные свойства информационного количества Фишера. Допустим, что задано семейство распределений на R^1, зависящих от параметра сдвига $\theta \in R^1$, по мере Лебега плотностями $p(x-\theta)$. Предполагается, что $p(x)$ непрерывно дифференцируема; $|x|p(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ и $\sigma^2 = \int x^2 p(x)\, dx < \infty$. Тогда, согласно данному определению, информационное количество Фишера для заданного семейства плотностей $p(x-\theta)$ имеет вид

$$J_p(\theta) = \int \left(\frac{\partial \log p(x-\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p(x-\theta)\, dx = \int \left(\frac{p'}{p}\right)^2 p(x)\, dx = J_p(0) = J_p.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5.10 [576]. *В классе всех плотностей с заданной дисперсией* σ^2, *удовлетворяющих приведенным условиям,* $\min J_p$ *достигается на гауссовском распределении.*

Пусть теперь на полупрямой R_+^1 задано семейство распределений по мере Лебега плотностями $p(x/\sigma)/\sigma$, зависящих от параметра масштаба $\sigma \in R_+^1$. Допустим теперь, что $p(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям к приведенным ранее вида $x^2 p(x) \to 0$ при $x \to \infty$; $xp(x) \to 0$ при $x \to 0$.

В этом случае информационное количество Фишера для семейства $p(x/\sigma)/\sigma$ имеет вид

$$I_p(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} J_p.$$

Для рассматриваемого случая справедлива следующая теорема.

Теорема 5.11 [576]. *В классе всех плотностей с заданными моментами* $\alpha_i = \int_0^\infty x^i p(x)\,dx$, $i=1, 2$, *удовлетворяющих приведенным условиям,* $\min J_p$ *достигается на гамма-распределении.*

Приведенные теоремы являются прототипами вариационных задач теории информации [30].

5.9.3. Приведенные оценки полезны тем, что согласно [577] произвольную плотность распределения вероятностей можно аппроксимировать суммой гауссовых плотностей с заданной точностью. Если принять для неизвестной плотности такую аппроксимацию, то можно получить апостериорную плотность в виде гауссовой суммы с большим числом слагаемых, для которых будут выполняться приведенные соотношения. Одновременно можно получить и оценку точности аппроксимации на основе неравенства Рао—Крамера и его обобщений, основанных на количестве информации Фишера [573, 574, 578]. Количество информации Фишера можно представить, следовательно, в терминах моментов распределений.

Пример 2. Предположим, что

$$x_i = \theta + \xi_i,$$

где ξ_i — независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(x)$, для которой существуют моменты

$$\mu_{2k} = \int x^{2k}\,dF(x) < \infty.$$

В этом случае можно показать [579], что количество информации Фишера определяется как предел

$$J(x) = \lim_{k\to\infty} J_k(x), \tag{5.107}$$

где $J_k = \det C_k / \det C_k^*$; $C_k = (C_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,k \\ j=1,2,\ldots,k}}$, $C_{11} = \mu_2$; $C_{1i} = C_{i1} = \mu_{i+1} - i\mu_{i-1}\mu_2$;

$$C_{ij} = \mu_{j+1} - \mu_i\mu_j - i\mu_{i-1}\mu_{j+1} - j\mu_{i+1}\mu_{j-1} + ij\mu_{j-1}\mu_{i-1}\mu_2; \tag{5.108}$$

C_k^* — алгебраическое дополнение C_{11}. Если $F(x)$ имеет более чем k точек роста, то знаменатель в (5.108) заведомо отличен от нуля.

Обобщение (5.107), (5.108) дано в [563], где показано, что если функции $\mu_i = \int x^i dF_\theta(x)$, $i=1, 2, \ldots, 2k$, дифференцируемы ($\mu_0 = 1$), а матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1(\theta) & \ldots & \mu_k(\theta) \\ \mu_1(\theta) & \mu_2(\theta) & \ldots & \mu_{k+1}(\theta) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_k(\theta) & \mu_{k+1}(\theta) & \ldots & \mu_{2k}(\theta) \end{pmatrix} \tag{5.109}$$

неособенная при всех $\theta \in \Theta$, то информация, несомая линейными функциями

от наблюдения, равна

$$J_1(\theta) = [\dot{\mu}_1(\theta)]^2/[\mu_2(\theta) - \mu_1(\theta)^2]. \tag{5.110}$$

В более общем случае для конечного пространства $\mathscr{H}$

$$J(\theta;\ \mathscr{H}) = I_k(\theta) = -|\Lambda(\theta)|/\Lambda_{11}(\theta), \tag{5.111}$$

где

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\mu}_1(\theta) & \dots & \dot{\mu}_k(\theta) \\ 0 & 1 & \mu_1(\theta) & \dots & \mu_k(\theta) \\ \dot{\mu}_1(\theta) & \mu_1(\theta) & \mu_2(\theta) & \dots & \mu_{k+1}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{\mu}_k(\theta) & \mu_k(\theta) & \mu_{k+1}(\theta) & \dots & \mu_{2k}(\theta) \end{pmatrix}. \tag{5.112}$$

Из (5.111) как частный случай имеем (5.110). Если $\mathscr{H} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, причем вероятности $p_{ij}(\theta) = (\varphi_i,\ \varphi_j)_\theta = 0$, $i \neq j$; $\theta \in \Theta$, $p_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $\sum_{i=1}^{m} p_{ii}(\theta) = 1$, то при $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m = 1$ имеем $p_i(\theta) = p_{ii}(\theta)$ и

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{p}_1(\theta) & \dots & \dot{p}_m(\theta) \\ \dot{p}_1(\theta) & p_1(\theta) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{p}_m(\theta) & 0 & \dots & p_m(\theta) \end{pmatrix}. \tag{5.113}$$

Тогда

$$J(\mathscr{H}, \theta) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\dot{p}_j(\theta)}{p_j(\theta)} \varphi_j, \qquad I(\theta, \mathscr{H}) = \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\dot{p}_j(\theta)}{p_j(\theta)}\right]^2 p_j(\theta) \tag{5.114}$$

и совпадает с количеством информации по Фишеру, содержащейся в наблюдении, имеющем конечное число исходов с вероятностями $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, ..., $p_m(\theta)$ [563].

5.10. Свойства меры количества информации Фишера и W-дивергенция

5.10.1. Допустим, что задана статистическая структура $[\Omega, \mathfrak{A}; dP_\theta/d\nu = p_\theta, \theta \in \Theta]$, которая доминируется мерой ν; Θ является подпространством R^n. Зададим на рассматриваемой структуре $(\Omega, \mathfrak{A}, p_\theta)$ со значениями в $(R^n, \mathscr{B}_{R^n})$ случайный вектор V_θ следующего вида:

$$V_\theta = \operatorname{grad}_\theta \log p_\theta(\omega),\ \forall \omega \in \Omega.$$

Если вектор $V_\theta(\omega)$ определен для всех θ, центрирован и квадрат его нормы интегрируем, то количество информации Фишера совпадает [555] для всех θ с ковариационной матрицей для вектора V_θ. Следует отметить, что значение информации Фишера не зависит от выбора меры ν. Действительно,

$$\frac{dP_\theta}{d\nu'} = \frac{dP_\theta}{d\nu}\frac{d\nu}{d\nu'},$$

таким образом, вектор V_θ одинаков для мер ν и ν'.

Рассматриваемые варианты информационного количества Фишера обладают следующими свойствами. Предположим, что заданы два регулярных статистических эксперимента $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ с информационными количествами Фишера $J(\theta; \mathscr{E}_1)$ и $J(\theta; \mathscr{E}_2)$ и доминируемыми статистическими структурами соответственно. Тогда для эксперимента $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ имеем

$$J(\theta; \mathscr{E}) = J(\theta; \mathscr{E}_1) + J(\theta; \mathscr{E}_2). \tag{5.115}$$

Из (5.115) следует, что если $\mathscr{E}^{(n)}$ — эксперимент с повторной выборкой $X_1, \ldots, X_n$ объема n, а эксперимент $\mathscr{E}_t$ регулярен и имеет информацию $J(\theta)$, то

$$J(\theta; \mathscr{E}^{(n)}) = nJ(\theta). \tag{5.116}$$

Если эксперимент $\widetilde{\mathscr{E}}$ есть часть эксперимента $\mathscr{E}$ при введенных обозначениях, то $\widetilde{\mathscr{E}}$ имеет конечную информацию $J(\theta; \widetilde{\mathscr{E}})$ во всех точках [555] $\theta \in \Theta$:

$$J(\theta; \widetilde{\mathscr{E}}) \leqslant J(\theta; \mathscr{E}). \tag{5.117}$$

Предположим теперь, что заданы две статистики X и Y, такие, что существует условная плотность $p_\theta(x|y)$ статистики X относительно Y по мере, не зависящей ни от θ, ни от y. Пусть

$$V_\theta^{X|Y}(\omega) = \operatorname{grad}_\theta \log p_\theta(x|y).$$

Поскольку $p_\theta(x, y) = p_\theta(y)\, p_\theta(x|y)$, то

$$V_\theta^{X,Y} = V_\theta^Y + V_\theta^{X|Y}.$$

Нетрудно проверить, что из условия

$$\int p_\theta(x|y)\, d\nu_X(x) = 1, \forall y$$

при достаточно общих предположениях следует, что

$$M_{p_\theta}[V_\theta^{X|Y} | Y] = 0.$$

Отсюда следует, что случайные векторы V_θ^Y и V некоррелированы. Рассмотрим разность количества информации Фишера $J(X, Y)$ и $J(Y)$, которая с учетом приведенных выражений имеет вид

$$J_{(X,Y)} - J_{(Y)} = J_{(X|Y)} = M_{p_\theta}[V_\theta^{X|Y} V_\theta^{(X|Y)T}],$$

где T — знак транспонирования.

Таким образом, рассматриваемое соотношение для разности можно интерпретировать как условную информацию Фишера.

Пример 1. Предположим, что случайные величины $\zeta^n = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и θ принимают свои значения из соответствующих пространств X^n и Θ с совместным распределением

$$p(\zeta^n, \theta) = \int_{\mathscr{B}} \pi(u)\, du \int_{\mathscr{A}^n} p(x^n | u)\, \nu^n(dx^n), \tag{5.118}$$

где $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}^n$ — измеримые пространства; $\pi(u)$ — плотность распределения θ; $p(x^n|u)$ — условная плотность распределения ζ^n по мере ν^n при $\theta=u$. Допустим, что $p(x^n|u)$, $n=1, 2, \ldots$ абсолютно непрерывна по $u\in\Theta$ и для ν^n-почти всех значений x^n определена производная $p'(x^n|u)=\partial p(x^n|u)/\partial u$. В этом случае информационное количество Фишера

$$J_{\zeta^n}(u)=\int [p'(x^n|u)/p(x^n|u)]^2\, p(x^n|u)\,\nu^n(dx^n) \tag{5.119}$$

$$J_\theta(u)=\int [\pi'(u)/\pi(u)]^2\,\pi(u)\,du. \tag{5.120}$$

Для случая независимых и одинаково распределенных наблюдений с абсолютно непрерывной плотностью распределения согласно (5.116) имеем $J_{\zeta^n}(u)=nJ_{\zeta_1}(u)$. В более общем случае [543, 580]

$$J_{\zeta^n}(u)=\varphi(u)\,[J(u)+r(n,u)],\qquad u\in\Theta, \tag{5.121}$$

где $J(u)\geqslant 0$ и $r(n, u)$ — измеримые по u функции, и

$$\varphi(n)\to\infty;\qquad \int \pi(u)\,|r(n,u)|\,du\to 0,\ n\to\infty. \tag{5.122}$$

Обозначим через $p_{\theta+\xi}(z)$ — плотность распределения суммы $\theta+\xi$; $p_{\theta|\theta+\xi}(z|u)$ — условную плотность распределения θ при условии $\theta+\xi=z$; $J_{\theta|\theta+\xi=z}$ — условную информацию Фишера. Предположим, что ξ — гауссовская случайная величина с нормальным законом распределения и параметрами $(0, \sigma^2)$. В этом случае имеет место следующее неравенство [530, 543]:

$$\int p_{\theta+\xi}(z)\,J_{\theta|\theta+\xi=z}\,dz\leqslant J_\theta+1/\sigma^2. \tag{5.123}$$

Согласно (5.106) в этом случае $J_\xi=1/\sigma^2$ и, следуя теореме 5.10, последнее неравенство можно записать в виде

$$\int p_{\theta+\xi}(z)\,J_{\theta|\theta+\xi=z}\,dz\leqslant J_\theta+J_\xi.$$

В частности, имеет место следующее соотношение:

$$\int\left[\left(\frac{p'(u,x)^2}{p(u,x)}\right)\nu(dx)\right]du=J_\theta+\int\pi(u)J_\xi(u)\,du+$$
$$+2\int\pi'(u)\,du\int p'(u|x)\,\nu(dx). \tag{5.124}$$

Если функция $J_\xi(u)$ непрерывна по u, то, согласно [530],

$$\int p'(x|u)\,\nu(dx)=0.$$

Пример 2. Предположим, что эксперимент $\mathscr{E}^{(n)}$ порожден независимыми наблюдениями $X_1, \ldots, X_n$, каждое из которых принимает значения 0, 1 с вероятностями $1-\theta$, θ, $0\leqslant\theta\leqslant 1$ соответственно. Эксперименту $\mathscr{E}_1$ соответствует X_i. Плотность распределения вероятностей $p(x;\theta)$ величин X_i относительно меры ν с единичными нагрузками в точках 0 и 1 имеет вид $p(x;\theta)=(1-\theta)^{1-x}\theta^x$. Тогда [576]

$$J(\theta)=\int_{\mathscr{H}}\frac{|p'(x;\theta)|^2}{p(x;\theta)}\,d\nu=\frac{|p'(0;\theta)|^2}{p(0;\theta)}+\frac{|p'(1;\theta)|^2}{p(1;\theta)}=\frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$

Согласно приведенному следствию

$$J(\theta; \mathscr{E}^{(n)}) = \frac{n}{\theta(1-\theta)}.$$

Предположим теперь, что статистика $n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ порождает эксперимент $\widetilde{\mathscr{E}}$ и имеет биномиальное распределение вероятностей

$$p_\theta\{n\overline{X} = k\} = p(k; \theta) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}.$$

В этом случае

$$J(\theta; \mathscr{E}^{(n)}) = M_\theta\left[\frac{|p'_\theta(n\overline{X}; \theta)|^2}{p_\theta(n\overline{X}; \theta)}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{(k\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k} - (n-k)\theta^k(1-\theta)^{n-k-1})^2}{\theta^k(1-\theta)^{n-k}} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

и совпадает с предыдущим выражением, т. е. $J(\theta; \widetilde{\mathscr{E}}) = J(\theta; \mathscr{E}^{(n)})$. Таким образом, $\overline{X}$ — достаточная статистика.

Предположим теперь, что возможными значениями X_i служат векторы $e_0 = (0, \ldots, 0)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1)$ из R^{n+1}. При этом значение e_j принимается с вероятностью θ_j, $\sum \theta_j = 1$, $\theta_j > 0$, т. е. $dp_\theta/d\nu = p(x; \theta) = \theta_j$, если $x = e_j$. В данном случае мера ν на $\{e_0, e_1, \ldots, e_k\}$ приписывает единичную нагрузку каждой точке e_j. Параметры $\theta_1, \ldots, \theta_k$ считаются неизвестными. Тогда [530]

$$J_{ij}(\Theta) = n\int_{\mathscr{X}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}p\frac{\partial}{\partial\theta_j}p\right)\Big/p\right]d\nu = \begin{cases} n/\theta_0, & i \neq j; \\ n/\theta_0 + n/\theta_j, & i = j. \end{cases}$$

Пример 3. Предположим, что τ — конечный марковский момент относительно системы $\{X^1, X^2, \ldots\}$, которая порождена множествами вида $\{\zeta^n\}$. В этом случае τ — целочисленная случайная величина и для любого $n = 1, 2, \ldots$ событие $\{\tau \leqslant n\} \in X^n$. Допустим, что для условной плотности распределения $p(x_n | x^{n-1}, u) = p(x^n | u)/p(x^{n-1} | u)$ $(p(x_1 | x^0, u) = p(x^1 | u)$ выполняются принятые условия: она абсолютно непрерывна по $u \in \Theta$ и для ν-почти всех значений $x^n \in X^n$ существует производная $p'(x_n | x^{n-1}, u) = \partial p(x_n | x^{n-1}, u)/\partial u$, такая, что $M_u[(p'(\zeta_n | \zeta^{n-1}, u)/p(\zeta_n | \zeta^{n-1}, u)) | \zeta^{n-1} = x^{n-1}] = 0$. Согласно [581, лемма 2.2], в рассматриваемом случае

$$J_{\zeta^\tau}(u) = M_u[(p'(\zeta^\tau | u)/p(\zeta^\tau | u))^2] = M_u\left[\sum_{k=1}^{\tau} J_k(\zeta^{k-1}, u)\right]; \tag{5.125}$$

$$J_k(\zeta^{k-1}, u) = M_u\left[\left(\frac{p'(\zeta_k | x^{k-1}, u)}{p(\zeta_k | x^{k-1}, u)}\right)^2 | \zeta^{k-1} = x^{k-1}\right]. \tag{5.126}$$

Если $\zeta_1, \zeta_2 \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, то

$$J_{\zeta^\tau}(u) = n(u) J(u), \tag{5.127}$$

где $n(u)=M_u[\tau]$ и

$$J(u)=\int [p'(x^1\mid u)/p(x^1\mid u)]^2\, p(x^1\mid u)\, \nu^1(dx^1). \tag{5.128}$$

Допустим, что $\zeta_i=q^{i-1}\theta+\xi_i$, $i=1, 2, \ldots$, где ξ_i — независимые между собой и от θ одинаково распределенные случайные величины с абсолютно непрерывной плотностью распределения и фишеровским количеством информации J_ξ, $0<J_\xi<\infty$; q — положительное число. Тогда [581]

$$J_{\zeta^n}(u)=\frac{q^{2n-1}-1}{q^2-1}J_\xi. \tag{5.129}$$

Если $\zeta_{n+1}=\theta\zeta_n+\xi_{n+1}$, где $|\theta|<1-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $\xi_2, \xi_3, \ldots$ — независимые между собой и от (θ, ζ_1) гауссовские случайные величины с параметрами $(0, \sigma^2)$; ζ_1 — гауссовская случайная величина с параметрами $(0, \sigma^2/(1-\theta^2))$, то [581]

$$J_{\zeta^n}(u)=n\left[\frac{1}{(1-u^2)}+0(1)\right], \qquad n\to\infty. \tag{5.130}$$

Пример 4. Наблюдение $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, порождает эксперимент $\mathscr{E}$ и удовлетворяют уравнению

$$dX(t)=s(t;\theta)\,dt+dw(t), \tag{5.131}$$

где $w(t)$ —стандартный винеровский процесс; $\int\limits_0^1 s^2(t;\theta)\,dt<\infty$, а параметр $\theta\in\Theta\subset R^k$. Процесс $w(t)$ порождает в пространстве непрерывных функций распределение вероятностей ν. В этом случае [582]

$$p(X;\theta)=\exp\left\{\int\limits_0^1 s(t;\theta)\,dx(t)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 s^2(t;\theta)\,dt\right\}. \tag{5.132}$$

Если функция $s(\cdot;\theta)$ непрерывно дифференцируема в пространстве $\mathscr{L}_2(0, 1)$, то эксперимент $\mathscr{E}$ регулярен, а информационная матрица Фишера имеет вид [530]

$$J(\theta)=M_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\right)^T\right]=\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial\theta}s(t;\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}s(t;\theta)\right)^T dt. \tag{5.133}$$

В частном случае, когда $\Theta\subset R^1$, из (5.133) следует [530]

$$J(\theta)=\int\limits_0^1 |\,s'_\theta(t;\theta)\,|^2\,dt. \tag{5.134}$$

Пример 5. Рассмотрим случай, когда наблюдения $X_j\in R^1$ имеют вид [530]

$$X_j=s(j,\theta)+\xi_j. \tag{5.135}$$

В (5.135) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с абсолютно непрерывной плотностью распределения $p(x)$. Предположим, что функции $s(j, \theta)$ абсолютно непрерывны по θ при всех j и

$$J=\int\limits_{\{x:p(x)\neq 0\}}\left[\frac{p'(x)^2}{p(x)}\right]dx<\infty. \tag{5.136}$$

В теории связи модель (5.135) имеет следующую интерпретацию: функция $s(j, \theta)$ — сигнал, передаваемый в момент времени j, а ξ_j — аддитивный шум в канале связи. В этом случае $p(x, \theta) = p(x - s(j, \theta))$, $J_j(\theta) = [s'(j, \theta)]^2 J$.

Допустим, что $s(j, \theta) = s(j, \theta_1, \theta_2) = \theta_1 \sin \theta_2 j$. Здесь параметр θ_1 — амплитуда, а θ_2 — частота колебания, передаваемого по каналу связи. Тогда [530]

$$p_j(x, \theta) = p(x - \theta_1 \sin(\theta_2 j));$$

$$J_j(\theta) = J \begin{pmatrix} \sin^2(\theta_2 j) & j\theta_1 \sin(\theta_2 j)\cos(\theta_2 j) \\ j\theta_1 \sin(\theta_2 j)\cos(\theta_2 j) & j^2\theta_1^2 \cos^2(\theta_2 j) \end{pmatrix}. \tag{5.137}$$

При $n \to \infty$, $\theta_2 \neq k\pi$ имеем [530]

$$\sum_{j=1}^{n} J_j(\theta) = J \begin{pmatrix} \frac{n}{2} + 0(1) & 0(n) \\ 0(n) & \frac{n^3\theta_1^2}{6} + 0(n^2) \end{pmatrix}. \tag{5.138}$$

Для j-го наблюдения $J_j(\theta) = \theta_1^2 j^2 \cos^2(\theta_2 j) J$. (5.139)

Пример 6. Рассмотрим наблюдаемый процесс $X_0(s)$, дифференциал которого имеет вид

$$dX_0(s) = S_0(s, \theta)\, ds + \sigma db(s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant T. \tag{5.140}$$

В (5.140) функция S_0 дифференцируема по $\theta \in \Theta$ для почти всех s, S_0 и $\partial S_0 / \partial\theta \in \mathscr{L}_2[0, T]$. Предполагается, что вектор $\partial S_0/\partial\theta$ непрерывен по θ в $\mathscr{L}_2[0, T]$ $\forall \theta \in \Theta$. Обсудим два варианта (5.140): слабый шум ($\sigma \to 0$, $T = \text{const}$) и большое время передачи ($\sigma = \text{const}$, $T \to \infty$) [530].

В первом случае $\sigma = \varepsilon \to 0$, $T = \text{const}$ и уравнение (5.140) путем замены переменных $S_\varepsilon(t, \theta) = \varepsilon^{-1} T^{1/2} S_0(tT, \theta)$ может быть приведено к виду (5.131). Тогда

$$J_\varepsilon(\theta) = \varepsilon^{-2} \int_0^T \frac{\partial S_0(s, \theta)}{\partial\theta} \left(\frac{\partial S_0(s, \theta)}{\partial\theta}\right)^T ds = \varepsilon^{-2} J_0(\theta).$$

Если $\sigma = \text{const}$, а $T \to \infty$, то $\varepsilon = T^{-1}$ и

$$J_\varepsilon(\theta) = J(T, \theta) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T \frac{\partial S_0(s, \theta)}{\partial\theta} \left(\frac{\partial S_0(s, \theta)}{\partial\theta}\right)^T ds.$$

Рассмотрим частные случаи ($\Theta = (\alpha, \beta) \subset R^1$) функции $S(t, \theta)$: 1) $S_0(s, \theta) = A(T) f(s - (\theta - \alpha')T/(\beta' - \alpha'))$; $A(T)$, $f(s)$ — заданные функции; $f(s) \in \mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$; $-\infty < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < \infty$;

2) $S_0(s, \theta) = f(s + \theta m/(\beta - \alpha))$; 3) $S_0(s, \theta) = f(s\theta)$.

Следуя терминологии теории связи, перечисленные частные случаи описывают временную (время-импульсную), фазовую и частотную модуляции соответственно [530].

В первом случае

$$I(T, \theta) = J(T) = \frac{A^2(T)\, T^2}{\sigma^2 (\beta' - \alpha')^2} \int_{-\infty}^{\infty} [f'(u)]^2 du.$$

Аналогично во втором случае (f — периодическая функция с периодом $\tau > m$)

$$J(T, \theta) = \frac{m^2}{\sigma^2(\beta-\alpha)^2}\int_0^T \left[f'\left(s+\frac{\theta m}{\beta-\alpha}\right)\right]^2 ds = \frac{Tm^2}{(\beta-\alpha)^2\sigma^2}\bar{f}'^2 + 0(1);$$

$$\bar{f}'^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [f'(s)]^2 ds.$$

В третьем случае

$$J(\theta, T) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^T [f'(s\theta)]^2 s^2 ds = \frac{T^3}{3\sigma^2}\bar{f}'^2 + 0(T^2).$$

Предположим, что $\Theta \subset R^3$ — параллелепипед [530]

$$\alpha_1 < \theta^{(1)} < \beta_1; \quad \alpha_2 < \theta^{(2)} < \beta_2; \quad \alpha_3 < \theta^{(3)} < \beta_3; \quad \alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\beta_3 < 2\pi; \quad \theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)});$$

$$S_0(t, \theta) = \theta^{(1)} \sin(\theta^{(2)} t + \theta^{(3)}). \tag{5.141}$$

Тогда для модели (5.141) имеем

$$J(\theta, T) = \begin{pmatrix} T/2 + 0(1) & 0(T) & 0(1) \\ 0(T) & \theta^{(1)2}T^3/6 + 0(T^2) & \theta^{(1)2}T^2/4 + 0(T) \\ 0(1) & \theta^{(1)2}T^2/4 + 0(T) & \theta^{(1)2}T/2 + 0(1) \end{pmatrix}.$$

5.10.2. Количество информации Фишера является одновременно мерой чувствительности распределения вероятностей или функционалов от него к изменению исследуемого параметра [573]. Это свойство нашло широкое применение в задачах теории управления при построении робастных адаптивных алгоритмов управления, идентификации параметров динамических систем и т. п. [40]. Данные вопросы освещены в [40, 583, 584]. Здесь рассмотрим некоторые полезные информационные оценки в терминах количества информации по Фишеру.

Пример 7. Допустим, что $\{F_h\}$ — произвольное абсолютно дифференцируемое k-мерное семейство распределений, для которого $F_0 = F$ и

$$\Phi(F_h) = \Phi(F) + h + 0(|h|), \quad h \to 0. \tag{5.142}$$

Предположим, что существует матрица $J(F)$ для любого гладкого k-мерного семейства $\{F_h\}$, удовлетворяющего условию (5.142) и $J_f \geqslant J(F)$ в матричном смысле. В этом случае матрица $J(F)$ называется информационной матрицей в задаче оценивания $\Phi(F)$. В [590, 591] показано, что если функция $\Phi(F)$ слабо дифференцируема и φ — ее градиент в точке F, то выполняется следующее соотношение:

$$J(F) \geqslant 4\Delta^{-1}(F). \tag{5.143}$$

Из (5.143) следует, что если множество $\mathcal{F}$ достаточно регулярно в точке F, то информационная матрица непосредственно связана с геометрическими свой-

ствами оцениваемой функции $\Phi(F)$, матрица $^1/_4 J(F)$ является обратной к матрице Грама градиента $\Phi(F)$, а в одномерном случае обратна к квадрату нормы градиента $\Phi(F)$.

Если наряду с пространством допустимых распределений заданы значения функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_r$ от распределения F (задача условного оценивания $\psi(F)=((\psi_1(F), \ldots, \psi_r(F))^T=a)$, функции Φ, ψ дифференцируемы и $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)^T$, $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_r)^T$ — их градиенты соответственно, то при условии, что $A=A(F)=M_F[\varphi\psi^T]$; $B=B(F)=M_F[\psi\psi^T]$; $\Delta(F)=M_F[\varphi\varphi^T]$ и матрица B невырождена, имеем обобщение (5.143) в виде

$$J(F) \geqslant 4(\Delta(F)-AB^{-1}A^T)^{-1}. \tag{5.144}$$

В частном случае, когда рассматривается гладкое параметрическое семейство, то предполагается, что $\mathscr{F}$ — семейство распределений, описываемое плотностью $f(x, \theta)$ в виде гладкой функции от θ. В этом случае $f(x, \theta)$ абсолютно дифференцируема по θ:

$$\sqrt{\frac{f(x, \theta+h)}{f(x, \theta)}} = 1 + \xi^T h + \alpha(x, h). \tag{5.145}$$

В (5.145) обозначено $\xi_i=^1/_2(f(x, \theta)^{-1/2})(\partial f/\partial\theta)$; $M_\theta[\alpha^2(x, h)]=0(|h|)$; $h\to 0$; $J_0(\theta)=4M_\theta[\xi_i\xi_j]$ $(i, j=1, k)$ — информационная матрица Фишера плотности $f(x, \theta)$. Если матрица $J_0(F)$ невырождена, то $J_0^{-1}(\theta)\xi$ — производная функции Φ и, следовательно, $J_0(F)=J_0(\xi)$.

Из определения гладкого семейства распределений следует, что матрица $J(F)$ не зависит от топологии при условии, что рассматриваемая топология не сильнее топологии, индуцируемой на множестве $\mathscr{F}$ нормой $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{\mathscr{H}_2}$ [590]. Этому условию удовлетворяет, например, топология, соответствующая метрике

$$\rho_\alpha(F, G) = \int |\sqrt[\alpha]{dG} - \sqrt[\alpha]{dF}|^\alpha, \qquad \alpha \geqslant 1. \tag{5.146}$$

Другим примером может служить множество распределений $\mathscr{F}$, определяемое плотностями $f=dF/d\mu$ относительно некоторой измеримой меры μ. Если при $F\in\mathscr{F}$ равномерно сходятся интегралы $\int f^\alpha d\mu$ $(\alpha\geqslant 1)$, то топология, индуцируемая на $\mathscr{F}$ расстоянием $(\int |f-g|^\alpha d\mu)^{1/\alpha}$, также эквивалентна топологии на $\mathscr{F}$.

Пример 8. В принятых обозначениях допустим, что $\psi_i(x, t)$, $x\in X$, $-\infty<t<\infty$, $i=1, 2, \ldots, r$ — некоторые известные действительные функции и для любого $F\in\mathscr{F}$ выполняются следующие условия:

1) функция

$$\lambda^{(F)} = \int \psi(x, t)\, dF(x)$$

дифференцируема в точке $\Phi(F)$, причем $|\alpha(F)|\neq 0$;

$$\alpha(F) = \frac{d}{da}\lambda^{(F)}(a)\,|_{a=\Phi(F)};$$

2) матрица

$$\Delta^{(F)} = \int \psi(x, t)\,\psi^T(x, t)\, dF(x)$$

имеет конечную норму в некоторой окрестности точки $a=\Phi(x)$, непрерывна в этой точке и $\det \Delta(F) \neq 0$, $\Delta(F)=\Delta^{(F)}(a)$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}(F)$ составную матрицу

$$\widetilde{\Delta}(F)=\begin{pmatrix}\Delta(F) & -\alpha^T(F)\\ \alpha(F) & 0\end{pmatrix}. \tag{5.147}$$

В [592] показано, что для рассматриваемого случая

$$J(F)=\det\widetilde{\Delta}(F)/\det\Delta(F). \tag{5.148}$$

Таким образом, из (5.147), (5.148) следует [590—592]

$$J(F)=[\lambda'(\Phi(F))]^2\Big/\int \psi^2(x, \Phi(F))\,dF(x).$$

Пример 9. Предположим, что задано расстояние Хеллингера

$$r_2^2(\theta, \theta+h)=\int_X |p^{1/2}(x;\theta+h)-p^{1/2}(x;\theta)|^2\,d\nu \tag{5.149}$$

для регулярного эксперимента со статистической структурой $\mathscr{E}=\{X, \mathfrak{U}, P_\theta, \theta\in\Theta\}$, где Θ — выпуклое подмножество R^k. Для (5.149) справедлива следующая оценка [530]:

$$r_2^2(\theta;\theta+h)\leqslant\frac{|h|^2}{4}\int_0^1 \mathrm{Sp}\,J(\theta+sh)\,ds. \tag{5.150}$$

В компактном подмножестве K множества Θ равномерны

$$\varliminf_{h\to 0}|h|^{-2}\int_X |p^{1/2}(x;\theta+h)-p^{1/2}(x;\theta)|^2 d\nu \geqslant \frac{1}{4}\inf(J(\theta)u, u). \tag{5.151}$$

Из (5.151) следует, что любому компакту $K\subset\Theta$ можно сопоставить две постоянные $a, A>0$, для которых при $\theta\in K$

$$\frac{a|h|^2}{1+|h|^2}\leqslant r_2^2(\theta;\theta+h)\leqslant A|h|^2. \tag{5.152}$$

Если $p(x;\theta)$ непрерывна в точке $x=\theta$, то из (5.151) следует

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2}\int(\sqrt{p(x,\theta+u)}-\sqrt{p(x,\theta)})^2 d\nu=\frac{1}{4}J(\theta). \tag{5.153}$$

Таким образом, как и отмечалось ранее, количество информации Фишера является одновременно мерой чувствительности распределения вероятностей к бесконечно малому изменению параметра θ.

Рассмотрим метрику ρ пространства $\mathscr{H}_2$ в виде расстояния Хеллингера $l(p_\theta, p_{\theta'})$ между двумя распределениями, имеющего вид

$$l(P_\theta, P_\theta)=\arccos\int\sqrt{\frac{dP_\theta}{d\mu}\frac{dP_{\theta'}}{d\mu}}\,d\mu. \tag{5.154}$$

Согласно [33], получим

$$l(P_\theta, P_{\theta'})\cong\arccos\left[1-\frac{1}{8}J(\theta)(\theta'-\theta)^2\right]; \tag{5.155}$$

при $\theta' \to \theta$, $J(\theta) = \int (\dot{p}_\theta^2/p_\theta) d\mu$ — количество информации Фишера.

Аналогично при дополнительных ограничениях [593] имеют место следующие полезные в дополнение к (5.145), (5.153) информационные оценки ($\varepsilon \to 0$):

$$\int \log \frac{p(x, \theta_n + \varepsilon)}{p(x, \theta_n)} p(x, \theta_n) \nu(dx) = -\frac{\varepsilon^2}{2} J(\theta_0) + 0(\varepsilon^2);$$

$$\int \log^2 \frac{p(x, \theta_n + \varepsilon)}{p(x, \theta_n)} p(x, \theta_n) \nu(dx) = \varepsilon^2 J(\theta_0) + 0(\varepsilon^2);$$

$$\int \sqrt{p(x, \theta + \varepsilon) p(x, \theta)} \nu(dx) = 1 - \frac{1}{8} J(\theta_0) \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^2), \lim_{n \to \infty} \theta_n = \theta_0. \quad (5.156)$$

Предположим, что $p(x)$ — априорная плотность параметра θ относительно лебеговой меры в R^k и для $\sqrt{p(x)}$ существует градиент в $\mathscr{L}_2[R^k]$, т. е. существует функция со значениями в R^k, такая, что при $|t| \to 0$

$$\int_{R^k} [\sqrt{p(x, t)} - \sqrt{p(x)} - (\operatorname{grad} \sqrt{p(x, t)})^2] dx = 0(|t|^2).$$

Из этого условия следует, что информационная матрица Фишера для плотности $p(x)$

$$J = 4 \int_{R^k} \operatorname{grad} \sqrt{p(x)} (\operatorname{grad} \sqrt{p(x)})^T dx$$

конечна.

Обозначим

$$\psi(t) = \int_{R^k} |\operatorname{grad} \sqrt{p(x + t)} - \operatorname{grad} \sqrt{p(x)}|^2 dx;$$

$$K(n) = \min [n^{1/8}, \psi^{-1/4}(n^{-1/4})]; \qquad g(x) = \operatorname{grad} \sqrt{p(x)}/p(x);$$

$$\chi(n) = \{x: |g(x)| < K(n)\}$$

и предположим, что для $p(x)$ выполняются приведенные условия.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые гауссовские наблюдения со средним θ и ковариационной матрицей и $\overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. В [575] получены следующие асимптотические соотношения:

$$\lim_{n \to \infty} M [g(\overline{X}) g^T(\overline{X}) \chi_n(\overline{X})] = 1/4J;$$

$$\lim_{n \to \infty} M [ng(\overline{X}) (\overline{X} - \theta)^T \chi_n(\overline{X})] = -1/2J.$$

В более общем случае справедлива следующая лемма.

Лемма [543, 580]: пусть в окрестности точки $t \in \Theta$ для ν-почти всех значений $x \in X$ функция $p(u, x)$ абсолютно непрерывна по u и определена производная $p'(u, x) = \partial p(u, x)/\partial u$. Тогда для достаточно малых значений $|y|$

справедливо неравенство

$$\int p(t+y, x) \ln [p(t+y, x)/p(t, x)] \nu(dx) \leqslant 1/2y^2 [J(t) + 2\sqrt{J(t)\psi(t, y)} + 3\psi(t, y)] + \int [p(t+y, x) - p(t, x)] \nu(dx), \tag{5.157}$$

которое переходит в асимптотическое равенство при $\psi(t, y) \to 0$, если

$$J(t) = \int [p'(t, x)/p(t, x)]^2 p(t, x) \nu(dx) < \infty,$$

где

$$\psi(t, y) = \sup_{|a| \leqslant y, b \in [0, y]} \left\{ \int [p'(t+a, x)/\sqrt{p(t+b, x)} - p'(t, x)/\sqrt{p(t, x)}]^2 \nu(dx) \right\}.$$

5.10.3. Исследование свойств меры количества информации Фишера и его обобщение при возможных ослабленных регулярных условиях на функцию плотности распределения вероятностей проводилось во многих работах (см., например, [530]). Здесь кратко остановимся на некоторых обобщениях меры количества информации Фишера.

Пусть вероятностные меры P_1 и P_2 задаются плотностями распределения вероятностей $p_i = dP_i/d\nu$ $(i=1, 2)$ относительно некоторой меры ν. В качестве такой меры ν можно взять, например, P_1+P_2. В [563] была введена W-дивергенция между двумя распределениями P_1 и P_2 следующим образом:

$$W(P_1; P_2) = \int_{\{P_1(x)>0\}} \left[1 - \frac{p_2(x)}{p_1(x)}\right]^2 p_1(x) d\mu \tag{5.158}$$

и аналогично

$$W(P_2; P_1) = \int_{\{p_2(x)>0\}} \left[1 - \frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right]^2 p_2(x) d\mu. \tag{5.159}$$

В общем случае $W(P_1; P_2) \neq W(P_2; P_1)$.

Дивергенция (5.158) обладает следующими свойствами: 1) $W(P_1; P_2) = 0$ только при $P_1 = P_2$; 2) если $W(P_1; P_2^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\operatorname{var}|P_1 - P_2^{(n)}| \to 0$. В общем случае обратное утверждение неверно; 3) если $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ — сужение мер P_1 и P_2, то $W(P_1; P_2) \leqslant W(\tilde{P}_1; \tilde{P}_2)$; 4) если P_1 и P_2 взаимно абсолютно непрерывны и $P_i^{(n)}$ — прямое произведение меры P_i на себя n раз $(i=1, 2)$, то $W(P_1^{(n)}; P_2^{(n)}) \geqslant nW(P_1; P_2)$.

Рассмотрим параметрическое семейство $P = \{p(x|\theta);\ \theta \in \Theta\}$, задаваемое по некоторой мере ν плотностями $p(x|\theta)$, зависящими от параметра θ. В [563] была введена величина

$$W(\theta, \theta+\Delta\theta) = \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \int_{\{p(x|\theta)>0\}} \left[1 - \frac{p(x|\theta+\Delta\theta)}{p(x|\theta)}\right]^2 p(x|\theta) d\nu; \tag{5.160}$$

$$W(\theta) = \liminf_{\Delta\theta \to 0} W(\theta, \theta+\Delta\theta). \tag{5.161}$$

Выражение (5.161) является аналогом информационного количества Фишера $J(\theta)$ в тех случаях, когда оно не существует. Для регулярных и достаточно гладких параметрических семейств выполняется равенство $W(\theta)=J(\theta)$. Если семейство P однородно (что означает взаимную абсолютную непрерывность входящих в него распределений), то справедливы следующие свойства $W(\theta)$ [563]. Если

$$W^{(n)}(\theta, \theta+\Delta\theta) = \frac{1}{(\Delta\theta)^2}\int_X \dots \int_X \left[1 - \frac{\prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \theta+\Delta\theta)}{\prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \theta)}\right]^2 \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \theta)\, d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n), \tag{5.162}$$

то

$$W^{(n)}(\theta) = \lim_{\Delta\theta\to 0} \inf W^{(n)}(\theta, \theta+\Delta\theta), \tag{5.163}$$

$$W^{(n)}(\theta) = nW(\theta). \tag{5.164}$$

Пусть параметрическое множество θ является s-мерным параллелепипедом, $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_s)$, тогда

$$W_{if}(\theta) = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \inf \frac{1}{\Delta\theta_i \Delta\theta_f}\int_X \left[1 - \frac{p(x \mid \theta+\Delta\theta_i)}{p(x \mid \theta)}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \frac{p(x \mid \theta+\Delta\theta_f)}{p(x \mid \theta)}\right] p(x \mid \theta)\, d\mu(x); \tag{5.165}$$

$$W(\theta) = (W_{if}), \qquad i, j = 1, 2, \dots, s. \tag{5.166}$$

Если Θ — открытое подмножество нормированного пространства, то

$$W(\theta) = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \inf \frac{1}{(\Delta\theta)^2}\int_X \left[1 - \frac{p(x \mid \theta+\Delta\theta)}{p(x \mid \theta)}\right]^2 p(x \mid \theta)\, d\mu. \tag{5.167}$$

В более общем виде W-дивергенция между скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_\alpha$, $\alpha=1, 2$, или двумя соответствующими операторами A_1 и A_2 определяется следующей формулой [563]:

$$w(1:2) = w(A_1 : A_2) = (A_1^{-1}(A_2 - A_1)1)_1^2. \tag{5.168}$$

Величина (5.168) различает значение операторов A_1 и A_2 на элементе $I(x)=1$. При этом возможны различные модификации (5.168) типа дополнительных операций минимизации и др. [576], которые эффективно применяются в задачах математической статистики [573].

5.10.4. Предположим теперь, что на измеримом пространстве с семейством вероятностных мер $\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$; Θ — открытое под-

множество в R^n, $p(x, \theta) = dP_\theta/d\mu$, μ — доминирующая σ-конечная мера, заданы

$$J_i = J_i(x, \theta) = (\partial p(x, \theta)/\partial\theta_i)/p(x, \theta), \qquad i = 1, \ldots, k;$$

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k), \quad \tilde{J}_i = J_i - M_\theta[J_1 | J_2, \ldots, J_k] = J_1 - \sum_{l=2}^{k} c_l J_l. \tag{5.169}$$

В [594] величина

$$[\tilde{J}_1] = M_\theta[\tilde{J}_1^2] \tag{5.170}$$

была названа количеством информации Фишера о параметре θ_1 при наличии мешающего параметра $l = (\theta_2, \ldots, \theta_k)$, J_1 — модифицированный информант. Для введенной величины (5.169) сохраняются приведенные ранее результаты.

Меры количества информации Фишера нашли широкое применение в задачах математической статистики [555, 563, 576, 578, 595—618] и др. Эти вопросы рассмотрены в [619].

5.11. О некоторых взаимосвязях статистических мер количества информации

5.11.1. Следуя [549], рассмотрим функцию

$$H_{\theta\theta_0} = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x)\, dx, \tag{5.171}$$

где θ — параметр плотности распределения $p(x)$; $\theta \in \Omega(\theta, \theta_0) \in \in \Omega \times \Omega$.

Если $p(x)$ удовлетворяет условиям регулярности, то, согласно [549], функция $H(\theta, \theta_0)$ имеет относительный максимум $H(\theta_0, \theta_0)$ при $\theta = \theta_0$, вторая производная разности, с одной стороны, $\Delta H = H(\theta_0, \theta_0) - H(\theta, \theta_0)$ при $\theta = \theta_0$ равна $J(\theta_0)$, т. е. равна количеству информации Фишера. С другой стороны, функция $H(\theta, \theta_0) = H_{\theta_0}$ является мерой энтропии Шеннона для плотности распределения $p(x)$, а функция ΔH имеет вид

$$\Delta H = H_{\theta_0\theta_0} - H_{\theta\theta_0} = \int_X p(x, \theta_0) \log \frac{p(x, \theta_0)}{p(x, \theta)}\, dx. \tag{5.171'}$$

Таким образом, (5.171′) есть информационное расхождение по Кульбаку — Леблеру. Приведенные результаты указывают на непосредственную взаимосвязь рассмотренных мер количества информации и энтропии.

5.11.2. Представляет существенный интерес взаимосвязь между отдельными мерами количества информации для практически важных ситуаций. Это объясняется тем, что на практике довольно часты ситуации, когда количество информации вычислить и оценить проще, чем специальные характеристики, более аде-

кватные данной реальной задаче. На основе знания количества информации можно затем исследовать и эти специальные характеристики. Так, например, в задаче статистической оценки сигнала, принимающего значения $\theta_1, \ldots, \theta_m$ с вероятностями $p(\theta_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$ при n независимых наблюдениях ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n$ количество информации представляется в виде [522]

$$I(\theta, (\xi_1, \ldots, \xi_n)) = H - \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} 0(1), \qquad n \to \infty. \tag{5.172}$$

Здесь H — энтропия, а

$$\lambda = \max_{i \neq j} \min_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x|\theta_i)\, p^{1-\alpha}(x|\theta_j)\, dx; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m; \tag{5.173}$$

$p(x|\theta_i)$ — условное распределение ξ_k при условии, что $\theta=\theta_j$.

Используя подобные соотношения, можно получить границы для моментов оценок параметра θ. Ниже на конкретных примерах рассмотрим взаимосвязи между некоторыми из приведенных мер количества информации.

Пример 1. Предположим, что проводится оценка непрерывного сигнала θ на фоне шума ζ_i, не зависящего от θ при n независимых одинаковых наблюдениях

$$\xi_i = \theta + \zeta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Требуется найти количество информации Шеннона $I(\theta, (\xi(1), \ldots, \xi(n)))$.

Для рассматриваемого случая, когда n — фиксированное положительное число или значение марковской случайной величины ν с условием $M[\nu] = \bar{n} < \infty$, М. С. Пинскер в [543] показал, что при $\bar{n} = M[\nu] < \infty$ выполняется следующее неравенство:

$$I(\theta, (\xi(1), \ldots, \xi(\nu), \nu)) \leqslant J(\theta, \theta + \zeta_0) + 0(1) =$$
$$= h(\theta) + 1/2 \ln(\bar{n}J) - \ln(\sqrt{2\pi e}) + 0(1), \tag{5.174}$$

где ζ_0 — независимая от θ гауссовская случайная величина с параметрами $(0, 1/nJ)$; величина J — информационное количество Фишера случайной величины ζ_i, а $h(\theta)$ — дифференциальная энтропия случайной величины θ, т. е.

$$J = \int (\dot{p}(x)/p(x))^2 p(x)\, dx; \qquad h(\theta) = -\int p_{\theta}(x) \log p_{\theta}(x)\, dx,$$

где $p(x)$ и $p_{\theta}(x)$ — соответственно плотности распределения величин ζ_i и θ. Используя это равенство, можно получить границы для моментов оценок параметра θ. Здесь рассмотрим частные случаи (5.174): 1) если θ — гауссовская случайная величина, $D[\theta] = \sigma_{\theta}^2 < \infty$, то $I(\theta, (\xi(1), \ldots, \xi(\nu), \nu)) \leqslant 1/2 \log(1 + \bar{n}J\sigma_{\theta}^2)$; 2) если плотность $p_{\theta}(x)$ непрерывна и $J(\theta) < \infty$, то $I(\theta, (\xi(1), \ldots, \xi(\nu), \nu)) \leqslant h(\theta) + 1/2 \log(J(\theta) + \bar{n}J) - \log\sqrt{2\pi e}$; 3) если при каком-либо $s>0$ выполняется соотношение $M[|\nu - \bar{n}|^s] = 0(n^{-s}/\log \bar{n})$, $\bar{n} \to \infty$, то соотношение (5.174) переходит в равенство вида

$$I(\theta, (\xi(1), \ldots, \xi(n))) = 1/2 \log(nJ) + h(\theta) - 1/2 \log\sqrt{2\pi e}; \tag{5.175}$$

4) при условии, что θ — гауссовская случайная величина, независимая от ξ_1, имеем [543]

$$I(\theta,\ \theta+\xi_1) \leqslant {}^1/_2 r\sigma^2 J(\xi_1). \tag{5.176}$$

Оценки типа (5.176) были также получены для конкретных задач в [530, 580].

Так, в [530] было показано, что для определенного семейства случайных величин S, для которого выполняется соотношение $|S-M[S]| < k^2\sigma_S^2$, $k=$ $=\text{const}$, $M[S]=x_0$, информация Шеннона между сигналом на входе S канала связи и сигналом η на выходе канала при $\sigma_S^2 \to 0$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$I(S, \eta) = 1/2T\,(\sigma_S^2)\,\sigma_S^2 + 0\,(\sigma_S^2). \tag{5.177}$$

Для канала без памяти соотношение (5.177) имеет место равномерно по всем S при $\sigma_S^2 \to 0$. Из (5.177) как следствие получаем оценку для пропускной способности $C(\varepsilon)$ канала без памяти при ограничениях $M[S^2] \leqslant \varepsilon^2$, $|S| < k\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ вида

$$C(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} J(0) + 0(\varepsilon^2). \tag{5.178}$$

Асимптотическая оценка пропускной способности непрерывного канала с неаддитивным большим шумом, задаваемого условной плотностью $p(x|y)$ при тех же ограничениях, была получена в [615] следующего вида:

$$C(\varepsilon) \leqslant \sup_{x \in V(\varepsilon)} \frac{L_\varepsilon(x)}{|x|^2}\varepsilon, \tag{5.179}$$

где

$$L_\varepsilon(x) = \int_{R^n} p(x \mid y) \log \frac{p(x \mid y)}{p(0 \mid y)}\, dy. \tag{5.180}$$

Если условная плотность $p(x, y)=p(x_1, \ldots, x_n|y)$, задающая рассматриваемый канал, дважды непрерывно дифференцируема по $x=(x_1, \ldots, x_n)$, а интеграл (5.180), определяющий $J(x)$, можно дважды дифференцировать по x в окрестности точки $(0, \ldots, 0)$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{J(x)}{|x|^2} = \sup \sum_{i,j=1}^{n} \dot{x}_i(0)\, \dot{x}_j(0)\, p_{ij}, \tag{5.181}$$

где

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \int_{R^n} \frac{\dot{p}_i(0 \mid y)\, \dot{p}_j(0 \mid y)}{p(0 \mid y)}\, dy.$$

Для одномерного случая $p_{ij}=J=\int_{R^1} \{[\dot{p}_x(0|y)]^2/p(0|y)\}dy$ и совпадает с выражением количества информации Фишера (см. п. 5.5).

Отметим, что в терминах неравенства (5.163) при $p(u, x)=p(x|u)$ функция $L_\varepsilon(x)$ может быть записана в виде

$$L_\varepsilon(x) = \sup_{|y| \leqslant \varepsilon} \left\{ \frac{2}{y^2} \int p(x \mid t+y) \ln [p(x \mid t+y)/p(x \mid t)]\, \nu(dx) \right.$$

и будем считать, что $J(t)<\infty$, $\psi(t, y)\to 0$ при $|y|\to 0$. Тогда в условиях сформулированной леммы п. 5.8 имеем $L_\varepsilon = J(t)+0(1)$, $\varepsilon\to 0$, т. е. асимптотически L_ε совпадает с количеством информации Фишера, а сама лемма дает достаточно простые для практики условия проверки выполнения такой асимптотики [580].

Обобщение полученных результатов дано в [616] на случай, когда имеется канал без памяти с аддитивным шумом вида $\eta = S+\xi$ и существует плотность $p(x)$ для $x=(x_1, \ldots, x_n)$ со свойством $p(x_k-0)=q_k$, $p(x_k+0)=p_k$, $k=0, 1, \ldots, n$, для некоторого $b<1$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)\left|\frac{\dot{p}(x)}{p(x)}\right|^b dx<\infty, \qquad k=0, 1, \ldots, n.$$

Для случайной величины входного сигнала S с функцией распределения $F_S(x)$ и $p>0$, $q>0$ задается функционал $B_{p,q}(x)$ вида

$$B_{p,q}(x) = \int \Phi_{p,q}(F_s(x))\, dx;$$

$$\Phi_{p,q}(S) = yp\ln p + (1-y)q\ln q - [py+q(1-y)]\ln(py+q(1-y)).$$

В этом случае

$$I(S, \eta) = B(S)+0((M[|S|^\gamma])^{1/\gamma}), \qquad M[|S|^\gamma]\to 0, \qquad \gamma\to 1;$$

$$B(S) = \sum_{k=1}^{n} B_{p_k q_k}(S).$$

Пример 2. Рассмотрим более подробно модель примера 1. Предположим, что ζ_i независимые случайные переменные с плотностью распределения $f(x)$ и конечным значением количества информации $J=M[(\dot{f}(\zeta_i)/f(\zeta_i))^2]$, заданы плотность распределения вероятностей $\pi(\theta)$ и условная плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ при $\theta=y$, $h(\theta) = -\int \pi(\theta)\log\pi(\theta)d\theta$. В [530] показано, что при заданных условиях имеет место асимптотическая формула

$$I(X^n, \theta) = C_0\log n + h(\theta) + C_1 + 0(1) \qquad (n\to\infty). \tag{5.182}$$

В (5.182) $C_0\geqslant 1/2$ и зависит от степени гладкости функции $f(x, y)$ наблюдений X_i при условии $\theta=y$.

Постоянная $C_1 = M[\int \log Z(u)du]$, где $Z(u)$ — предельный процесс для оценки отношения правдоподобия при заданном условии нормирования. Приведем некоторые частные результаты для (5.182). Пусть, как и ранее, $X_1, \ldots, X_n$ и θ — случайные переменные ($X\in R^l$, $\theta\in R^1$) с функцией распределения

$$P(X_1\in A_1, \ldots, X_n\in A_n, \theta\in A_0) = \int_{A_0}\pi(y)\,dy\prod_{j=1}^{n}\int_{A_j} f(x_i, y_j)\,\nu(dx_i). \tag{5.183}$$

В (5.183) мера ν определена на подмножестве R^l. Мера количества информа-

ции Шеннона в принятых обозначениях имеет вид [530]

$$I(X^n, \theta) = \int\int \pi(y) \prod_{j=1}^{n} f(x_j, y) \times$$

$$\times \log \frac{\prod_{j=1}^{n} f(x_j, y)}{\int \prod_{j=1}^{n} f(x_j, y)\, \pi(y)\, dy} \nu(dx^n)\, dy, \qquad (5.184)$$

где $\nu(dx^n) = \nu(dx_1) \ldots \nu(dx_n)$. Обозначим функцией

$$Z_n(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{f(X_j, \theta + u/\varphi(n))}{f(X_j, \theta)} \qquad (5.185)$$

нормированный процесс отношения правдоподобия. В терминах процесса Z_n (5.185) выражение (5.184) примет вид

$$I(X^n, \theta) = \log \varphi(n) + h(\theta) - M\left[\log \int \frac{\pi\left(\theta + \frac{u}{\varphi(n)}\right)}{\pi(\theta)} Z_n(u)\, du\right]. \qquad (5.186)$$

В [530, 543] показано, что при введенных предположениях $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n(u) \to Z(u)$. Тогда выражение (5.186) в пределе будет иметь вид

$$I(X^n, \theta) = \log \varphi(n) + h(\theta) - M\left[\log \int Z(u)\, du\right] + 0(1), \qquad n \to \infty. \qquad (5.187)$$

Допустим, что $\varphi(n) = \sqrt{n}$. Тогда

$$Z(u) = \exp\left\{u J^{1/2}(\theta)\, \xi - \frac{u^2}{2} J(\theta)\right\}, \qquad (5.188)$$

где ξ — независимая от θ гауссовская случайная величина с параметрами (0, 1), а $J(\theta)$, как и ранее, количество информации Фишера для плотности $f(x, y)$:

$$J(y) = \int \left[\frac{\dot{f}(x, y)}{f(x, y)}\right]^2 f(x, y)\, \nu(dx) = 4 \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{f(x,y)}\right)^2 \nu(dx). \qquad (5.189)$$

Из выражений (5.187), (5.188) следует обобщение (5.175) при $n \to \infty$ в виде

$$I(X^n, \theta) = \log \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} + \int \pi(y) \log \frac{\sqrt{J(y)}}{\pi(y)}\, dy + 0(1). \qquad (5.190)$$

В частном случае, когда $f(x, y) = f_1(x - y)$ и интеграл в (5.189) абсолютно сходится для произвольных n, $\varphi(n)$, имеет место неравенство

$$I(X^n, \theta) \geqslant \log \varphi(n) + h(\theta) - M_\theta\left[\log \int Z_n(u)\, du\right]. \qquad (5.191)$$

Равенство в (5.191) достигается при $\varphi(n) = \sqrt{n}$ или $\varphi(n) = n$ при дополнительных ограничениях [530, 543] и $n \to \infty$.

При $\varphi(n)=\sqrt{n\log n}$ имеем

$$I(X^n,\theta)=1/2\log n+1/2\log\log n+C_1+0(1),\qquad n\to\infty. \tag{5.192}$$

Аналогичные выражения имеют место для многомерного параметра $\theta\in R^k$ с плотностью распределения вероятностей $\pi(\theta)$

$$I(X^n,\theta)=k\log\varphi(n)+h(\theta)-M\left[\log\int\ldots\int Z(u)\,du_1\ldots du_k\right]+ \\ +0(1),\qquad n\to\infty. \tag{5.193}$$

В (5.193) $Z(u)=Z(u_1,\ldots,u_k)$ — случайное поле, определяемое как предел для отношения правдоподобия для заданных гипотез. При $\varphi(n)=\sqrt{n}$ имеем [530]

$$Z(u)=\exp\left\{(J^{1/2}(\theta)\,u,\xi)-\frac{1}{2}(J(\theta)\,u,u)\right\}; \\ I(X^n,\theta)=\frac{k}{2}\log\frac{n}{2\pi e}+M\left[\frac{\sqrt{|J(\theta)|}}{\pi(\theta)}\right]+0(1),\qquad n\to\infty. \tag{5.194}$$

5.12. Понятие ε-энтропии и процессы передачи информации

В п. 5.1 отмечалось, что необходимость введения понятия энтропии и выраженного через него количества информации связана с указанной Шенноном возможностью выразить через эти величины пропускную способность канала и эпсилон-энтропию сообщения или энтропию при заданном уровне точности. Эта последняя величина полезна для непрерывных величин, энтропия которых бесконечна. Она определяется в виде вариационной задачи

$$H_\varepsilon(\theta)=\inf\frac{1}{T}I(\theta,\tilde\theta), \tag{5.195}$$

где нижняя грань берется по парам случайных величин $(\theta,\tilde\theta)=\{\theta(t),\tilde\theta(t);\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ (T — время передачи), отличающихся друг от друга в некоторой метрике $\rho(\theta,\tilde\theta)$ не более чем на заданную конечную величину ε. Например, при

$$M[\rho^2(\theta,\tilde\theta)]=M[(\theta(t)-\tilde\theta(t))^2]\leqslant\varepsilon^2. \tag{5.196}$$

Пример 1. Предположим, что исследуются способы приближенной передачи сообщения о положении точки $\xi\in X$ при помощи указания точки $\xi'\in X$ и в пространстве X задано расстояние $\rho(\xi,\xi')$, удовлетворяющее, например, условию

$$P(\rho(\xi,\xi')\leqslant\varepsilon)\leqslant 1 \tag{5.197}$$

или (5.196). А. Н. Колмогоров [620] для случая (5.197) соответствующую величину предложил обозначать через $H_\varepsilon^{(0)}$. При $\varepsilon=0$

$$H_0^{(0)}(\xi)=\sup_{P_\xi}H(\xi)=\log N_X, \tag{5.198}$$

где N_X — число элементов множества X. При $\varepsilon>0$ выполняются следующие оценки [620]:

$$\log N_X^C(2\varepsilon) \leqslant H_\varepsilon^0(X) \leqslant \log N_X^A(\varepsilon), \tag{5.199}$$

где $N_X^A(\varepsilon)$ и $N_X^C(\varepsilon)$ являются характеристиками пространства X [620].

Если X является n-мерным эвклидовым пространством и существует гладкая функция $p_\xi(x)$, то [620]

$$H_\varepsilon(\xi) = n\log\frac{1}{\varepsilon} + [h(\xi) - n\log\sqrt{2\pi e}] + 0(1), \tag{5.200}$$

$$h(\xi) = -\int_X p_\xi(x)\log p_\xi(x)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Из (5.200) следует, что в n-мерном пространстве асимптотическое поведение $H_\varepsilon(\xi)$ для гладких распределений $p_\xi(x)$ определяется размерностью пространства и дифференциальной энтропией $h(\xi)$ [620].

М. С. Пинскер [621] показал, что для вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ и $\xi'=(\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+n})$ при заданных ограничениях на центральные вторые моменты $d_{ij}(0\leqslant i, j\leqslant m+n)$ величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n}$ выполняется неравенство вида

$$H_\varepsilon(\xi) \leqslant 1/2\log(AB/C) \tag{5.201}$$

в обозначениях п. 5.2. Из (5.201) следует, что $H_\varepsilon(\xi)$ максимальна при гауссовских величинах.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления ε-энтропии для гауссовских величин и процессов. Ряд конкретных дополнительных примеров вычисления ε-энтропии для определенных классов случайных величин и процессов приведен в [621—624].

Пример 2. Величина ε-энтропии для непрерывных гауссовских процессов $\xi(t)$ с заданной корреляционной функцией $R(s, t)$ можно определить следующим образом. Допустим, что задан оператор [622] R в $\mathscr{L}^2[0, T]$:

$$Rf(t) = \int_0^T R(s, t) f(s)\,ds, \qquad f\in\mathscr{L}^2[0, T], t\in[0,T].$$

Используя собственные значения $\{\lambda_i\}$ оператора R, $Rf=\lambda f$, величина ε-энтропии случайного процесса $\xi(t)$ определяется как

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2}\sum_i \ln\max\left(\frac{\lambda_i}{\theta}, 1\right), \tag{5.202}$$

где θ определяется из следующего уравнения:

$$\varepsilon^2 = \sum_i \min(\lambda_i, \theta). \tag{5.203}$$

Так, в случае броуновского движения $\xi(t)$

$$R(s, t) = \min(t, s); \qquad \lambda_n = \frac{4T^2}{\pi^2(1+2n)^2} = \frac{T^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2};$$

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{2T^2}{\pi^2}\frac{1}{\varepsilon^2} + 0\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{5.204}$$

При $\varepsilon \to 0$ можно уточнить оценку (5.201) [622, 623]

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{2T^2}{\pi^2}\frac{1}{\varepsilon^2} - \log\frac{1}{\varepsilon^2} + 0\,(1), \tag{5.205}$$

где $0(1) = \log(\sqrt{2\pi^3}/18T^2) - 1/36 + 0_3(1) - 0_2(1/2) + 0(1)$.

В n-мерном пространстве (эвклидовом или гильбертовом) n-мерный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где координаты ξ_i взаимно независимы и распределены нормально, при заданном ε параметр θ определяется из уравнения [620, 621]

$$\varepsilon^2 = \sum \min(\theta^2, \sigma^2_{\xi_i}).$$

Для нормально распределенного вектора [621]

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma^2_{\xi_i} > \theta^2} \log\frac{\sigma^2_{\xi_i}}{\theta^2}. \tag{5.206}$$

Из (5.206) следует, что аппроксимирующий вектор $\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ следует выбирать из следующего условия:

при $\sigma^2_{\xi_i} \leqslant \theta^2$, $\quad \xi_i' = 0$;

при $\sigma^2_{\xi_i} > \theta^2$, $\quad \xi_i = \xi_i' + \Delta_i$, $\quad \sigma^2_{\Delta_i} = \theta^2$, $\quad \sigma^2_{\xi_k'} = \sigma^2_{\xi_k} - \theta^2$

и векторы ξ_k и Δ_k взаимно независимы.

Пример 3. Допустим, что случайный процесс $\xi(t)$ имеет вид

$$d\xi_t = -\alpha\xi_t dt + \sigma d\omega_t. \tag{5.207}$$

Для данного процесса

$$R(s, t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-\alpha|t-s|}, \qquad \lambda_i = \frac{2\alpha P}{\alpha^2 + b_i^2}, \qquad P = \frac{\sigma^2}{2\alpha},$$

где b_i определяется из решения трансцендентного уравнения [623, 624]

$$\operatorname{tg}\left(\frac{bT}{2} + \frac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{bT}{2} - \frac{\alpha}{b}\right) = 0.$$

Тогда

$$\frac{2\alpha PT^2/\pi^2}{((\alpha T + \pi)/\pi)^2 + (i-1)^2} < \lambda_i < \frac{2\alpha PT^2/\pi^2}{(\alpha T/\pi^2) + (i-1)^2}.$$

Существует несколько оценок для $H_\varepsilon(\xi)$ в данном случае [622—624]. Нижняя и верхняя границы для $H_\varepsilon(\xi)$ имеют ($b = \alpha T$, $y = \varepsilon^2/PT$) соответственно вид [623]

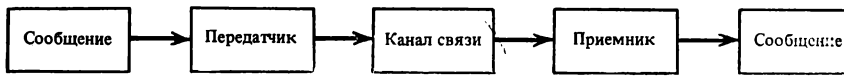
$$H_\varepsilon(\xi) > \frac{4b}{\pi^2 y} + \frac{1}{4}\ln\left\{1 + \left[\frac{4}{\pi(1+\pi/b)\,y} - \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{b}\right)y - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\pi}{b+.\pi}\right]^2\right\} - \left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right) - \frac{b}{2} - \frac{(b+\pi)^2}{2b}\,y; \tag{5.208}$$

$$H_\varepsilon(\xi) < \frac{4b}{\pi^2 y} + \frac{1}{4}\ln\left\{1 + \left(\frac{4}{\pi y} + \frac{3\pi}{2b}\right)^2\right\} - \frac{b}{2} +$$
$$+ \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\ln 2\right) + \frac{\pi}{10b} + \frac{1}{(4/by) - (\pi^2 y/2b) - (\pi^2/2b^2)}. \tag{5.209}$$

Более точная оценка $H_\varepsilon(\xi)$ для (5.207), занимающая промежуточное значение между верхней (5.209) и нижней (5.208) оценками, имеет вид [624]

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{(\sigma^2 - 2\varepsilon^2\alpha)}{\pi^2\varepsilon^2} + 0(\varepsilon^{-2}), \qquad \varepsilon^2 \to 0. \tag{5.210}$$

Пример 4. Пропускная способность и эпсилон-энтропия, согласно теоремам Шеннона [501], позволяют описывать условия, когда введение соответствующих методов кодирования и декодирования делает возможной передачу по системе связи вида



Передача с погрешностью ε оказывается возможной, если $H_\varepsilon(\theta)$ меньше пропускной способности канала $C(H_{\varepsilon(\theta)} < C)$, и невозможна, если $H_{\varepsilon(\theta)} > C$.

В связи с этим рассмотрим кратко вопросы оптимального кодирования и декодирования при передаче информации на примере передачи гауссовского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью.

Предположим, что сообщение θ, которое требуется передать, является гауссовской случайной величиной с $M[\theta] = m$, $D\theta = \sigma_\theta^2 > 0$. Параметры m и σ_θ^2 считаются известными как на передающем, так и на приемном концах.

На выходе передающего устройства принимаются сигналы ξ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, которые предполагаются удовлетворяющими стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi_t = A(t, \xi, \theta)\,dt + dw_t, \qquad \xi_0 = 0, \tag{5.211}$$

где w_t — винеровский процесс, не зависящий от θ. Как и ранее, неупреждающий функционал $A(t, \xi, \theta)$ задает кодирование и предполагается таким, что уравнение (5.211) имеет единственное сильное решение [582] и

$$P\left\{\int_0^T A^2(s, \xi, \theta)\,ds < \infty\right\} = 1$$

с ограничениями

$$\frac{1}{t}\int_0^t M\left[A^2(s, \theta, \xi)\right] ds \leqslant P = \text{const}. \tag{5.212}$$

Кодирование, удовлетворяющее перечисленным условиям, называется *допустимым* [582]. По принятому сообщению $\xi_0^t = \{\xi_s,\ s \leqslant t\}$ в каждый момент t строится сообщение $\hat{\theta}_t(\xi)$; задающий декодирование неупреждающий функционал $\hat{\theta}_t(\xi)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, должен быть выбран так, чтобы в некотором смысле оптимальным образом восстанавливал сообщение θ.

Пусть

$$\Delta(t) = \inf_{\substack{A(t,\xi,\theta) \\ \theta_t(\xi)}} M[(\theta - \hat{\theta}_t(\xi))^2], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальные кодирование, декодирование и минимальную ошибку воспроизведения $\Delta(t)$ сообщения θ при передаче по каналу (5.211) за время t.

При заданном кодировании имеем

$$M[(\theta - \hat{\theta}_t(\xi))^2] \geqslant M[(\theta - m_t(\xi))^2].$$

Поэтому $\Delta(t) = \inf_A M[(\theta - m_t)^2]$ и, следовательно, оптимальное декодирование по ξ_0^t определяется средним m_t. Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию лишь оптимального кодирования [582].

Допустим, что

$$A(t, \theta, \xi) = A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\,\theta, \tag{5.213}$$

т. е. рассмотрим подкласс допустимых кодирующих функций $A(t, \theta, \xi)$, линейно зависящих от θ. В (5.213) $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$ — неупреждающие функционалы и

$$\Delta^*(t) = \inf_{A_0, A_1} M[(\theta - m_t)^2]. \tag{5.214}$$

Требуется найти величину $\Delta^*(t)$ и оптимальные кодирующие функции (A_0^*, A_1^*), на которых достигается inf в (5.214).

В [582] доказана следующая теорема 5.12. *В классе допустимых линейных кодирующих функций (5.213) оптимальное кодирование существует и задается формулами*

$$A_1^*(t) = \sqrt{P/\sigma_\theta^2}\, e^{Pt/2}, \tag{5.215}$$

$$A_0^*(t) = -A_1^* m_t^*. \tag{5.216}$$

При этом оптимальное декодирование m_t^* и передаваемый сигнал ξ_t^* удовлетворяют уравнениям

$$dm_t^* = \sqrt{P\sigma_\theta^2}\, e^{-Pt/2}\, d\xi_t^*, \qquad m_0^* = m, \tag{5.217}$$

$$d\xi_t^* = \sqrt{\frac{P}{\sigma_\theta^2}}\, e^{Pt/2}(\theta - m_t^*)\, dt + dw_t, \qquad \xi_0^* = 0. \tag{5.218}$$

Ошибка воспроизведения

$$\Delta^*(t) = \sigma_\theta^2 e^{-Pt}. \tag{5.219}$$

Из (5.218) следует, что оптимальное кодирование заключается в том, что посылаются все время расхождения $(\theta - m_t^*)$ между величиной θ и ее опти-

мальной оценкой m_t^* с коэффициентом пропорциональности $\sqrt{P/\sigma_\theta^2}$, а не само сообщение θ.

Если использовать класс линейных кодирующих функций $(A_0(t)+A_1(t)\theta)$ без обратной связи, то для кодирующих функций

$$\widetilde{A}_1(t) = \sqrt{P/\sigma_\theta^2}, \qquad \widetilde{A}_0(t) = -A_1(t)\, m$$

среднеквадратичная ошибка

$$\widetilde{\Delta}(t) = \sigma_\theta^2/(1+Pt).$$

Обозначим

$$I_t = \sup_{\xi_0^t} I_t(\theta, \xi). \tag{5.220}$$

Кодирование (A_0^*, A_1^*) дает наибольшую информацию $I_t(\theta, \xi)$ о θ в принимаемом сообщении $\xi_0^t = \{\xi_s,\ s \leqslant t\}$ для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, и в этом смысле является оптимальным.

При этом согласно (5.55), (5.59) имеем

$$I_t(\theta, \xi) = \frac{1}{2}\int_0^t M\,[A^2(s, \theta, \xi) - \overline{A}^2(s, \xi)]\, ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t M\,[A^2(s, \theta, \xi)]\, ds \leqslant \frac{Pt}{2};$$

$$I_t(\theta, \xi^*) = \frac{1}{2}\int_0^t M\,[(A_0^*(s, \theta) + A_1^*(s)\,\theta)^2]\, ds = \frac{Pt}{2}.$$

Таким образом, процесс ξ^*, удовлетворяющий уравнению (5.218), является также оптимальным в том смысле, что для него, согласно [582], выполняется $I_t = I_t(\theta, \xi^*) = Pt/2$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Пример 5 (оптимальность линейного кодирования). Допустим, что заданы гауссовская случайная величина θ, $\theta \sim N(m, \sigma_\theta)$ и некоторая случайная гауссовская величина $\widetilde{\theta}$. Пусть $\varepsilon^2 = M[(\theta - \widetilde{\theta})^2]$ и ε-энтропия $H_\varepsilon(\theta) = \inf\{I(\theta, \widetilde{\theta}):\ M[(\theta - \widetilde{\theta})^2] \leqslant \varepsilon^2\}$. Согласно (5.202), (5.206) для гауссовской случайной величины θ ε-энтропия $H_\varepsilon(\theta)$ определяется как

$$H_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2}\ln \max(\sigma_\theta^2/\varepsilon^2, 1). \tag{5.221}$$

Тогда из (5.221) следует [582]

$$I(\theta, \widetilde{\theta}) \geqslant H_\varepsilon(\theta) \geqslant \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_\theta^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_\theta^2}{M[(\theta - \widetilde{\theta})^2]}. \tag{5.222}$$

Следовательно [582],

$$M[(\theta - \widetilde{\theta})^2] \geqslant \sigma_\theta^2 e^{-2I(\theta, \widetilde{\theta})}. \tag{5.223}$$

Неравенство (5.223) является в определенном смысле аналогом неравенства Рао — Крамера и позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5.13 [582]. *Пусть θ — гауссовская случайная величина, передаваемая по каналу связи, описываемому уравнением (5.211). Тогда $\Delta(t) = \Delta^*(t) = \sigma_\theta^2 e^{-Pt}$ и, следовательно, в классе всех допустимых кодирований оптимальным является линейное кодирование (A_0^*, A_1^*) по (5.215), (5.216).*

Пример 6. Допустим теперь, что передаваемое сообщение θ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, является гауссовским процессом с дифференциалом

$$d\theta_t = a(t)\,\theta_t dt + b(t)\,d\widetilde{w}_t, \tag{5.224}$$

где винеровский процесс $\widetilde{w}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, не зависит от гауссовской случайной величины θ_0 с заданными $M[\theta_0] = m$, $D[\theta_0] = \gamma > 0$, $|a(t)| \leqslant K$, $|b(t)| \leqslant K$. Процесс ξ_t, получаемый на выходе канала, является единственным сильным решением [609] уравнения

$$d\xi_t = [A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t]dt + dw_t, \quad \xi_0 = 0, \tag{5.225}$$

где винеровский процесс w_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, не зависит от $\widetilde{w}$, ξ_0; неупреждающие кодирующие функции $A_0(t, \xi)$ и $A_1(t, \xi)$ удовлетворяют условиям

$$P\left\{\int_0^T A_0^2(t, \xi)\,dt < \infty\right\} = 1, \qquad \sup_{\substack{x \in C \\ t \leqslant T}} |A_1(t, \xi)| < \infty,$$

$$M[(A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t)^2] \leqslant P = \text{const};$$

$$\Delta^*(t) = \inf_{(A_0, A_1, \widehat{\theta}_t(\xi))} M[(\theta_t - \widehat{\theta}_t(\xi))^2] = \inf_{(A_0, A_1)} M[(\theta_t - m_t)^2] = \inf_{(A_0, A_1)} M[\gamma_t];$$

$$\gamma_t = M[(\theta_t - m_t)^2].$$

Для изложенной модели передачи информации справедлива следующая теорема.

Теорема 5.14 [609]. *При передаче по схеме (5.225) гауссовского случайного процесса θ_t, подчиняющегося уравнению (5.224), оптимальная передача описывается уравнением*

$$d\xi_t^* = \sqrt{\frac{P}{\gamma_t^*}}\,[\theta_t - m_t^*]\,dt + dw_t, \qquad \xi_0^* = 0, \tag{5.226}$$

где оптимальное декодирование $m_t^* = M_t[\theta_t]$ определяется из уравнения

$$dm_t^* = a(t)\,m_t^* dt + \sqrt{P\gamma_t^*}\,d\xi_t^*, \qquad m_0^* = m; \tag{5.227}$$

$$\dot{\gamma}_t^* = [2a(t) - P]\,\gamma_t^* + b^2(t), \qquad \gamma_0^* = \gamma. \tag{5.228}$$

Минимальная ошибка воспроизведения

$$\Delta^*(t) = \gamma \exp\left\{2\int_0^t \left[a(s) - \frac{P}{2}\right]ds + \int_0^t b^2(s) \exp\left\{2\int_0^t \left[a(u) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{P}{2}\right]du\right\}ds\right\}. \tag{5.229}$$

Из (5.229) при $a(t) = b(t) \equiv 0$ как следствие имеем $\sigma \equiv \dot{\widetilde{\Delta}}$, *что совпадает с (5.219) (при $\sigma^2 = \gamma$).*

В частном случае, когда обратная связь не используется, из теоремы 5.14 следует, что оптимальные кодирующие функции задаются:

$$\widetilde{A}_1(t) = \sqrt{P/D\theta_t}, \qquad \widetilde{A}_0(t) = -\widetilde{A}_1(t)\,M[\theta_t];$$

$$\dot{\widetilde{\Delta}}(t) = 2a(t)\,\widetilde{\Delta}(t) + b^2(t) - \frac{P}{D\theta_t}\widetilde{\Delta}^2(t), \qquad \widetilde{\Delta}(0) = \gamma,$$

Допустим, что

$$d\theta_t = -\theta_t dt + d\widetilde{w}_t, \qquad \theta_0 \sim N(0, 1/2). \tag{5.230}$$

В этом случае $a(t) \equiv -1$; $b(t) \equiv 1$; $\gamma = 1/2$; $m = 0$; $M\theta_t \equiv 0$; $D\theta_t \equiv 1/2$; $\dot{\widetilde{\Delta}}(t) = -2\widetilde{\Delta}(t) + 1 - 2P\widetilde{\Delta}^2(t)$; $\widetilde{\Delta}(0) = 1/2$.

Следовательно,

$$\widetilde{\Delta}_p = \lim_{t\to\infty} \widetilde{\Delta}(t) = (\sqrt{1+2P} - 1)/2P.$$

Из теоремы 5.14 следует, что

$$\Delta^*(t) = \frac{1}{2+P} + e^{-(2+P)t}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+P}\right].$$

Таким образом, $\Delta_P^* = \lim\limits_{t\to\infty} \Delta^*(t) = 1/2 + P$, и поэтому [582]

$$\frac{\Delta_P^*}{\widetilde{\Delta}_P} = \frac{2P}{(2+P)(\sqrt{1+2P} - 1)};$$

асимптотика приводит к следующим выражениям:

$$\frac{\Delta_P^*}{\widetilde{\Delta}_P} \sim \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{P}}, & P \to \infty. \\ 1, & P \to 0 \end{cases} \tag{5.231}$$

Из (5.231) следует, что использование обратной связи при больших P дает ошибку воспроизведения, существенно меньшую, чем без использования обратной связи; при малых P ошибки воспроизведения асимптотически эквивалентны.

Таким образом, несмотря на то, что пропускные способности каналов передачи информации с обратной связью и без нее совпадают (см. пример 1 п.5.2) качество передачи информации может существенно отличаться: использование обратной связи при больших P приводит к существенному улучшению качества передачи информации.

5.13. ε-энтропия без предвосхищения и с прогнозом в задачах теории управления

Очень важным представляется использование понятия эпсилон-энтропии в широком классе задач теории управления. Однако здесь имеются определенные трудности. Так, в обычной постановке задач теории передачи информации допускается, что восстановление сообщения $\theta = \{\theta(t), -\infty < t < \infty\}$ на приемнике будет произведено не сразу в момент передачи, а со сколь угодно большим запаздыванием; в то же время в теории управления существенно, чтобы $\widetilde{\theta}(t)$ определялось по $\theta(s)$ без предвосхищения (т. е. по его значениям для $s \leqslant t$) или даже с прогнозом (т. е. по значениям $s \leqslant t - \tau$). Такая ситуация возникает, например, в

задаче, где $\theta(t)$ интерпретируется как задающее воздействие, а $\tilde{\theta}(t)$ — как регулируемая величина и требуется так преобразовать входные и выходные величины, или, говоря языком теории информации, ввести такие кодирование и декодирование, чтобы $\tilde{\theta}(t)$ удовлетворяло заданным условиям.

Например, предположим, что $\tilde{\theta}(t)$ должно воспроизводить сигнал $\theta(t)$ со среднеквадратичной погрешностью вида (5.196) при условии, что $\tilde{\theta}(t)$ зависит лишь от поведения $\theta(s)$ до момента t (т. е. восстановление задающего воздействия $\theta(t)$ без предвосхищения) или от поведения $\theta(t)$ до момента времени $t-\tau$, $\tau>0$ (т. е. восстановление с прогнозом τ). Для решения этой новой задачи нужно модифицировать понятие эпсилон-энтропии и ввести понятие *эпсилон-энтропии без предвосхищения* $H_\varepsilon^0(\theta)$ *или эпсилон-энтропии с прогнозом* $H_\varepsilon^\tau(\theta)$, $\tau>0$. Величины $H_\varepsilon^0(\theta)$ и $H_\varepsilon^\tau(\theta)$ при среднеквадратичном критерии точности определяются как нижняя граница количества информации, вычисленная при том ограничении, что $\theta(t)$ и $\tilde{\theta}(t)$ удовлетворяют приведенному выше условию и дополнительному, состоящему в том, что значения $\tilde{\theta}(t)$ восстанавливаются по значениям $\theta(s)$ до момента времени t или $t-\tau$ соответственно (в более точных математических терминах это значит, что последовательность трех случайных величин $\{\tilde{\theta}(s),\ s\leqslant t\}$, $\{\theta(r),\ r\leqslant t-s\}$ и $\{\theta(u),\ 0\leqslant u\leqslant T\}$ для $r\leqslant t-s$ и $\forall t$ образует цепь Маркова).

Оказывается, что если $\theta(t)$ — гауссовский процесс, то при нахождении эпсилон-энтропии $H_\varepsilon^\tau(\theta)$, $\tau\geqslant 0$ (так же как и для обычной эпсилон-энтропии) достаточно рассматривать лишь гауссовские пары процессов $(\theta, \tilde{\theta})$ [625]. Следуя [625, 626], рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $\xi(t)=\sigma\theta(t)$, $\varepsilon^2(t)=\varepsilon^2>0$, $t>0$, где θ — стандартный винеровский процесс. В этом случае

$$H_\varepsilon^0(\xi)=\sigma^2/2\varepsilon^2; \qquad H_\varepsilon^\tau=\sigma^2/2\,(\varepsilon^2-\sigma^2\tau).$$

Пример 2. Допустим, что рассматривается стационарная гауссовская марковская последовательность $\xi(k)=c\xi(k-1)+\sigma\theta(k)$, $-\infty<k<\infty$, $\varepsilon^2(k)=\varepsilon^2>0$. Тогда

$$H_\varepsilon^0(\xi)=\frac{1}{2}\ln\max\left(\frac{c^2\varepsilon^2+\sigma^2}{\varepsilon^2},\ 1\right);$$

$$H_\varepsilon^\tau(\xi)=\frac{1}{2}\ln\max\left(\frac{c^2(\varepsilon^2-\delta^2)+\sigma^2c^{2\tau}}{\varepsilon^2-\delta^2},\ 1\right),$$

если

$$\delta^2=\frac{\sigma^2}{1-c^2}(1-c^{2\tau})<\varepsilon^2.$$

Пример 3. Пусть ξ — одномерный стационарный гауссовский марковский процесс вида $d\xi(t)=-b\xi(t)dt+\sigma d\theta(t)$; $M[\xi^2(t)]=\sigma^2/2b>\varepsilon^2$, где θ —

стандартный винеровский процесс; b, $\sigma>0$. В этом случае

$$H_\varepsilon^0(\xi)=\frac{\sigma^2-2\varepsilon^2 b}{2\varepsilon^2},\qquad H_\varepsilon^\tau(\xi)=\frac{\sigma^2\exp\{-2b\tau\}-2(\varepsilon^2-\delta^2)b}{2(\varepsilon^2-\delta^2)},$$

если $\delta^2=(\sigma^2/2b)$; $(1-\exp\{-2b\tau\})<\varepsilon^2$.

Пример 4. Для стационарного марковского гауссовского процесса $\theta(t)$ при

$$M[\theta(t)\theta(t+s)]=A\exp\{-\beta|s|\};\qquad A,\beta>0 \tag{5.232}$$

получаем, в частности, простую расчетную формулу [625, 626]

$$H_\varepsilon^\tau(\theta)=\beta(A-\varepsilon^2)/(\varepsilon^2-A(1-e^{-\beta\tau})),\qquad \tau\geqslant 0,$$

$$A(1-e^{-\beta\tau})<\varepsilon^2<A,\qquad T\to\infty. \tag{5.233}$$

и эпсилон-энтропия с прогнозом оказывается в $\pi^2/2$ раз больше обычной энтропии $H_\varepsilon(\theta)$, характеризующей ситуацию, когда $\widetilde{\theta}(t)$ восстанавливается по всему процессу $\theta(s)$, $-\infty<s<\infty$.

Если $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ — многомерный марковский случайный процесс с независимыми составляющими ξ_j, $j=\overline{1,n}$ и корреляционными функциями

$$M[\xi_j(t)\xi_j(t+s)]=A_j\exp\{-\beta_j|s|\},\qquad A_j>0,\qquad \beta_j>0$$

и мерой верности воспроизведения

$$\sum_{j=1}^n M[(\xi_j(t)-\widetilde{\xi}_j(t))^2]\leqslant\varepsilon^2,$$

то соотношения (5.233) обобщаются следующим образом [626]:

$$H_\varepsilon^0(\xi)=\left(\sum_{j=1}^n(A_j\beta_j)^{1/2}\right)^2\varepsilon^{-2}-\sum_{k=1}^n\beta_k,$$

$$H_\varepsilon^\tau(\xi)=\left(\sum_{j=1}^n(A_j\beta_j)^{1/2}\exp\{-\beta_j\tau\}\right)^2\left(\varepsilon^2-\sum_{i=1}^n(1-e^{-2\beta_i\tau})\right)^{-1}-\sum_{k=1}^n\beta_k.$$

Пример 5. Предположим, что одномерный стационарный гауссовский марковский процесс $\xi(t)$ описывается уравнением

$$d\xi(t)=-b\xi(t)\,dt+\sigma dw(t),\qquad M[\xi^2(t)]=\frac{\sigma^2}{2b}>\varepsilon^2, \tag{5.234}$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, b, $\sigma>0$. Согласно результатам примера 3, имеем

$$H_\varepsilon^0(\xi)=(\sigma^2-2\varepsilon^2 b)/2\varepsilon^2;$$

ε-энтропия по (5.195), (5.196) имеет вид [625] $H_\varepsilon(\xi)=(\sigma^2-2\varepsilon^2 b)/\pi^2\varepsilon^2+$ $+0(\varepsilon^{-2})$, $\varepsilon^2\to 0$. Следовательно,

$$H_\varepsilon^0(\xi)/H_\varepsilon(\xi)=\frac{1}{2}\pi^2(1+0(1)),\qquad \varepsilon^2\to 0.$$

И в этом примере эпсилон-энтропия без предвосхищения оказывается в $\pi^2/2$ больше классической ε-энтропии.

Новые варианты понятия эпсилон-энтропии приводят к обобщениям основных результатов теории передачи информации. Так, имеет место обратная теорема [626].

Теорема 5.15. *Если* $H_\varepsilon^\tau(\theta) > C$, *то никакие методы кодирования и декодирования не позволяют вести передачи по каналу, когда сигнал на входе* $\eta(t)$ *определяется по значениям* $\theta(s)$, $s \leqslant t-\tau$ *и сообщение* $\widetilde{\theta}(t)$ *определяется по сигналу на выходе канала* $\widetilde{\eta}(s)$ *до момента времени* t, *чтобы погрешность воспроизведения этого управляющего сигнала была меньше* ε.

В достаточно общих ситуациях верна и прямая теорема. Рассмотрим, например, важный частный случай, когда управляющий сигнал $\theta(t)$ моделируется как произвольный гауссовский стационарный случайный процесс (с дискретным или непрерывным временем) и передача ведется по каналу с гауссовским белым шумом $\zeta(t)$ мощности N при ограниченной P мощности на входе передатчика, так что

$$\widetilde{\eta}(t) = \eta(t) + \zeta(t); \qquad M[\eta^2(t)] \leqslant P, \qquad P > 0 \tag{5.235}$$

и имеется бесшумная мгновенная обратная связь. В такой ситуации при

$$H_\varepsilon^\tau(\theta) < C, \qquad \tau > 0, \qquad T \to \infty, \tag{5.236}$$

где $C = P/2N$ пропускная способность канала непрерывного времени (аналогично $C = 1/2 \ln(1+P/N)$ в случае дискретного времени), можно определить линейные преобразования f и φ

$$\eta(t) = f(\theta(s), \widetilde{\eta}(r), s \leqslant t-\tau, r \leqslant t); \qquad \widetilde{\theta} = \varphi(\widetilde{\eta}(r), r \leqslant t), \tag{5.237}$$

так что выполнены приведенные условия (5.235). Процедура нахождения для гауссовских процессов $\theta(t)$, явных выражений $\eta(t)$ и $\widetilde{\theta}$, а также величины $H_\varepsilon^\tau(\theta)$ аналогична процедуре нахождения оптимальных фильтров в задачах оптимальной линейной фильтрации Колмогорова — Винера.

Пример 6. Допустим, что $\theta(t)$ — марковский гауссовский стационарный процесс с корреляционной функцией (5.232). Для (5.237) можно записать следующие выражения:

$$\eta(t) = \frac{\theta(t) - \widetilde{\theta}(t)}{D(\theta - \widetilde{\theta}(t))} \sqrt{P};$$

$$\widetilde{\theta}(t) = \sqrt{\frac{\beta(A - \varepsilon^2)}{N}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(s-t)}\, d\widetilde{\eta}(s), \tag{5.238}$$

где ε^2 определяется из равенства $H_\varepsilon^\tau(\theta) = P/2N$.

Таким образом, можно утверждать, что взаимное влияние друг на друга теории управления и теории передачи информации оказывается плодотворным. Проблемы теории управления приводят к новым оригинальным постановкам задач в теории информации. Решения этих задач перспективны для применений в теории управления.

Дополнительные результаты информационной теории управления можно найти в [36—40, 42, 72, 73, 613, 619, 649] и др.

5.14. Термодинамические ограничения на процессы физических измерений

5.14.1. Вводные замечания. Процессы измерения параметров физических систем или систем управления сами являются сложными физическими процессами взаимодействия объекта, параметры которого подлежат измерению, и измерительных приборов. В соответствии с общими принципами построения моделей для конкретных процессов измерения должны быть построены физические, расчетные и математические модели, которые, в свою очередь, сами должны основываться на известных в настоящее время физических законах.

Существуют некоторые общие положения или принципы, которым должны удовлетворять все процессы измерения. Вместе с тем, несмотря на достигнутые в последние годы определенные успехи в разработке общей теории измерений, эта теория еще далека от той полноты и общности, которая вытекает из требований современной науки о процессах управления.

В современных системах управления приходится проводить массовые измерения как параметров управляемых объектов, так и внутренних измерений параметров состояний управляющих систем.

В настоящем разделе рассматриваются некоторые особенности процессов измерения только в доквантовой области и отдельные вопросы в области квантовой макрофизики. Более подробное рассмотрение процессов измерения в квантовой области дано в [345—359, 627, 39].

Любое измерение вносит изменение в состояние объекта, так как процесс измерения является процессом взаимодействия измерительного прибора с объектом, параметры которого подлежат измерению. Совершенно очевидно, что это изменение должно быть достаточно мало, чтобы с ним можно было практически не считаться. Вместе с тем в современных системах управления при обработке больших массивов информации накопление даже весьма малых изменений в состоянии САУ может привести к большим ошибкам. Примеры таких явлений были описаны в [39].

Поэтому вопрос о точности измерения в данных условиях имеет принципиальное значение для теории управления. С термодинамической точки зрения процесс измерения как физический процесс имеет две особенности. Во-первых, на точность измерения оказывают влияние тепловые флуктуации, происходящие как в самом объекте измерения, так и в измерительном приборе. Во-вторых, всякий процесс измерения, который по необходимости происходит с конечной скоростью, является неравновесным и, следовательно, в определенной мере необратимым процессом. Каждый процесс измерения приводит к увеличению энтропии как объекта, так и самого измерительного прибора. Следовательно, обработка больших массивов информации в современных САУ неизбежно связана с дополнительным накоплением эн-

тропии, вызванным массовыми измерениями как параметров объекта, так и состояния самой управляющей системы [627].

В связи с этим рассмотрим некоторые вопросы, связанные с предельными возможностями измерений с позиций термодинамики.

5.14.2. О термодинамических ограничениях на точность физических измерений. Вопрос о термодинамических пределах точности физических измерений рассмотрим на примере эксперимента с классическим механическим осциллятором [130, 321, 534, 627]. Задача ставится следующим образом: необходимо обнаружить воздействие конечной во времени силы $F(\tau)$ на массу m, которая связана с лабораторией жесткостью k и обладающая диссипацией с коэффициентом трения β. Предполагается, что $F(\tau)$ — регулярное воздействие (для конкретности гармоническое) и действует стационарная флуктуационная сила F_Φ. Для тепловых флуктуаций спектральная плотность F_Φ равна $(F_\Phi)_\omega^2 = 4\varkappa T\beta$, где $\varkappa$ — постоянная Больцмана; T — температура. Исследуется только уровень достижимой чувствительности при обнаружении регулярных воздействий $F(\tau)$, т. е. квазистатические измерения, в которых уровень чувствительности определяется дрейфом стабильности элемента жесткости, дрейфом температуры и т. п., не исследуются.

Осциллятор изолирован от нетепловых шумов типа акустических, сейсмических и т. д., а тепловые флуктуации в механическом осцилляторе принципиально неустранимы.

В первом приближении условие обнаружения $F(\tau)$ имеет вид

$$F(\tau) \geqslant (4\varkappa T\beta\Delta f)^{1/2}, \qquad (5.239)$$

где Δf — полоса частот, внутри которых лежит основная часть спектра $F(\tau)$.

Из (5.239) следует, что для повышения пороговой чувствительности необходимо уменьшать T и β. В оценке (5.239) не содержится способа измерения реакции осциллятора на $F(\tau)$.

Далее предполагается, что при измерении $F(\tau)+F_\Phi(\tau)$ используется идеальный прибор, позволяющий регистрировать сколь угодно малые перемещения осциллятора, не дающий вклада в F_Φ; такое предположение не противоречит классическим представлениям.

Введем следующие обозначения: $\tau_р = 2m/\beta$ — время релаксации осциллятора, $\tau_и$ — время, затрачиваемое на измерение, $\tau_в$ — время воздействия $F(\tau)$, $|A(\tau_в) - A(0)|_{1-\alpha}$ — границы, в пределах которых может изменяться амплитуда колебаний осциллятора под воздействием F_Φ с заданной степенью вероятности $(1-\alpha)$, α — статистическая ошибка первого рода. Пусть $\mu = 2\tau_в/\tau_р \ll 1$. В этом случае осциллятор будет вести себя как консервативная система с медленно изменяющейся амплитудой колебаний по квазигармоническому закону.

Наименьшее значение амплитуды, которое еще можно обнаружить в случае тепловых флуктуаций, существенно зависит от

$\tau_в$, $\tau_р$ и β. Так, в случае, когда $A(0)=0$, имеем [130, 321]

$$[A(\tau_в)]_{1-\alpha} = \sigma\sqrt{2\tau_в/\tau_р}\sqrt{2\ln(1/\alpha)}; \quad \sigma^2 = [\overline{A(\tau)}]^2. \qquad (5.240)$$

При $A(0)=\sigma$ [130]

$$[A(\tau_в)] - A(0)]_{1-\alpha} = \sigma\sqrt{\mu}\,u_{1-\alpha}; \qquad (5.241)$$

$$u_{1-\alpha} = \frac{[a(\tau_в) - a(0)]_{1-\alpha}}{\sqrt{\mu}}; \quad a(\tau_в) = \frac{A(\tau_в)}{\sigma}; \quad a(0) = \frac{A(0)}{\sigma}.$$

Величина вкладываемой или извлекаемой энергии ΔE из осциллятора внешним воздействием при $A(0)=0$ имеет вид

$$\Delta E = 4\ln(1/\alpha)\{\zeta'(\alpha, \beta_1)\}^2 \varkappa T(\tau_в/\tau_р), \qquad (5.242)$$

а при $A(0)=\sigma$

$$\Delta E = 2\sqrt{2}\,\zeta(\alpha, \beta_1)\,u_{1-\alpha}\varkappa T\sqrt{\tau_в/\tau_р}. \qquad (5.243$$

Здесь $\zeta = \Gamma/[A(\tau_в) - A(0)]_{1-\alpha}$, Γ — заданная амплитуда. Различимые порции энергии в (5.242) и (5.243) составляют части равновесного значения $\varkappa T$. Если $\tau_р/\tau_в \gg 1$, то имеем неравновесный процесс, за время $\tau_р$ энергия осциллятора изменится на величину порядка $\varkappa T$, так как осциллятор, находящийся в тепловом равновесии с лабораторией, имеет среднюю энергию $\varkappa T$.

Для случая $F(\tau) = F_0 \sin\omega\tau$ при $\omega = \omega_{осц}$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_в$ минимально обнаружимая величина силового воздействия $F(\tau)$ на механический осциллятор для случая тепловых флуктуаций имеет вид [321]

$$[F_0]_{min} = \Theta\sqrt{\frac{2\varkappa T\beta}{\tau_в}} = \Theta\sqrt{\frac{4\varkappa T m}{\tau_в \tau_р}}, \qquad (5.244)$$

где

$$\Theta = \begin{cases} \zeta(\alpha, \beta_1)\sqrt{2\ln(1/\alpha)}, & \text{при } A(0) \leqslant \sigma\sqrt{\mu}; \\ \zeta'(\alpha, \beta_1)\,u_{1-\alpha}, & \text{при } A(0) \simeq \sigma, \end{cases}$$

β_1 — статистическая ошибка второго рода.

Выражение (5.244) отличается от (5.241) числовым множителем и показывает, что для увеличения пороговой чувствительности необходимо увеличивать как $\tau_р$, так и $\tau_в$.

Таким образом, минимально обнаружимая сила слабо зависит от начального значения амплитуды колебаний осциллятора при выбранном методе измерений, а величина энергии, вкладываемой или извлекаемой из осциллятора обнаружимым детерминированным воздействием, наоборот, существенно зависит от начальной амплитуды колебаний осциллятора.

Справедливость приведенных соотношений ограничена классическим подходом к постановке задачи и тем обстоятельством, что не учитывались влияния флуктуаций индикатора малых колебаний осциллятора. Нетрудно заметить, что в общем случае при больших $\tau_р$ и малых β это влияние может существенно проявиться. Однако в определенном смысле данная процедура измерений является оптимальной [627].

Более корректное описание предельных соотношений и условий, необходимых для достижения предельной чувствительности при измерении силы, действующей на механический осциллятор, можно получить из физической модели квантового уровня описания [627].

Из приведенных результатов следует, что в тепловом равновесии с термостатом вероятное изменение энергии осциллятора ΔE за время $\tau_в$ тем меньше, чем меньше отношение $\tau_в/\tau_р$. Минимально достижимое за время $\tau_в$ значение энергии осциллятора имеет вид

$$\Delta E \cong \varkappa T \tau_в/\tau_р.$$

Нижняя граница изменения энергии осциллятора с точки зрения квантовой теории существенно связана с наличием дискретных разрешенных уровней энергии

$$E_n = \hbar\omega(1/2+n),$$

если время существования осциллятора на этих уровнях станет больше времени наблюдения $\tau_в$. Согласно [321, 627], несмотря на то, что на осциллятор действует случайная сила (удары молекул в термостате) его энергия в течение времени наблюдения будет оставаться неизменной, что существенно отличается от классического случая.

В этом случае для одномерного осциллятора, находящегося в термостате при температуре T, определяются соотношения между m, ωk и T, при которых он в течение заданного времени $\tau_в$ с вероятностью, близкой к единице, остается на начальном энергетическом уровне (n_0 или n). При действии на осциллятор детерминированной силы $f(\tau)$ в течение времени $\tau_в$ вероятности перехода осциллятора с нулевого уровня на n-й или с m-го на n-й равны соответственно

$$p_{0n} = \frac{1}{n!} y^n \exp\{-y\};$$

$$p_{mn} = \frac{y^{m+1} e^{-y}}{n!\, m!} \left| \sum_{k=0}^{\min(m,k)} (-y)^{-k} \frac{m!\, n!}{k!\,(m-k)!\,(n-k)!} \right|^2; \qquad (5.245)$$

$$y = \frac{1}{2m\hbar\omega_0} \left| \int_0^\tau f(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau \right|^2.$$

Если $(1-\alpha)$ — выбранный уровень вероятностей $p_{00} \geqslant 1-\alpha$ и $p_{nn} \geqslant 1-\alpha$, то с достоверностью $(1-\gamma)$ эти неравенства, согласно [321], эквивалентны следующим:

для $n = 0$ $\qquad \varkappa T \dfrac{\tau_в}{\tau_р} \leqslant \dfrac{\alpha}{\ln(1/\gamma)} \hbar\omega_0$ $\qquad (5.246)$

и для $n \simeq 1$ или $n \gg 1$ $\qquad n\varkappa T \dfrac{\tau_в}{\tau_р} \leqslant \dfrac{\alpha}{\ln(1/\gamma)} \hbar\omega_0.$ $\qquad (5.247)$

Соотношение (5.247) при $\tau_в = \tau_0$ (период собственных колебаний осциллятора) можно рассматривать как разграничение между классическим и квантовым поведением осциллятора.

Этот пример одновременно указывает на существование таких условий измерений, в которых поведение осциллятора будет существенно квантовым [321, 627, 353].

В реальном эксперименте с пробным телом влияние тепловых флуктуаций (влияние трения β) и флуктуационное воздействие системы индикации присутствуют одновременно и приводят к увеличению энергии колебаний осциллятора по сравнению с $\varkappa T$ в равновесном состоянии. Для светового индикатора стационарная случайная сила, действующая на осциллятор, состоит из суммы флуктуаций светового давления и тепловых флуктуаций. Дисперсии этих флуктуаций $\bar{F}_1^2 = 8Wh\nu c^{-2}\Delta f$ и $\bar{F}_2^2 = 4\varkappa T\beta\Delta f$ соответственно. Здесь W — поток светового излучения, падающий на массу осциллятора. Из теоремы Найквиста [130] можно получить, что увеличение равновесной температуры равно

$$\Delta T = 2Wh\nu/(\varkappa c^2\beta) \qquad (\beta \gg 2W/c^2). \tag{5.248}$$

Так, для $m=1$ г, $S=1$ см^2, $W=10^7$ эрг/с, $\tau_р = 2m/\beta = 10^{10}$ с (осциллятор находится в гелии при $T=4{,}2$ К, $P=10^{-8}$ Торр) увеличение температуры $\Delta T = 2$ К.

Согласно [321, 627], механический осциллятор, помещенный в световой поток мощностью W, испытывает в этом потоке трение $\beta_2 = 2W/c^2$. В идеально эвакуированном термостате, имеющем температуру T,

$$\beta_2 = (4\pi^5\varkappa^4T^4S)/(14c^4h^3), \tag{5.249}$$

где S — площадь. Соотношение (5.249) определяет теоретический предел добротности макроскопического механического осциллятора. Так, для $S=1$ см^2, $T=4{,}2$ К, $m=1$ г, $\omega_0 = 2\pi c^{-1}$, постоянная времени осциллятора равна $1\cdot10^{21}$ с, а добротность $Q_0 \cong 10^{21}$.

Соотношения (5.247) остаются справедливыми и для моды колебаний электромагнитного резонатора.

Для $\omega_e = 2\cdot10^{10}$ рад/с и $\tau_{ер} = 50$ с имеем $Q_e = 5\cdot10^{11}$, что уже достигнуто на практике [627]. Тогда с помощью соотношений (5.247) нетрудно получить [321], что при $T=2$ К вероятное время пребывания на основном уровне $n=0$ такой моды ≈ 3 с, а на «наиболее» вероятном уровне $n_T = \varkappa T/\hbar\omega_e = 15$ это время $\approx 0{,}2$ с.

Для емкостного датчика, используемого в регистрирующем датчике при флуктуационных тепловых воздействиях минимальное значение смещения осциллятора

$$[x(\tau)]_{min} \sim U_\sim^{-1}, \tag{5.250}$$

а для оптического

$$[x(\tau)]_{min} \sim W^{-1/2}, \tag{5.251}$$

где $U_\sim$ — амплитуда электрического напряжения на контуре датчика. Так как $[F(\tau)]_{min} \sim [x(\tau)]_{min}$, то для обнаружения мень-

ших величин $[F(\tau)]_{\min}$ необходимо увеличивать согласно (5.250), (5.251) U или W, которые приведут к увеличению флуктуационных сил со стороны датчика на массу m. Таким образом, необходимы оптимальные стратегии измерения (оптимальные U и W), которым соответствует истинное наименьшее $[F(\tau)]_{\min}$.

Так, для емкостного датчика с характерной полосой спектра $\Delta\omega_0$ наименьшее смещение $[x(\tau)]_{\min}$, которое может быть обнаружено, равно

$$[x(\tau)]_{\min} = \xi \frac{2d_0}{U_\sim} \sqrt{\frac{2\varkappa T_e r \Delta\omega_0}{\pi}}, \tag{5.252}$$

где $U_\sim$ — амплитуда электрического напряжения между пластинами емкости; d_0 — среднее расстояние между пластинками; T_e — температура контура; r — активное сопротивление контура. Формула (5.252) справедлива при предположении, что флуктуации частоты и амплитуды автогенератора полностью скомпенсированы.

Из (5.252) следует, что при уменьшении T_e и r уменьшается $[x(\tau)]_{\min}$. Формула (5.252) справедлива и при $\Delta\omega_0 > \omega_e/Q_e = \omega_e^2 C_e r$, где ω_e — собственная частота колебаний электрического контура с добротностью Q_e; C_e — средняя емкость. В настоящее время большое применение нашли сверхпроводящие СВЧ-резонаторы с малым r, для которых $Q_e > 5 \cdot 10^{11}$.

Изменение $\delta(U_{\omega_p+\omega_0})$, вызванное δx_0 от воздействия $F_0 \sin \omega_0 \tau$, равно

$$\delta(U_{\omega_p+\omega_0}) = \frac{1}{8\sqrt{2}} U_{\omega_p} \frac{\omega_e}{\omega_0^2} \frac{F_0 \tau_p}{m d_0} \geqslant \sqrt{\frac{2\varkappa T r}{\tau_p}} \tag{5.253}$$

и является одним из условий обнаружения амплитуды силы F_0 с помощью такого способа регистрации.

Здесь ω_p — частота электрического генератора и связана соотношением

$$\omega_0 + \omega_p = \omega_e.$$

Флуктуационное силовое воздействие емкостного датчика на механический осциллятор, вызванное тепловыми колебаниями в резонаторе, оценивается в виде [321]

$$[F_0]_{\min} = \xi \frac{4}{\tau_p} \sqrt{\frac{m\varkappa T_e \omega_0}{\omega_e} \frac{\tau_p}{\tau_{ep}}} = \xi \sqrt{\frac{8m\varkappa T_e \omega_0}{Q_e \tau_p}} \tag{5.254}$$

при

$$[U_{\omega_p}]_{\text{opt}} = \frac{8\omega_0 d_0}{\tau_p \omega_e} \sqrt{2m\omega_0 \omega_e L}. \tag{5.255}$$

При выводе (5.254) полагалось $\beta = 0$, а при $Q_0/T_0 = Q_e/T_e$ выражение (5.254) совпадает с (5.239). Отсюда следует, что шум электрической части системы играет роль аналога шума механической части. Полученные выражения дают оценку резерва чувст-

вительности, определяемой датчиком со сверхпроводящим резонатором с $Q_e \geqslant 5 \cdot 10^{11}$.

Если $\Delta\omega_0 \ll \omega_e/Q_e$, то для емкостного датчика [321]

$$[F_0]_{\min} \simeq \xi \frac{4}{\tau_p} \sqrt{\pi \sqrt{2} \frac{m\varkappa T_e \omega_0}{\omega_e}}. \qquad (5.256)$$

Поскольку выражения (5.254), (5.256) получены при учете (5.255), то они определяют оптимальные стратегии измерений. Выражения (5.254), (5.256) следует рассматривать как предельные, так как они получены при $\beta = 0$ и ограничивают применение классической формулы Найквиста (5.239).

В квантовой области при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p$

$$[F_0]_{\text{кв}} \simeq \xi \frac{2}{\tau_p} \sqrt{\frac{\hbar m \omega_0}{n_{\text{н}}}} \qquad (5.257)$$

с вероятностью, близкой единице, квантовый механический осциллятор перейдет с начального уровня $n_{\text{н}}$ на один из ближайших. При этом $[F_0]_{\text{кв}}$ из (5.257) никогда не превысит (5.256) и не может быть больше (5.254), так как $\varkappa T_e > \hbar\omega_e$. Таким образом, данный метод измерения позволяет достигнуть при $\tau_p \ll \tau_e$ чувствительности, определяемой дискретностью энергетических уровней механического осциллятора [321, 627].

В принятых обозначениях

$$[F_0]_{\min} = \xi \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{8m\hbar\omega_0}{n_e^T}}; \qquad n_e^T = \frac{\varkappa T_e}{\hbar\omega_e}. \qquad (5.258)$$

Из (5.258) следует, что на фоне квантовых флуктуаций в электрическом резонаторе можно достигнуть в принципе чувствительности, соответствующей (5.258) при условии $n_e{}^T > 2n_{\text{н}}$. Более того, для достижения чувствительности в соответствии с (5.258) достаточно увеличивать начальную амплитуду колебаний в электромагнитном резонаторе без увеличения равновесной температуры T_e и, следовательно, $n_e{}^T$ [321, 627], так, чтобы выполнялось $n_e > 2n_{\text{н}}$.

Как выше было показано, при $Q_e \approx 5 \cdot 10^{11}$, $\omega_e = 2 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$, $T_e = 2$ К время пребывания в основном состоянии ≈ 3 с, а при $n_e{}^T = 15$ оно составляло $\approx 0{,}2$ с. Следовательно, при достигнутых величинах Q_e и не слишком малых температурах τ_p в (5.254) и (5.258) может быть порядка единиц секунд и меньше.

Тогда неопределенность в определении энергии в моде резонатора может быть порядка $\hbar/\tau_p \approx 10^{-27}$—$10^{-26}$ эрг, тогда как $\hbar\omega_e \approx 2 \cdot 10^{-17}$ эрг. Следовательно, боровское соотношение неопределенностей при $\tau_p \simeq 1 \div 0{,}1$ с не ставит ограничений для создания устройства, определяющего, не возмущая электромагнитный осциллятор, на каком квантовом уровне он находится. Особенности таких устройств рассмотрены в [130, 321, 627, 345—351, 357].

Таким образом, оптимальная стратегия принятия решения, несмотря на рассогласование приемника относительно сигнала, обеспечивает обнаружение почти предельного порогового сигнала, а передаваемая энергия U приемнику может быть в m раз меньше $\varkappa T$. Однако пороговая энергия сигнала E_c при этом не уменьшается, так как только часть этой энергии (точнее, $1/m$-я часть) передается приемнику, из-за того что приемник имеет в m раз более узкую полосу, чем спектр сигнала. Основная часть энергии сигнала рассеивается, не попадая в приемник, и поглощается в термостате. Вследствие этого данный способ приводит не к уменьшению энергии передатчика, а лишь к неполному использованию ее в приемнике [321]. Такой подход особенно важен в физических экспериментах по обнаружению так называемых тонких эффектов. Так как передаваемая приемнику энергия U может быть в m раз меньше kT, то квантовые ограничения начинают сказываться существенно раньше, при $U=kT/m\approx\hbar\nu$.

5.15. Термодинамические модели информационных процессов управления

Основная проблема исследования термодинамических моделей информационных процессов, согласно [39, 534], состоит в установлении связей (предельных соотношений) между такими термодинамическими характеристиками, как энергия, энтропия, и информационными, к которым относятся точность, количество информации и др. Для процессов измерения первичных информационных процессов выделяются три основных вопроса: 1) связано ли получение информации с уменьшением статистической энтропии системы и какова эта связь; 2) каково компенсирующее увеличение энтропии в системе за счет диссипации энергии; 3) за счет чего удается после измерения обеспечить дополнительное уменьшение энтропии в системе посредством управляющего воздействия.

Здесь кратко будут рассмотрены, следуя [39, 534], некоторые из взаимосвязей указанных вопросов.

5.15.1. Информационные характеристики процессов измерения. Согласно результатам п. 5.14 в первом приближении для решения поставленных вопросов достаточно ограничиться классической частью измерительного прибора, что дает возможность рассмотреть все основные информационные процессы как получение информации (измерение), передача информации и обработка информации (вычислительный процесс) с единой точки зрения.

Первичный информационный процесс — физическое измерение — с точки зрения термодинамики рассматривается как процесс перехода из одного равновесного состояния в другое и предполагается, что измеряемая физическая величина является внутренним параметром исследуемой системы. В качестве регистри-

рующего параметра выбирается физическая величина, характеризующая состояние измерительного прибора, что позволяет использовать ее в качестве управляющего параметра. Предполагается также, что в процессе взаимодействия исследуемой системы и измерительного прибора устанавливается новое стационарное значение регистрирующего параметра, однозначно связанное с измеряемой величиной. Согласно [534], процесс измерения можно представить в виде цепочки преобразований

$$l \to \lambda \to F \to y \to x, \tag{5.259}$$

где l — измеряемый параметр; λ — параметр датчика преобразования; F — обобщенная сила, действующая на измерительный прибор, приводящая к изменению координаты x; y — согласующий параметр.

Предполагается, что исследуемая система и измерительный прибор помещены в термостат с температурой T. Причиной погрешности измерения являются неустранимые тепловые флуктуации параметров F, y, x, причем предполагается линейная связь между этими параметрами.

Рассмотрим кратко основные информационные характеристики измерения [534, 608]. Погрешность Δl данного измерения определяется как разность истинного значения измеряемой l и измеренного значения l' величин: $l - l' = \Delta l$.

Предполагается, что заранее известна область L длины $l_m = l_{\max} - l_{\min}$, $l \in L$, $l_{\min} \leqslant l \leqslant l_{\max}$, в которой измерение как оценка случайной величины задается с априорным распределением $P(l)$. Критерием качества данной реализации измерения является величина, усредненная по совместному распределению $P(l', l) = P(l)P(l'|l)$, при этом выполняется условие однородности физического измерения, т. е. $P(l'|l) = P(|l' - l|) = P(|\Delta l|)$ и не зависит от l.

Измерение также часто характеризуется минимальным разрешимым интервалом Δl_p (или ценой деления), который является неоднозначной характеристикой. Процесс измерения характеризуют также линейным преобразованием типа $x/x_m = (l - l_0)/l_m$ отрезка L в отрезок X длины x_m. При этом распределения x и l будут принадлежть одному и тому же классу и отличаются масштабным l_m/x_m и центрирующим l_0 параметрами. Данное преобразование связано с использованием в датчике некоторой эталонной обобщенной силы $F_{эт}$, которая совместно с $F(l)$ дает $\langle F_{эт} + F(l) \rangle = 0$, для симметричного измерения $l_0 = \langle l \rangle$, $-x_m/2 \leqslant x \leqslant x_m/2$, $x \in X_+$ и $F_{эт} + F(l_{\min}) = 0$, для асимметричного измерения $l_0 = l_{\min}$, $0 \leqslant x \leqslant x_m$, $x \in X$ — здесь операция $\langle \cdots \rangle$ — усреднение по априорному распределению $P(l)$.

Формально относительная точность определяется как обратная относительной погрешности величина. Эта величина играет определяющую роль в термодинамических моделях информационных процессов.

Относительная точность $1/\sigma_x$ однократного измерения определяется как

$$1/\sigma_x = x/\sqrt{\overline{\Delta x^2}} = (l - l_0)/\sqrt{\overline{\Delta l^2}}. \qquad (5.260)$$

Здесь чертой обозначается усреднение по $P(|\Delta l|)$, т. е. по всем флуктуациям.

Величина (5.260) является характеристикой одной реализации измерения в области. Для характеристики всего процесса измерения вводится средняя относительная точность $1/\sigma$

$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle}{\langle \Delta \bar{x}^2\rangle}} \equiv \sqrt{\frac{\langle \delta x^2\rangle}{\langle \Delta \bar{x}^2\rangle}}; \qquad (5.261)$$

она является отношением среднеквадратической погрешности к апостериорной.

Если обозначить через $\xi = x/x_m = (l - l_0)/l_m$, то выражение (5.261) преобразуется к виду

$$1/\sigma^2 = \langle \delta\xi^2\rangle/\langle \Delta\xi^2\rangle \equiv \langle \delta\xi^2\rangle/\sigma_0^2. \qquad (5.262)$$

Относительный (приведенный) разрешающий интервал ε определяется в виде

$$\varepsilon = \Delta\xi_p = \Delta x_p/x_m, \quad P((x - x')/x_m > \varepsilon/2) = \omega > 0. \qquad (5.263)$$

Величина $1/\varepsilon$ называется разрешающей способностью, $1/\omega$ — надежностью, а $1/\sigma$ — точностью измерения.

Известно, что равномерное распределение на отрезке дает максимальное значение информационной энтропии, а при заданном среднем значении и дисперсии максимальную энтропию имеет нормальное распределение, которое в приведенных обозначениях имеют вид

$$P(x) = \text{const} = 1/x_m, \quad x \in X; \qquad (5.264)$$

$$P(x|\bar{x}') = P(|x - \bar{x}'|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma_0^2}\right\} (-\infty \leqslant x - x' \leqslant \infty). \qquad (5.265)$$

Здесь $\langle \delta x^2\rangle = x_m/12$; $\sigma_0^2 = \sigma^2/12$.

Для точных измерений $\sigma_0^2 \ll 1$. Если пренебречь отличием $P(x')$ от $P(x)$, а количество информации вычислить по (5.264), (5.265), то в результате получим [534]

$$I(x, x') = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{\pi e}\right) \approx \ln\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma^2 \ll 1. \qquad (5.266)$$

Из (5.266) следует, что при высокой точности измерения (5.262) количество информации определяется ее логарифмом. Поскольку было использовано отношение дисперсий столь разных распределений, как равномерное и нормальное, то (5.266) достаточно точно. Если определять точность как $1/\varepsilon$, то $I = \ln(1/\varepsilon)$, которое в силу условия (5.263) $\omega > 0$ является неоднозначным.

Для случая $\sigma^2 \geqslant 1$ необходимо учесть краевой эффект и

$$I(x, x') \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\langle \delta x^2 \rangle + \overline{\Delta x^2}}{\overline{\Delta x^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sigma^2} + 1 \right). \qquad (5.267)$$

Для очень грубых измерений $1/\sigma^2 \ll 1$ и [534] $I(x, x') \approx 1/2\sigma^2$ при $1/\sigma^2 \to 0$.

5.15.2. О связи термодинамических пределов точности физического измерения с информационными характеристиками. Пусть X — переходный процесс в регистрирующем устройстве, а Y — переходный процесс в исследуемой системе с согласующим устройством. Точность измерения однозначно определяется переданной от тела Y телу X энергией U. Допустим, что переходный процесс в регистрирующем устройстве (тело X) описывается уравнением

$$\mu \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = cy = f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \qquad (5.268)$$

а переходный процесс в теле Y, если y — обобщенная скорость, описывается уравнением

$$M\dot{y} + Hy = F - c\dot{x}, \quad y(0) = 0. \qquad (5.269)$$

Если y — обобщенная координата, то соответственно имеем

$$Hy + B\dot{y} = F + cx, \quad y(0) = 0. \qquad (5.270)$$

В (5.268) — (5.270) обобщенные коэффициенты инерции μ, M; сопротивления α, H; жесткости $k = \partial^2 U/\partial x^2$, B; c — коэффициент связи подсистем Y и X.

Из (5.260) следует

$$\sigma_x^2 = \overline{\Delta x^2}/\bar{x}_\infty^2 = \varkappa T/k x_\infty^2 = \varkappa T/2U, \qquad (5.271)$$

а для симметричного измерения в области из (5.261)

$$1/\sigma^2 = \langle x^2 \rangle / \overline{\Delta x^2} = 2\langle U \rangle / \varkappa T, \qquad (5.272)$$

где $\langle U \rangle$ — среднее по $P(x)$ значение переданной энергии от тела Y телу X. Тогда, согласно [534], получим

$$I(x, y) = I(x, x') = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sigma^2} + 1 \right) \leqslant \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\langle U \rangle}{\varkappa T} + 1 \right). \qquad (5.273)$$

Из (5.273) следует, что количество информации характеризует степень связи между подсистемами Y и X и равно уменьшению энтропии, а основная задача анализа модели заключается в определении допустимой диссипации энергии в процессе измерения.

Диссипативные потери Q_x в теле X равны U при быстро нарастающей силе $f(t)$. Для диссипативных сил Q_y в теле Y выполняется $Q_y > U$, так как коэффициент связи c и безразмерные коэффициенты $\delta = c^2/\alpha H$ и $\Delta = c^2/kB$ ограничены сверху. Уменьшение δ и Δ относительно верхней границы возможно только при увеличении Q_y. Энергетически оптимальные значения δ и Δ мож-

но определить из соотношения $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$. Тогда

$$Q_\Sigma = Q_y + Q_x = 2Q_x = 2U;\ \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 2\sigma_x^2. \tag{5.274}$$

Согласно [534], нижняя грань оценки для $\sigma^2 Q_\Sigma$ достигается в случае двух степеней свободы в виде

$$\sigma^2 Q_\Sigma \geqslant 2\varkappa T. \tag{5.275}$$

Для одной степени свободы $Q_x = U$ и

$$\sigma^2 Q_\Sigma \geqslant \frac{1}{2}\varkappa T. \tag{5.276}$$

Оценки (5.275), (5.276) относятся к необратимой реализации процесса измерения. Уменьшение диссипации при измерении можно достигнуть за счет введения третьего тела z — регулятора, который изменяет параметры H или B. Поскольку сам регулятор z участвует в тепловом движении, то при заданной величине U (точности $1/\sigma$) уменьшение Q_Σ ограничено.

Так, в рассматриваемой модели предельная оценка для «обратимой» реализации процесса измерения

$$\sigma Q_\Sigma \geqslant 4\varkappa T, \tag{5.277}$$

а для модели с одной степенью свободы оценка

$$\sigma Q_\Sigma \geqslant 2\varkappa T \tag{5.278}$$

улучшается уже не в 4 раза, как в случае (5.276), (5.275), а только вдвое.

Из (5.276), (5.278) следует, что минимальный рост энтропии за счет диссипации полностью определяется точностью измерения и способом его реализации. В необратимом случае

$$\Delta H_2^{(\text{н})} \geqslant Q_\Sigma/\varkappa T = 1/2\sigma^2, \tag{5.279}$$

а в предельно «обратимом»

$$\Delta H_2^{(0)} \geqslant 2/\sigma = 2\sqrt{2\Delta H_2^{(\text{н})}}. \tag{5.280}$$

Дефект энтропии, согласно [31, 34], определяется в общем случае выражением

$$\Delta H_{xy} = H_x + H_y - H_{xy}, \tag{5.281}$$

где H_x, H_y — энтропии тел X, Y и H_{xy} — совместная энтропия тел X и Y. Для рассматриваемой модели дефект энтропии равен [534]

$$-\Delta H_1 = I(x, y). \tag{5.282}$$

Согласно (5.273) имеем

$$|\Delta H_1| = I(x, y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sigma^2} + 1\right) \doteq \begin{cases} \ln(1/\sigma), & \sigma^2 \ll 1; \\ 1/2\sigma^2, & \sigma^2 \gg 1. \end{cases} \tag{5.283}$$

Информационный коэффициент полезного действия опреде-

ляется в виде

$$r_{\text{инф.max}} = \frac{|\Delta H_1|}{\Delta H_{2\max}} = \frac{I}{\Delta H_{2\min}} \sim \frac{\sigma}{2}\ln\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} Ie^{-I},\ \sigma^2 \ll 1. \quad (5.284)$$

Возможность эффективного управления процессом измерения без нарушения второго закона термодинамики обеспечивается соотношением [30, 534]

$$\Delta H_2 - |\Delta H_1| = \Delta H_2 (1 - r_{\text{инф max}}) \geqslant |\Delta H_3| > 0. \quad (5.285)$$

Соотношение (5.285) характеризует условия, при которых происходит упорядочение системы за счет получения информации.

Механический КПД $r_{\text{мех}}$ равен

$$r_{\text{мех max}} = \frac{U}{U + Q_{\Sigma\min}} \cong 1 - 2\sqrt{\frac{\varkappa T}{2U}}, \quad U \gg \varkappa T \quad (5.286)$$

и полностью характеризует достигнутый результат.

Приведенные результаты относятся к модели, в которой переданная энергия U полностью определяет информационные характеристики.

Оценки (5.276), (5.278) — (5.280), (5.285) позволяют дать оценки энергетической цены точности $\hat{e}_\sigma$ и единицы количества информации $\hat{e}_I$ [534]. Так, из (5.278) следует

$$\hat{e}_\sigma = \frac{Q_{\Sigma\min}}{1/\sigma} = 2\varkappa T. \quad (5.287)$$

Таким образом, цена точности при оптимальном замедлении процесса является постоянной величиной. При необратимой реализации процесса энергетическая цена точности

$$\hat{e}_\sigma^{(\text{н})} = \frac{1}{2}\varkappa T\left(\frac{1}{\sigma}\right) \quad (5.288)$$

и растет пропорционально точности. Аналогично из (5.283) и предыдущего [534]

$$\hat{e}_I = \frac{Q_{\Sigma\min}}{I} = 2\varkappa T \frac{1}{\sigma \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = 2\varkappa T \frac{e^I}{I},\ \sigma^2 \ll 1; \quad (5.287')$$

$$\hat{e}_I^{(\text{н})} = \frac{\varkappa T}{\sigma^2 \ln\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) + 1\right]} = \begin{cases} \dfrac{\varkappa T}{2I}\exp\{2I\}, & \sigma^2 \ll 1, \\ \varkappa T, & \sigma^2 \geqslant 1. \end{cases} \quad (5.288')$$

Из (5.287), (5.288) следует, что энергетическая цена единицы информации I в обоих вариантах процесса реализации растет относительно I по экспоненте. Для процессов обнаружения с точностью $1/\sigma_0$ порядка разрешающей способности $1/\varepsilon$ необходимо, чтобы вероятность ошибки

$$w \approx \frac{1}{\varepsilon} w_- \approx \varepsilon, \quad w_- \approx \varepsilon^2, \quad (5.289)$$

где w_- — вероятность ложного выброса в одном акте обнаружения. Энергия E_0 порогового уровня для обнаружения сигнала

$$E_0 \approx \varkappa T \ln \frac{1}{w_-} = 2\varkappa T \ln \frac{1}{\varepsilon} \tag{5.290}$$

и значение энергии сигнала

$$E_c \approx 2E_0 = 4\varkappa T \ln \frac{1}{\varepsilon} \approx 4\varkappa TI. \tag{5.291}$$

Следовательно, на первом этапе измерения достигается по порядку величины минимальная цена единицы информации.

5.15.3. О термодинамических моделях процесса обработки информации и энергетическом критерии сложности процесса обработки информации. Математические модели теории сложности освещены в [72, 502, 503] и п. 5.16. Здесь кратко рассматриваются физические ограничения на процессы обработки информации.

Под процессом обработки информации понимается однозначное отображение Г множества элементов $x \in X$ в множество элементов $\Gamma x = f \in X_f$, когда оба множества X, X_f являются подмножествами заданного множества чисел.

Физически процесс обработки информации представляется процессом косвенных измерений. Задача состоит в задании отображения Г и его реализации.

В [39, 534] рассмотрены две термодинамические модели обработки информации.

Процесс косвенных измерений, характеризующий процесс обработки информации, эквивалентен схеме преобразований

$$x \to y \xrightarrow{\Gamma} z \to f. \tag{5.292}$$

В (5.292) x — измеренная физическая величина; y — представляющий ее сигнал; z — представленный в том же виде сигнал, соответствующий значению функции $f(x)$. Здесь y и z характеризуют амплитуду сигналов, а их квадраты — энергию. Средние энергетические затраты пропорциональны

$$\langle f^2 \rangle = \int_X p(x) f^2(x)\, dx = \|f\|^2, \tag{5.293}$$

где $\|f\|$ — норма функции в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_2$, а расстояние $\rho(f, g)$ между функциями f и g

$$\rho^2(f, g) = \|f - g\|^2 = \int_X p(x)[f(x) - g(x)]^2\, dx. \tag{5.294}$$

Считаются заданными требования к точности реализации $f(x)$.

Требования к точности представления исходной переменной x определяются из требований к точности σ_{0f}:

$$\sigma_{0f}^2 = \sigma_{0x}^2 \int_X p(x) \left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx = \sigma_{0x}^2 \left\| \frac{df}{dx} \right\|^2. \tag{5.295}$$

При $p(x)=\text{const}$ имеем

$$1/\sigma_{0x} \geqslant 1/\sigma_{0f}. \tag{5.296}$$

Пусть

$$z = Bf, \quad y = Bu, \quad u = cx, \quad c > 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_m,$$
$$0 \leqslant u \leqslant cx_m. \tag{5.297}$$

Согласно [534], могут быть выбраны энергетически оптимальные значения

$$\varepsilon_x = \sqrt{3}\,\sigma_{0x}, \quad \varepsilon_f = \sqrt{3}\,\sigma_{0f} \geqslant \varepsilon_x. \tag{5.298}$$

Тогда энергетическая сложность данной модели обработки информации

$$S_x^f = S_f + S_x;$$

$$S_x^f \approx c\|f\|^2\left(1 + \left\|\frac{df}{dx}\right\|^2\right), \quad c = \text{const}. \tag{5.299}$$

Близость функций z и y из (5.297) характеризуется расстоянием $\rho^2(f, u)$ и согласно (5.294) имеет вид

$$\rho^2(f, u) = \int_X p(x)[f(x) - cx]^2\,dx. \tag{5.300}$$

Если $f(x) - cx \equiv \varphi(x)$, то

$$\rho^2(f, u) = \|\varphi(x)\|^2. \tag{5.301}$$

При $\|\varphi\| \ll \|f(x)\|$ в устройстве обработки информации используется энергия каждого i-го входного сигнала y_i, реализуя энергетические скачки

$$\zeta_i^2 = B^2\varphi_i^2 = B^2(f_i - cx_i)^2. \tag{5.302}$$

В такой модели обеспечивается непрерывный переход от обработки информации к измерению при $\|\varphi\| = \rho(f, u) \to 0$. Энергетическая сложность

$$S_x^\varphi = S_\varphi + S_x;$$

$$S_x^\varphi \approx c\,\|f\|^2\left(1 + \frac{\|\varphi\|^2 + \left\|\frac{d\varphi}{dx}\right\|^2}{\|f\|^2}\right). \tag{5.303}$$

Из (5.299), (5.300) определяется общая энергетическая сложность $S_{x,f}$ реализации функции $f(x)$ в виде

$$S_{x,f} = \min\{S_x^f, S_x^\varphi\}. \tag{5.304}$$

Допустим теперь, что сигнал $y = Bcx$ поступает на вход «черного ящика», помещенного в термостат с температурой T. В этом случае существует ненулевая вероятность произвольного

перехода y в заданное обработкой $z=Bf$. Чем выше эта вероятность, тем проще процесс обработки информации.

Конечные значения вероятностей перехода точки cx_i в ε_f-отрезок принимаются в виде

$$W_i(f_i \mid u_i) = \frac{B}{\sqrt{\pi}} \exp\{-B^2\varphi_i^2(x)\}\varepsilon_f, \tag{5.305}$$

а среднее по $p(x)$ значение логарифма от (5.306) имеет вид

$$\langle -\ln W(f \mid u)\rangle = \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} p_i \left[B^2\varphi_i^2(x) + \ln\frac{\sqrt{\pi}}{B\varepsilon_f}\right], \tag{5.306}$$

где $B\varepsilon_f = \text{const}$. Тогда

$$\lim \frac{\langle -\ln W(f \mid u)\rangle}{\langle -\ln W(1 \mid 0)\rangle} = \rho^2(f, u) \triangleq \|\varphi(x)\|^2, \qquad T \to 0. \tag{5.307}$$

Согласно [30, 534], величина минимальной работы, которую необходимо произвести над системой для перевода ее из исходного равновесного состояния в другое, равна показателю в экспоненте, описывающей вероятность соответствующей флуктуации. Таким образом, выражение (5.307) определяет значение среднего энергетического скачка для заданной обработки. В необратимом случае среднее значение роста энтропии будет пропорционально $\rho^2(f, u)$, а при оптимальной замедленной реализации счета — расстоянию $\rho(f, u)$.

Для энергетической меры сложности $S_{x,f}$ обработки косвенного измерения справедливо соотношение

$$S_{x,f} = S_f \frac{1}{r}, \qquad r < 1, \tag{5.308}$$

где S_f — энергетическая сложность обработки непосредственного наблюдения, т. е. коэффициент $1/r$ характеризует относительную сложность процесса обработки информации. С его помощью можно оценить увеличение сложности воспроизведения $f(x)$ по косвенной информации об x, доступной прямому измерению [534].

5.16. Информационная и алгоритмическая сложность процессов управления

В данном разделе кратко рассмотрим информационный и алгоритмический подходы к оценке сложности процессов управления динамическими системами, полагая последние как конечный объект [72].

5.16.1. Энтропийные оценки алгоритмической сложности динамических систем управления. Возможные подходы к определению алгоритмической сложности конечного объекта описаны в [71, 72, 502, 503] и мн. др.

Согласно [629], можно определить сложность конечного объекта по Колмогорову $K_A(x(n) \mid n)$, по Шайтину $C_U(x)$ и по Ковe-

ру $E_U(x)$ следующим образом:

$$K_A(x(n)|n) = \min_{A(p,n)=x(n)} l(p); \quad C(x) = \min_{U(p)=n} l(p);$$

$$E_U(x) = \min_{U(p)\subseteq n} l(p). \tag{5.309}$$

Здесь $l(p)$ — длина последовательности p; A можно рассматривать как вычислитель, p — как программу и x — выход. Рекурсивная функция $A: \{0, 1\}\times N \to \{0, 1\}$, где N — последовательность натуральных чисел; $U: \{0, 1\} \to \{0, 1\}$.

По Колмогорову, сложность $K(x)$ конечного объекта x определяется минимальным числом двоичных знаков (минимальной длиной программы $l(p)$), содержащих всю информацию о задаваемом объекте, достаточную для его восстановления. Сложность $K(x)$ интуитивно определяет количество информации, необходимой для восстановления объекта x.

Существует связь между сложностью $K(x)$ по Колмогорову и информационной энтропией Шеннона [502]

$$K(x) \prec i(H(q_k) + \alpha(i)), \tag{5.310}$$

где

$$H(q_k) = -\sum_{k=1}^{2^r} q_k \log_2 q_k; \quad \alpha(i) = c_r(\ln i)/i \to 0, \quad i \to \infty.$$

Следовательно, энтропия Шеннона — коэффициент при линейной части одной из частных сложностей.

Для введенных мер сложности (5.309) справедливы [629] следующие соотношения:

$$E(x) + c_0 \leqslant C(x) \leqslant E(x) + \log l(x) + c_1; \tag{5.311}$$

$$K(x|l(x)) + c_0 \leqslant C(x) \leqslant K(x|l(x)) + \log K(x|l(x)) + \log l(x) + c_1;$$

$$H(x) \leqslant M[C(x)|n] \leqslant H(x) + C.$$

Используя методы теории ценности информации [38, 39, 30] и соотношения (5.309)—(5.311), можно показать [39], что наиболее ценная информация дает минимальную сложность описания конечного объекта. Примеры другого подхода построения оценок информационной сложности в теории управления можно найти в п. 5.15.2.

Особенности взаимосвязи теории информации и теории управления освещены в [38, 39]. Смежные вопросы данного раздела рассматривались в [628, 630—635].

Приведенные результаты описывают качественный подход к решению первой из указанных частей проблемы — задачи построения корректных моделей динамических систем управления высокого уровня сложности как физических систем.

Рассмотрим теперь особенности возможного подхода к решению второй части указанной задачи.

5.16.2. Информационная сложность и эффективность рандомизации процессов управления. Принцип минимальной сложности в задачах управления. В теории сложности показано (см. [72]), что эффекта понижения сложности можно достигнуть за счет расширения возможностей базиса, что позволяет в каждой практической ситуации соизмерять возможности имеющихся средств и сложность поставленных задач. Можно дать оценку изменения сложности выполнения поставленной задачи при использовании другого базиса, если хотя бы для одного из имеющихся базисов как набора средств известны оценки сложности. Этот подход весьма важен для приложений теории управления.

В терминах математического программирования для класса задач принятия решения объекты управления представляют собой задачи вида [71, 72]

$$f_0(x)\to\min\,|\,x\in G\subset R^n,\ f_i(x)\leqslant 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (5.312)$$

Предполагается, что G — замкнутое подмножество R^n, f_i непрерывны на G. Множества объектов управления $\mathfrak{A}$ являются некоторым семейством задач вида (5.312) с общими G и m и отождествляются с некоторым семейством $\mathscr{P}$ непрерывных $m+1$-мерных вектор-функций на G, а объект управления с функцией $f=(f_0, \ldots, f_m)$.

Физические модели задач вида (5.312) рассмотрены в [39]. Здесь рассмотрим кратко вопросы реализации управления как численных методов, энергетические оценки сложности для которых даны в п. 5.15.3.

Сущность численного метода заключается в последовательности наблюдений задачи f и последующем формировании результата. Последовательность наблюдений задачи f состоит в вычислении значений функционалов задачи и их производных в тех или иных точках G, а результатом может быть как точка G (приближенное решение задачи f), так и ответ $*$ о несовместимости f. Работа прекращается после выдачи результата. Управляющими воздействиями метода оптимизации (согласно [72]) при пошаговом наблюдении являются те точки, в которых наблюдались функционалы задачи. Сформированным результатом является управляющее воздействие на шаге, следующем за шагами-наблюдениями, а так называемый символ бездействия Φ выдается на всех последующих шагах как некоторое фиктивное управление.

Формальное выражение реализации метода управления на задаче f как последовательности элементов имеет вид $x_1, x_2, \ldots, x_i\in X=G\cup\{*\}\cup\{\Phi\}$. Последний член последовательности x^∞, отличный от Φ, является результатом реализации x^∞. Трудоемкостью реализации x^∞ называется число отличных от Φ членов этой последовательности и равно числу шагов до выдачи результата.

Погрешность $\varepsilon(x, f)$ определяется в следующем виде:

$$\varepsilon(x, f) = \begin{cases} +\infty, f \text{ совместна}, x = *; \\ 0, f \text{ несовместна и } x = *; \\ m\,[(f_i(x) - f_{i*})/r_i(f)] \text{ — в остальных случаях.} \\ 0 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \tag{5.313}$$

В (5.313) $r_i(f) > 0$ — заданные нормирующие множители, $f_{i*} = 0$ при $i \geqslant 1$, f_{0*} равно оптимальному значению целевого функционала задачи f. Содержательной интерпретацией (5.313) является следующая трактовка: если $x \in G$ используется в приближенном решении f, то его погрешность равна максимальному превышению функционалами задачи в точке x требуемых от истинного решения значений, а сами превышения измеряются в заданных единицах $r_i(f)$.

Ответ оракула [71], соответствующего данному типу методов решения задач нелинейного программирования заданного класса, на вопрос является той информацией, которую получает метод, наблюдая задачу в точке x; сам оракул считается стационарным с полной памятью. Соответствующая функция наблюдения $\psi(f, \omega, x)$ при $x = *$ или $x = \Phi$ принимает некоторое фиксированное значение a.

Таким образом, классом задач математического программирования $\overline{\mathfrak{A}}$ является набор G, m, $\mathscr{P}_{\omega}$ (Ω, F_{ω}) — пространства шумов оракула и функции наблюдения $\psi(f, \omega, x)$ и соответствий $f \to r_i(f)$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Через $\widetilde{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{A}})$ обозначается класс всех стохастических $\overline{\mathfrak{A}}$-методов, а через $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{A}})$ — подкласс, соответствующий детерминированным методам с фиксированной остановкой.

В [71] множество $\Omega = \{\omega\}$ сведений, которое может получить исследователь, задавая вопрос или ставя эксперимент, названо информационным пространством, а отображение $\psi : G \times \mathfrak{A} \to 2^{\Omega}$, ставящее в соответствие паре (x, f) множество $\psi(x, f) \neq \varnothing$ из Ω, названо информационным отображением. Информационное отображение предполагается локальным: при $f^{(1)}, f^{(2)} \subset \mathfrak{A}$ и $f^{(1)} = f^{(2)}$ в некоторой окрестности x выполняется всегда $\psi(x, f^{(1)}) = \psi(x, f^{(2)})$.

При фиксированном классе задач $\mathfrak{A}$ и информационном отображении ψ данной априорной информации соответствует стратегия исследователя в виде M-шагового метода B^M решения задач класса $\mathfrak{A}$, под которым понимается набор решающих правил, устанавливающих зависимости между результатами проведенных экспериментов и выбором очередной точки, в которой может быть получена информация о функционалах, определяющих задачу.

M-шаговым методом B решения задач класса $\mathfrak{A}$, отвечающим информационному отображению ψ, назван набор $M+1$ отображений

$$q_i\colon (\Omega\times G)^{i-1}\to G \quad (i=1, 2, \ldots, M); \tag{5.314}$$
$$p\colon (\Omega\times G)^{M}\to G\cup\{*\}.$$

В (5.314) через $(\Omega\times G)^s$ обозначено декартово произведение $(\Omega\times G)$ на себя S раз.

Реализацией метода B^m на задче $f\in\mathfrak{A}$ по аналогии с изложенным выше называется последовательность $x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, \ldots x_M, \omega_M, x^*$, в которой $x_1=q_1(*)$, $\omega_i=\psi(x_i, f)$; $x_i=q_i(x_1, \omega_1, \ldots \ldots, x_{i-1}, \omega_{i-1})$ $(i=1, 2, \ldots, M)$; $x^*=p(x_1, \omega_1, \ldots, x_m, \omega_m)$; x^* — результат метода B^m на задаче f. Множество результатов всевозможных реализаций метода B^M на задаче f обозначено через $X^*(B^M, f)$.

Невязка $\varepsilon(x, f)$ для точки $x\in G$ определяется по (5.313). Отношение $\varepsilon(x, f)$ к нормирующему множителю $r(f)$ названо относительной погрешностью $\nu(x, f)$ точки $x\in G$ в качестве решения задачи f:

$$\nu(B^M, \mathfrak{A})=\sup\{\nu(B^M, f)\,|\,f\in\mathfrak{A}\}.$$

По аналогии с (5.313) относительной погрешностью метода B^M на задаче $f\in\mathfrak{A}$ называется величина [71]

$$\nu(B^M, f)=\begin{cases}+\infty, \text{ если } f \text{ совместна, } X^*(B^M, f)\ni *;\\ 0, \text{ если } f \text{ несовместна, } X^*(B^M, f)=\{*\};\\ \sup\{\nu(x, f)\,|\,x\in G\cap X^*(B^M, f)\} \text{ — в остальных случаях.}\end{cases}$$

Относительной погрешностью метода B^M на классе $\mathfrak{A}$ задач называется величина

$$\nu(B^M, \mathfrak{A})=\sup\{\nu(B^M, f)\,|\,f\in\mathfrak{A}\}.$$

Потенциальные возможности методов решения задач $\overline{\mathfrak{A}}$ оцениваются при помощи *функций сложности* классов $\overline{\mathfrak{A}}$ следующим образом:

$$\tilde{N}(\varepsilon)=\inf\{l\,|\,\exists\tilde{B}\in\tilde{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{A}}) : l(\tilde{B}, \overline{\mathfrak{A}})\leqslant l, \varepsilon(\tilde{B}, \overline{\mathfrak{A}})\leqslant\varepsilon\},$$
$$N(\varepsilon)=\inf\{l\,|\,\exists B\in\mathfrak{B}\subset\overline{\mathfrak{A}}) : l(B, \overline{\mathfrak{A}})\leqslant l, \varepsilon(B, \overline{\mathfrak{A}})\leqslant\varepsilon\}. \tag{5.315}$$

По (5.315) сложность $\tilde{N}(\varepsilon)$ определяет минимальную трудоемкость, для которой найдется стохастический $\overline{\mathfrak{A}}$-метод. Для последнего выполняется точность ε в решении задач при указанной трудоемкости. Аналогично функция $N(\varepsilon)$ определяет минимальную трудоемкость для детерминированных методов с фиксированной остановкой.

Для (5.313) выполняется важное соотношение [71]

$$\tilde{N}(\varepsilon)\leqslant N(\varepsilon). \tag{5.316}$$

Информационная сложность класса $\mathfrak{A}$, отвечающая информационному отображению ψ и относительной погрешности ν, определяется как функция [71]

$$N_{\mathfrak{A}}(\nu) = 1 + \inf\{M \mid \exists B^M : \nu(B^M, \mathfrak{A}) \leqslant \nu\} =$$

$$= 1 + \sup\{M \mid \forall B^M : \nu(B^M, \mathfrak{A}) > \nu\}. \qquad (5.317)$$

В (5.317) можно использовать и абсолютные величины погрешности.

Таким образом, информационная сложность $N_{\mathfrak{A}}(\nu)$ определяет наименьшее M, для которого существует M-шаговый метод B^M решения задач класса $\mathfrak{A}$, обеспечивающий на каждой задаче из $\mathfrak{A}$ относительную погрешность не выше ν. В информационной сложности не учитываются, следовательно, реальные затраты ресурсов как это делается в (5.315), а оценивается метод управления числом его шагов M, обеспечивающим накопление информации, достаточной для синтеза управления заданного качества ν в любой задаче рассматриваемого класса.

Таким образом, если трудоемкость, связанная с обработкой результатов эксперимента и выбором условий постановки очередного эксперимента, мала в (5.315) по сравнению с трудностями проведения эксперимента, то информационная сложность является объективной характеристикой трудоемкости решения задач управления данного класса.

Для рассматриваемых классов задач точное вычисление функций сложности получить трудно, но возможны удовлетворительные оценки, а расхождение между верхней оценкой $N(\varepsilon)$ и нижней оценкой $\overline{N}(\varepsilon)$ согласно (5.316) определяет сверху потенциальный эффект рандомизации.

Детерминированный метод в [71] назван правильным, если он на всякой задаче при любом шуме формирует последовательности одного из следующих трех типов:

$$\Phi, \Phi, \ldots, \Phi; \quad x_1, x_2, x_k, \ldots; \quad x_i \in G \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, \Phi, \Phi, \ldots, \Phi, \ldots; x_1, \ldots, x_k \in G, x_{k+1} \in G \cup \{*\}.$$

Оказалось, что в принципе при выборе метода можно ограничиться смесями правильных методов [71]. Это означает, что для всякого $\overline{\mathfrak{A}}$-метода $\overline{\mathfrak{B}}$ найдется смесь правильных методов $\overline{B} = \int_t^0 B^t dt$, эквивалентная $\overline{B}$ в том смысле, что на всякой задаче класса распределения трудоемкостей (погрешностей) методов $\overline{B}$ и $\overline{B}$ совпадают.

Пусть далее G — компакт в R^n, $h > 0$, k — натуральное число, а F состоит из сужений на G всех $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций f, для которых

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f_i(x + th) = D^{k-1} f_i(x)h$$

липшицевы по x с константой $L|h|^{k-1}$ при всех $h \in R^n$. Соответствующий класс задач есть набор $S_k(G, n, m, L)$. Оракул имеет дело с точками G. сообщая в них значения f_i и их частных произ-

водных до порядка $k-1$ включительно (предполагается, что шум отсутствует).

Нормирующий множитель принимается равным $r_i(f) \equiv r = (\rho^k L)/k!$, ρ — радиус наименьшего шара, содержащего G. Асферичностью G не выше α называется ситуация, когда есть пара концентрических шаров W, W' с отношением радиусов α и $W \subset G \in W!$.

Теорема 5.16 [71]. *Пусть асферичность G не выше α. Тогда сложности классов $S \equiv S_k(G, n, m, L)$ допускают оценки*

$$C_-(\alpha, n, k)[\varepsilon^{-1}]^{n/k} \leqslant \bar{N}(\varepsilon) \leqslant N(\varepsilon) \leqslant C_+(\alpha, n, k)](\varepsilon^{-1})^{n/k}]. \tag{5.318}$$

В (5.318) значения постоянных таковы, что если G — шар при $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $k = 2$, $n \geqslant 20$, $\bar{N}(\varepsilon) \geqslant (3/2)^n$. При $k = 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$ $\bar{N}(\varepsilon) \geqslant 3^n$ [71].

Для оценки информационной сложности имеем [71, 503]

$$I_G(2^{2+1/k}\rho(G)\nu^{1/k}) \leqslant N_B(\nu) \leqslant I_G(\rho(G)\nu^{1/k}), \tag{5.319}$$

где $I_G(\delta)$ — δ-энтропия G и определяется при каждом $\delta > 0$ как наименьшее число точек G, таких, что замкнутые δ-шары с центрами в этих точках покрывают все G. В (5.319) нижняя оценка справедлива при любом локальном информационном отображении.

Рассмотрим кратко влияние вида области G на информационную сложность [71, 72].

Пример 1. Следуя [71, 503], рассмотрим класс $C(G, H_n; m, V)$ задач вида (5.312), определяющийся непрерывными и выпуклыми на выпуклом замкнутом множестве G функциями $f_i(x)$, $x \in H_n$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ с колебанием на G, не превышающим V:

$$[\max_G f_i(x) - \min_G f_i(x)] \leqslant V, \qquad \forall i. \tag{5.320}$$

Информационное отображение Φ^C сопоставляет паре (x, f) вектор $f(x)$ при $x \in \partial G$, при $x \in \operatorname{int} G$ — вектор $f(x)$ и набор опорных к компонентам f в точке x функционалов. В качестве нормирующего множителя для задач $f \in C$ принимается величина V колебания f на G.

Необходимо оценить информационную сложность задач класса $C(G, H_n; m, V)$ при трех различных областях G определения функционалов f. В первом варианте G — произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество в H_n, не содержащееся ни в какой гиперплоскости. В этом случае [71, 503]

$$\frac{1}{4} k \ln \nu^{-1} \leqslant N_C(\nu) \leqslant 3n \ln \nu^{-1}. \tag{5.321}$$

Во втором варианте область G — параллелепипед в H_n $(n < \infty)$. Тогда

$$\left(\frac{n}{3} \ln 2\right) \ln (28\nu)^{-1} - 1 \leqslant N_C \leqslant 3n \ln \nu^{-1}. \tag{5.322}$$

Таким образом, в (5.322) изменилась нижняя оценка по сравнению с (5.321). В третьем варианте G — выпуклое тело асферичности α имеем

$$\max\left(\frac{k}{2}\ln 2\right)\ln\left(28\sqrt{k}\,\alpha\nu\right)^{-1}-1\leqslant N_C(\nu)\leqslant\left]16\alpha^2/\nu^2\right[; \tag{5.323}$$

$$\min\left\{n\left[4\alpha^2\nu^2\right]^{-1}\right\}-1\leqslant N_C(\nu)\leqslant 3n\ln\nu^{-1}. \tag{5.324}$$

Выражения (5.321)—(5.324) позволяют дать количественные оценки чувствительности $N_C(\nu)$ как к изменению параметров внутри фиксированной области G, так и к изменению самого базиса G.

Приведем некоторые результаты для подобных задач с учетом (5.315) более общего вида [71].

Пример 2. Пусть G — выпуклое ограниченное тело в R^n, G_0 — его внутренность, $V_0, \ldots, V_n>0$. Далее, пусть $\mathscr{F}$ состоит из всех покомпонентно выпуклых функций на G таких, что $\sup\limits_G f_i-\inf\limits_G f_i\leqslant V_i$. Оракул в точках G_0 сообщает $f(x)$ и набор $f_0'(x), \ldots, f_m'(x)$ опорных к f_i в x функционалов, в точках границы G сообщается только $f(x)$. Нормирующие множители $r_i(f)\equiv V_i$. Верхние границы функции сложности по всем оракулам класса называются сложностями $\widetilde{N}(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$.

Класс общих выпуклых задач $C(G, n, m; V_0, \ldots, V_m)$, а соответствующие методы — методы выпуклого программирования первого порядка.

Теорема 5.17 [71]. *Сложности $\widetilde{N}(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ класса $C=C(G, n, m; V_0, \ldots, V_m)$ допускают следующую оценку:*

$$\frac{C_-n\ln\varepsilon^{-1}}{\ln\ln\varepsilon^{-1}}\leqslant\widetilde{N}(\varepsilon)\leqslant N(\varepsilon)\leqslant C_+n\ln\varepsilon^{-1}\ \text{при}\ \varepsilon\leqslant\varepsilon(G), \tag{5.325}$$

$\varepsilon(G)>0$, $C_+, C_->0$. *Если же G — параллелепипед, то уже при* $\varepsilon\leqslant 10^{-2}$

$$\frac{C_-n\ln\varepsilon^{-1}}{\ln\left(n\ln\varepsilon^{-1}\right)}\leqslant\widetilde{N}(\varepsilon)\leqslant N(\varepsilon)\leqslant C_+n\ln\varepsilon^{-1}. \tag{5.326}$$

Из (5.325), (5.326) следует, что и в этом случае при изменении G меняются существенно нижние оценки.

Для параллелепипедов G имеем $\widetilde{N}(\varepsilon)=0(N(\varepsilon)/\ln N(\varepsilon))$.

Аналогичные оценки для общих выпуклых задач большой размерности были получены в [71]. Оценка (5.326) дает асимптотику сложности класса общих выпуклых задач на параллелепипедах как по $n\to\infty$, так и по $\varepsilon\to 0$. Для произвольного выпуклого G оценка (5.325) дает такую асимптотику только по $\varepsilon\to 0$. Оказалось, что поведение сложности при $n\to\infty$ также существенно зависит от геометрии G. Для параллелепипедов имеет место рост сложности со скоростью $0(n/\ln n)$, а для областей типа эллипсоидов сложность ограничена равномерно по n.

Теорема 5.18 [71]. *Пусть G — выпуклое тело в R^n асферичности не выше α. Тогда для сложностей классов $C(G, n, m; V_0, \ldots, V_m)$ в асимптотике по $n\to\infty$ справедливы оценки*

$$\left]C_-/\alpha^2\varepsilon^2\right[\leqslant\widetilde{N}(\varepsilon)\leqslant N(\varepsilon)\leqslant C_+\alpha^2/\varepsilon^2, \tag{5.327}$$

$C_-, C_+>0$ — *абсолютные постоянные.*

В (5.327) правая часть практически не меняется при всех n, а левая часть при $n\geqslant 0$ как $(\ln\varepsilon^{-1}/\varepsilon^6)$. Так, для G при $\alpha=1$ (шар) в асимптотике $n\to\infty$ $\widetilde{N}(\varepsilon)\approx N(\varepsilon)\approx\varepsilon^{-2}$.

Пример 3. Пусть теперь вычисления проводятся в присутствии помех.

Для задач вида $f(x)\to\min|x\in G\subset R^n$, где G — выпуклое замкнутое ограниченное тело в R^n, а f — выпуклая липшицева функция на G, функция наблюдения $\psi(t,\omega,x)=(\psi_0(f,\omega,x),\psi_1(f,\omega,x)$ принимает значения в $R\times R^n$ со следующими свойствами:

$$\int\psi_0(f,\omega,x)\,dF_\omega=f(x),\quad\int\psi_1(f,\omega,x)\,dF_\omega=\varphi(x)\in f'(x)\tag{5.328}$$

при всех $x\in G$ и всех выпуклых липшицевых f. Точность стохастического оракула $\overline{\psi}$, отвечающего этой функции наблюдения, оценивается верхними границами дисперсий величин $\psi_0(f,\omega,x)$ и $\psi_1(f,\omega,x)$. Вводится параметр $L>0_+$, такой, что $C_L^{\overline{\psi}}(G)$ состоит из всех выпуклых на G функций f, для которых при всех $x\in G$

$$\int\psi_1^2(f,\omega,x)\,dF_\omega\leqslant L^2.\tag{5.329}$$

В частности,

$$\int\psi_1^2(f,\omega,x)\,dF_\omega\leqslant L^2\rho^2,\qquad f\in C_L^{\overline{\psi}}(G),\tag{5.330}$$

где ρ — радиус G. Следовательно, можно имитировать оракула с оценками (5.329), (5.330).

Нормирующий множитель $r=\rho L$.

Теорема 5.19 [71]. *Сложность $\widetilde{N}(\varepsilon)$ любого класса $C_L^{\overline{\psi}}(G)$ допускает оценку* ($\varepsilon\leqslant 10^{-1}$)

$$\widetilde{N}(\varepsilon)\leqslant\frac{C_1}{C_2}\,\frac{\ln^2\varepsilon^{-1}}{(\ln\ln\varepsilon^{-1})^2}.\tag{5.331}$$

Вместе с тем для всякого $\varepsilon<10^{-2}$ при всех G и $L>0$ найдется оракул ψ_ε указанного выше типа, для которого

$$\widetilde{N}(\varepsilon)\geqslant C_2/\varepsilon^2.\tag{5.332}$$

Здесь C_1, C_2 — абсолютные константы.

Здесь не требуется никакой регулярности минимизируемой функции.

При некоторых предположениях о регулярности выпуклой функции регрессии в теории стохастической аппроксимации доказывается, что для соответствующих процессов средняя точность N-го приближения $0(1/\sqrt{N})$, а в асимптотике по $0(1/N)$. Для приведенной оценки имеем $0(\ln N/\sqrt{N})$.

Для выпуклого программирования, когда вычисляются только значения $f(x)$ (оракул нулевого порядка), надлежащий случайный поиск позволяет получить оценку сложности класса $C(G,n,m;V_0,\ldots,V_m)$ вида $0(n^2\ln\varepsilon^{-1})$, тогда как для детерминированных лучшая из известных оценок $0(n^7\ln n\ln\varepsilon^{-1})$.

Таким образом, рандомизация процессов управления для конкретных классов задач может принести существенный выигрыш. Более того, применение методов стохастического программирования показало, что использование стохастических методов оправдывается с точки зрения организации вычислительных процессов.

В конечно-шаговых методах B^M, рассмотренных выше, число шагов было одно и то же для всех задач данного класса. В [71,

503] был рассмотрен случай, когда число шагов не ограничивается, а момент остановки и выдачи результата определяется автоматически в процессе применения метода. Приведем соответствующие определения и результаты.

Пусть $G \subset H_n (n \leqslant \infty)$ — выпуклое замкнутое тело радиуса ρ; $\bar{C}(G, H_n, L)$ — класс задач вида (5.312), у которых $f_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — липшицевы с константой L на G и локально выпуклые на $\operatorname{int} G$ функции. Далее предполагается, что при решении задач класса $\bar{C}$ используется информационное отображение Φ^c, а в качестве нормирующего множителя, как и ранее, используется $r = 2\rho h$.

Задача $f \in \bar{C}(G, H_n, L)$ называется ε-выпуклой существенной размерности k, если найдется покомпонентно выпуклая вектор-функция f^0 той же размерности, что и f, зависящая в надлежащем базисе H_n лишь от k координат, такая, что для всякого j и $x \in \operatorname{int} G$ и всякого опорного к f_i в x функционала P найдется опорный к f_j^0 в x функционал P', что $|P - P'| \leqslant 2\varepsilon L$.

Рассматривается случай выпуклых задач, у которых число «существенных переменных» меньше размерности задачи. Для ε-выпуклой задачи $\bar{C}(G, H_n, L)$ существенной размерности k при условии $\varepsilon < \nu/80$ ее приближенное решение, удовлетворяющее заданному ограничению на точность, определяется не более чем за $\ln(40/\nu) \cdot \ln(2k \ln 40\nu^{-1}/\nu)$ шагов, где $C = \text{const}$. Для 0-выпуклых существенной размерности k задачи решаются адаптивным методом A, разработанным в [71] за $Ck \ln(2k/\nu)$ шагов.

Согласно приведенным выше оценкам задачи класса $\bar{C}$, который является подклассом класса C выпуклых задач, асимптотически по $\nu \to 0$ не могут быть решены с точностью ν быстрее чем за $C'k \ln \nu^{-1}$ шагов. Это означает, что при заданных для каждой такой задачи числах «существенных» переменных можно обеспечить требуемую точность за $C''k \ln \nu^{-1}$ шагов. Тогда увеличение сложности до 0 $(k \ln 2k/\nu)$ метода A по сравнению с 0 $(k \ln \nu^{-1})$ может быть интерпретировано как цена «априорного незнания» существенных переменных.

В основу оценок сложности методов решения задач класса $\mathfrak{A}$, рассмотренных с позиции информационной сложности, было положено требование, чтобы эти методы обеспечивали при заданных затратах необходимую точность решения любой задачи класса. Если в классе задач или на множестве значений информации, накапливаемой от эксперимента к эксперименту о функционалах f, задана мера, то можно ослабить требования к выбору метода и даже допускать в ряде случаев нарушение условий, которым должен удовлетворять метод, на множестве малой меры или заменить жесткую оптимизацию. Это дает возможность разработать разновидности подходов к оценке сложности и проектирования методов управления [71, 503].

M-шаговый метод решения задач класса $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как набор решающих правил

$$x^M = x^M(\omega^{M-1}) = \{x_1, x_2(\omega^1), \ldots, x_M(\omega^{M-1})\}.$$

Это позволяет связать подход к оценке информационной сложности класса $\mathfrak{A}$ с выбором оптимальных решающих правил многоэтапной задачи стохастического программирования, в которой требуется оптимизировать некоторую статистическую характеристику качества решения задач $j \in \mathfrak{A}$ при заданных статистических ограничениях на затраты и другие характеристики качества решения [71]. Здесь качество решения каждой задачи зависит только от точки x_M, принимаемой за приближенное решение f, а затраты на процесс решения зависят от всей траектории $x_M = (x_1, \ldots, x_M)$.

5.17. Релятивистские аспекты информационной теории управления

5.17.1. Предварительные замечания. Отметим одну особенность приведенной выше оценки пропускной способности дискретного канала передачи информации при гауссовских сигналах

$$C = \ln(1 + P/N). \tag{5.333}$$

Если в (5.333) при $P = \text{const}$ принять $N = 0$, то $C = \infty$, что физически неосуществимо и приводит в этом случае к противоречию. Отмеченный недостаток исправляет квантовая теория информации [30—35, 39]. В отличие от классического случая в квантовых каналах связи скорость передачи информации при заданной мощности P полезного сигнала даже в отсутствие помех N является конечной величиной. Так, для заданных уровней мощностей полезного сигнала P и шума N семейства гауссовских состояний для квантового аналога соответствующая формула [30, 33] имеет вид

$$C = \ln[1 + P/(N+1)] \tag{5.334}$$

и при $N = 0$ величина C в (5.334) конечная. Здесь замена N на $N+1$ обусловлена учетом квантовых эффектов [33]. В классическом случае при $N \to \infty$ различие между приведенными формулами (5.333), (5.334) исчезает.

Во многих случаях общей теории динамических систем для гауссовских полей оптимальные статистические процедуры оказываются, как правило, линейными. Так, например, для стационарных полей линейные статистические задачи приводят к уравнению вида

$$b(t) = \int_T B(t-s)\, x(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{5.335}$$

Соответствующие задачи для квантовых процессов приводят также к интегральному уравнению, но в отличие от (5.335) оно имеет следующий вид [33]:

$$b(t) = \frac{\hbar}{2}\, x(t) + \int_T B(t-s)\, \dot{x}(s)\, ds. \tag{5.336}$$

Таким образом, учет физической (в данном случае квантовой) природы поля приводит одновременно к более корректной математической модели регуляризации некорректного (по Тихонову) классического уравнения (5.335).

Выше было отмечено, что при отсутствии шума N скорость передачи информации по Шеннону равна ∞. Это обстоятельство находится в противоречии с основным положением теории относительности о конечной скорости распространения всякого сигнала, несущего информацию, а следовательно, энергию и импульс.

Скорость передачи информации становится конечной величиной в квантовой классической (нерелятивистской) теории информации, что объясняется естественным наличием квантовых (не тепловых) флуктуаций.

Практические задачи управления требуют разработки релятивистской (не квантовой) теории информации, в которой скорость передачи информации удовлетворяла бы основному релятивистскому требованию, т. е. была бы конечной величиной. Один из возможных вариантов подобной теории был разработан в [29], который следует рассматривать как первую попытку построения релятивистской теории информации.

Вместе с тем развитие релятивистской теории информации имеет существенное значение для таких отраслей новой техники, как космическая радиосвязь и управление космическими объектами. Характер изменения количества информации с точки зрения различных систем отсчета в теории относительности может оказаться существенным в инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов [4].

Здесь ограничимся кратким изложением основ релятивистской теории информации и ее взаимосвязи с общей теорией динамических систем [29, 39].

Статистическая теория информации Шеннона основана на идее существования абсолютного количества информации, не зависящего от наблюдателя, который использует эту информацию. В таком виде теория информации использует только синтаксис, не учитывая в явном виде смысловое и ценностное содержание передаваемой информации.

Для исследования отмеченных ситуаций в [29] было введено понятие релятивистского количества информации, основанное на идеях теории относительности и общей теории динамических систем [29, 7].

Рассмотрим некоторые основные особенности такого подхода к классическим понятиям теории передачи информации. Более полное изложение отмеченного подхода и основные следствия можно найти в [29].

5.17.2. Релятивистские меры количества информации. Следуя идеям теории относительности, извлекаемая из объекта информация характеризуется теперь тройкой (S, I, R), где S — система отсчета, характеризующая исследуемый объект; I — количество информации, извлекаемое из объекта в данной системе от-

счета, R — наблюдатель, получающий информацию I. Пусть задано в системе отсчета S множество U однородных физических объектов и зафиксирован наблюдатель R. Исследуемые объекты для наблюдателя R в системе отсчета S образуют динамическую систему вида $(S/R) \subset U$.

Информация, извлекаемая из системы (S/R) относительно системы $(\bar{S}/S)$, характеризуется четырьмя параметрами состояния: 1) *внутренняя энтропия* $H_i(S/R)$, которая характеризует количество информации, извлекаемое наблюдателем R в системе отсчета S (внутренняя структура системы (S/R)); 2) *внешняя энтропия* $H_0(\bar{S}/R)$, характеризующая количество информации, извлекаемое наблюдателем R из системы (S/R) с точки зрения системы отчета $\bar{S}$, т. е.

$$H_0(\bar{S}/R) = H_i(\bar{S}/S/R). \tag{5.337}$$

3) величина $v(S/R)$, характеризующая объективное состояние системы (S/R), например, в смысле минимизации заданного функционала или качественная оценка принадлежности заданному классу; 4) величина $w(S/R)$, характеризующая предельные возможности передачи информации внутри системы (S/R).

Так как все четыре параметра зависят от наблюдателя R, то они являются относительными и, согласно [29], выполняется следующее соотношение:

$$H_i(U/U) = cH_0(U/U), \tag{5.338}$$

где c — заданная постоянная величина, которая зависит от принятых единиц измерения.

Следуя результатам главы 3, рассмотрим выражение для информационной метрики [29]

$$d\sigma^2(S/R) = c^2 dH_0^2(S/R) - dH_i^2(S/R) - dv^2(S/R) - dw^2(S/R). \tag{5.339}$$

Тогда информационное описание эволюции системы (S/R) из состояния Φ_1 в состояние Φ_2 будет определяться по аналогии с теорией относительности как

$$\sigma(\Phi_2/R) - \sigma(\Phi_1/R) = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} (d\sigma(S/R)). \tag{5.340}$$

Если обозначить через

$$\rho \triangleq (1 - u^2/c^2)^{-1/2}, \tag{5.341}$$

то с учетом (5.341) преобразование Лоренца можно записать в следующем виде:

$$H_i' = \rho(H_i + uH_0), \quad v' \triangleq v, \; w' = w, \quad H_0' = \rho\left(H_0 + \frac{u}{c^2} H_i\right); \tag{5.342}$$

или

$$H_i = \rho\,(H_i' - uH_0'), \qquad v = v', \; w = w', \qquad H_0 = \rho\left(H_0' - \frac{u}{c^2} H_i'\right). \tag{5.343}$$

Параметр

$$u = u(R/R') = dH_i(R/R')/dH_0(R/R') \tag{5.344}$$

характеризует степень упорядоченности (организационной способности) системы (S/R) с точки зрения наблюдателя R'.

Внутреннее релятивистское количество информации $I(S/R/R')$, извлекаемое из системы (S/R) наблюдателем R с точки зрения наблюдателя R', определяется с учетом (5.342) в виде

$$I_i(S/R/R') \triangleq H_i(S/R') - \rho\,(R/R')\,H_i(S/R) = \rho\,(\boldsymbol{R}/R')\,u(R/R') \times \\ \times H_0(S/R). \tag{5.345}$$

Внешнее релятивистское количество информации $I_0(S/R/R')$, извлекаемое из системы (S/R) наблюдателем R с точки зрения наблюдателя R' в системе отсчета $\bar{S}$, определяется с учетом (5.338) и (5.337) по аналогии с (5.345) в виде

$$I_0(S/\boldsymbol{R}/R') \triangleq H_0(S/R') - \rho\,(R/\boldsymbol{R'})\,H_0(S/R) = \frac{1}{c^2}\,\rho\,(\boldsymbol{R}/R')\,u(R/R') \times \\ \times H_i(S/R). \tag{5.346}$$

Тогда метрику (5.339) для релятивистского количества информации можно представить в следующем виде:

$$dI^2(S/R/R') \triangleq dI_i(S/R/R') - c^2 dI_0(S/\boldsymbol{R}/R') = \left(\rho\,\frac{u}{c}\right)_{R/R'} d\sigma^2(S/R). \tag{5.347}$$

Приведенные результаты могут быть обобщены на заданное множество косвенных наблюдателей. Так, для трех наблюдателей R, R', R'' внутреннее количество информации $I_i(S/R/R'/R'')$, передаваемое от системы наблюдателей (R/R') наблюдателю R'' о внутренней структуре системы (S/R), определяется в виде

$$I_i(S/R/R'/R'') \triangleq H_i'' - \rho\rho'\left(1 + \frac{uu'}{c^2}\right) H_i. \tag{5.348}$$

Но так как

$$H_i'' = H_i(S/R''), \quad H_0'' = H_0(S/R''), \quad u' = u(R'/R''),$$

$$\rho' = \left[1 - \frac{u^2}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.349}$$

то (5.346) преобразуется к следующему виду:

$$I_i(S/R/R'/R'') = \rho\rho'\,(u + u')\,H_0. \tag{5.350}$$

Аналогично внешнее релятивистское количество информации $I_0(S/R/R'/R'')$, передаваемое системой (R/R'), имеет вид

$$I_0(S/R/R'/R'') \triangleq H_0'' - \rho\rho' \left(1 + \frac{uu''}{c^2}\right) H_0 = \rho\rho' \frac{u+u'}{c^2} H_i. \quad (5.351)$$

Тогда метрика $dI^2(S/R/R'/R'')$ имеет вид

$$dI^2(S/R/R'/R') \triangleq dI_i^2(S/R/R'/R'') - c^2 dI_0^2(S/R/R'/R'') =$$

$$= \left(\rho\rho' \frac{u+u'}{c^2}\right)^2 d\sigma^2(S/R). \quad (5.352)$$

Полученные обобщения являются следствием применения преобразований Лоренца к соответствующим вариантам (5.345)—(5.347).

Приведенным соотношениям можно дать следующую лингвистическую интерпретацию [29]:

система S→предложение,

наблюдатель R→субъект, высказывающий предложение,

косвенный наблюдатель R'→субъект, оценивающий предложение,

внутренняя энтропия H_i→синтаксис предложения,

внешняя энтропия H_0→семантика (смысловое содержание) предложения.

Тогда в лингвистической системе S будут выполняться следующие соотношения для внутреннего количества информации I_i и внешнего количества информации I_0:

$$I_i(S/R/R') = (\rho u)_{R/R'} H_0(S/R),$$

$$I_0(S/R/R') = \left[\frac{\rho u}{c^2}\right]_{R/R'} H_i(S/R).$$

5.17.3. Информационные аспекты релятивистской теории динамических систем. Введем, следуя [29], понятие условной *релятивистской структурной энтропии* $E(S/R/R')$ как величины, определяемой соотношением

$$dE(S/R/R') \triangleq \frac{1}{c} \rho(R/R') u(R/R') \frac{d\sigma(S/R)}{\sigma(S/R)} = \frac{dI(S/R/R')}{\sigma(S/R)}. \quad (5.353)$$

Тогда величина $dE(S/R/R')$ определяет из (5.353) прямую релятивистскую структурную энтропию.

Допустим, что задан набор систем отсчета $S \triangleq \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ и пусть $\{R_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — набор заданных косвенных наблюдателей, так что $\{R_i\} \triangleq R_i^1/R_i^2/\ldots/R_i^n$ — последовательность, с помощью которой наблюдатель R' получает информацию в S_i. Через $E(S_i/R_i/R')$ обозначим условную релятивистскую структурную энтропию системы (S_i/R_i) с точки зрения системы $(\{R_i\}/R'')$. Тогда $E(S/\bigcup_{i=1}^{n} R_i/R')$ определяется как

$$dE(S/\bigcup_{i=1}^{n} \{R_i\}/R') = \sum_{i=1}^{n} dE(S_i/\{R_i\}/R') \quad (5.354)$$

и характеризует потенциальную информацию. Это значит, что если рассматривать систему (S/R') как информационную последовательность, то наблюдатель R' может извлечь максимальное количество информации $I(R'/R'/S)$, определяемое из соотношения

$$dI(R'/R'/S) = \sigma(R'/R')\, dE(S/S/R'). \tag{5.355}$$

Из выражения (5.355) можно получить *эволюционный принцип*, характеризующий информационные условия поведения динамических систем [29]: развитию динамических систем соответствует максимальное значение прямой структурной релятивистской энтропии $E(S/S/R')$.

Рассмотрим теперь следующую ситуацию. Допустим, что n косвенных наблюдателей R_i', $1 \leqslant i \leqslant n$ извлекают информацию $I(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i')$ о системе (S/R), образуя общую систему

$$\left(\sum\nolimits_{/}/\sum\right) \equiv (S/R/R_1' + \ldots + R_n').$$

Количество информации $I(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i')$ определяется из следующего уравнения [29]:

$$dI\left(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i'\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} K(R/R')\right] d\sigma(S/R), \tag{5.356}$$

где

$$K(R/R_i') \triangleq \frac{1}{c}\, \rho(R/R_i')\, u(R/R_i'). \tag{5.357}$$

Тогда, учитывая уравнения (5.354), (5.353), получим из (5.356), (5.357) следующее соотношение:

$$\frac{dI\left(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i'\right)}{\sigma(S/R)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dI(S/R/R')}{\sigma(S/R)} = \sum_{i=1}^{n} K(R/R') \frac{d\sigma(S/R)}{\sigma(S/R)}. \tag{5.358}$$

В частности, в приведенных обозначениях для лингвистической системы S, рассмотренной выше в п. 5.17.2, будет выполняться следующее метрическое соотношение:

$$I^2(S/R/R') = K^2(R/R')\, \sigma^2(S/R).$$

Рассмотрим теперь обобщение полученного соотношения (5.356) на случай, когда косвенные наблюдатели являются распределенными dR'. Уравнение (5.356) при сделанных допущениях преобразуется к виду [29]

$$dI\left(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i'\right) = \left[\frac{1}{c}\int_0^c \frac{u(R')}{\sqrt{1 - u^2(R')/c^2}}\, du(R')\right] d\sigma(S/R) =$$

$$= c\, d\sigma(S/R). \tag{5.359}$$

или

$$\frac{dI\left(S/R/\sum_{i=1}^{n} R_i'\right)}{d\sigma\,(S/R)} = c. \qquad (5.360)$$

Из (5.360) получаем непосредственно следующее важное следствие: величина c определяет максимальную скорость передачи информации о состоянии (S/S) в системе (S/S) и не зависит от системы отсчета. Такой же результат другим методом был получен непосредственно из анализа основных положений теории относительности в главах 2, 3 и из уравнений релятивистской квантовой теории в гл. 4.

Таким образом, ограничения на процессы передачи информации, полученные из информационной и физической моделей, совпадают.

Рассмотрим теперь некоторые следствия релятивистской теории информации.

5.17.4. О связи со статистической теорией информации Шеннона. Предположим, что множество U состоит из двух случайных экспериментов α и β и зафиксирован наблюдатель R'. Условная запись этого факта имеет вид $U=\alpha.\beta.R'$. При этом наблюдатель R' определяет результат эксперимента β по результатам эксперимента α.

В системе $(S/R/R')$, определяющей процесс наблюдения, сделаем следующую подстановку: $S\equiv\gamma$, $R\equiv\beta$, $R'\equiv\alpha$, где α, β, γ — случайные независимые эксперименты, т. е. $(\gamma/\beta/\alpha)\equiv(\gamma/\beta\alpha)$, $H_i(\gamma/\beta/\alpha)=H(\gamma/\beta\alpha)$.

Информация, извлекаемая наблюдателем R' из эксперимента β по результатам эксперимента α, есть внутренняя релятивистская информация

$$I_i(\beta/\alpha/R') = H_i(\beta/R') - \rho\,(\alpha/R')\,H_i(\beta/\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\,(\alpha/R')\,u\,(\alpha/R')\,H_0(\beta/\alpha). \qquad (5.361)$$

Величина $H_0(\beta/\alpha)$ определяется из уравнения

$$H_0(\beta/\alpha) = H_i(\alpha R'/\alpha\beta) = H_i(\alpha/\alpha\beta) + H_i(R'/\alpha\alpha\beta) =$$
$$= H(\alpha/\beta) + H_i(R'/\alpha\beta). \qquad (5.362)$$

Здесь $H_i(R'/\alpha\beta)$ означает количественную меру неопределенности наблюдателя R' о результате эксперимента β при заданном α и характеризует меру возможности определения результатов эксперимента β по результатам эксперимента α.

Тогда

$$I_i(\beta/\alpha/R') = \rho\,(\alpha/R')\,u\,(\alpha/R')\,[H(\alpha/\beta) + H_i(R'/\alpha\beta)], \qquad (5.363)$$

где

$$u\,(\alpha/R') = \frac{dH\,(\alpha/R')}{dH\,(\beta/\alpha) + dH_i\,(R'/\beta\alpha)}. \qquad (5.364)$$

Из (5.363), (5.364) следует

$$dI_t(\beta/\alpha/R') \cong dH(\alpha/R') \frac{dH(\alpha/\beta) + dH_t(R'/\alpha\beta)}{dH(\beta/\alpha) + dH_t(R'/\alpha\beta)}.$$

Предположим, что

$$\frac{dH_t(R'/\beta\alpha)}{dH(\beta/\alpha)} \ll 1, \quad \rho(\alpha/R') \simeq 1.$$

Тогда

$$dI_t(\beta/\alpha/R') \cong dH(\alpha/R') \frac{dH(\alpha/\beta) + dH_t(R'/\alpha\beta)}{dH(\beta/\alpha)}. \tag{5.365}$$

Эквивалентная форма уравнения (5.365) имеет вид

$$dI_t(\beta/\alpha/R') \cong dH(\alpha/R') \left[1 + \frac{dH_t(R'/\alpha\beta)}{dH(\beta/\alpha)}\right]. \tag{5.366}$$

В силу первого условия $[dH_t(R'/\alpha\beta)/dH(\beta/\alpha)] \ll 1$ и из (5.366) следует

$$dI_t(\beta/\alpha/R') \cong dH(\alpha/R')$$

или

$$I_t(\beta/\alpha/R') \cong H(\alpha/R'). \tag{5.367}$$

Из (5.345) и (5.367) при сделанных предположениях следует

$$I(\beta/\alpha) \cong H(\beta) - H(\beta/\alpha), \tag{5.368}$$

что совпадает с результатами К. Шеннона [501].

Следует отметить, что из сделанных предположений вытекает следующее условие:

$$I_t(\beta/\alpha/R') = c^2 I_0(\beta/\alpha/R'). \tag{5.369}$$

Аналогичным образом исследуются вопросы оценки пропускной способности каналов передачи информации в релятивистской постановке задачи [29].

В заключение рассмотрим два примера применения меры количества информации Шеннона в теории динамических систем управления.

Пример 1. *Информационные условия инвариантных линейных САУ.* Следуя [636], рассмотрим кратко информационные условия инвариантности линейных САУ. Задается процесс $\xi_x(x, t)$, принимающий значения на ограниченном множестве X с заданной метрикой $\rho(x) = |x_1 - x_2|$, $x_1, x_2 \in X$, который должен воспроизводиться автоматической системой при условии помехи в виде воздействия $\xi_f(f, t)$ ($f \in F$ ограничено), приложенной к другой точке. Процесс на выходе САУ $\xi_{x'}(x', t)$ принимает значение на ограниченном множестве с такой же метрикой. Многие САУ приводятся к подобной постановке задачи, если требуется предварительное функциональное преобразование управляющего воздействия ξ.

В случае реализации условия абсолютной инвариантности

$$x^i \equiv x^i, \tag{5.370}$$

где i — номер реализации процесса ансамбля ξ.

При такой общей постановке можно рассматривать САУ как систему передачи информации. В силу того что воздействия приложены к системе в разных точках и САУ линейна, передачу каждого воздействия можно рассматривать отдельно. Для рассматриваемого случая уравнение передачи информации (баланс энтропий выходной координаты САУ, возмущающего и управляющего воздействий) имеет вид [636]

$$H_2'(\xi') = H_1'(\xi) + \frac{1}{2W}\int_W \log|\Phi(j\omega)|^2 d\omega, \tag{5.371}$$

где W — полоса частот ансамбля ξ; $H_1'(\xi)$ — энтропия ансамбля ξ на степень свободы; $H_2'(\xi')$ — энтропия на степень свободы сигнала выхода; $\Phi(j\omega)$ — частотная характеристика фильтра (частотная характеристика замкнутой САУ).

Из условий абсолютной инвариантности (5.370), как следствие, неискажающаяся информация равна

$$H_1'(\xi) = H_2'(\xi'), \tag{5.372}$$

$$\int_W \log|\Phi(j\omega)|^2 d\omega = 0. \tag{5.373}$$

Условие (5.373) является информационным условием абсолютной инвариантности, учитывающим полосу частот ансамбля сигналов. Из (5.373) следует, что частотная характеристика САУ должна обладать свойством

$$|\Phi(j\omega)| = 1 \text{ при } 0 < \omega < W. \tag{5.374}$$

Из (5.374) следует, что частотная характеристика абсолютно инвариантной САУ должна иметь прямоугольную форму. Как известно, такие фильтры физически не реализуемы, поэтому в одноконтурной системе условия абсолютной инвариантности в общем виде при произвольном сигнале не могут быть достигнуты даже при ограничении полосы частот сигнала.

Для двухканальной системы частотная характеристика Φ может быть представлена уже в виде двух характеристик: $\Phi_1(j\omega)$ — передаточной функции замкнутого цикла и $\Phi_2(j\omega)$ — передаточной функции корректирующей цепи. В этом случае условие (5.373) принимает вид

$$|\Phi_1(j\omega) + \Phi_2(j\omega)| = 1 \text{ при } 0 < \omega < W. \tag{5.375}$$

Условие (5.375) не накладывает столь жестких требований прямоугольности (5.374) на каждую частотную характеристику $\Phi_1(j\omega)$ и $\Phi_2(j\omega)$, а поэтому можно найти физически реализуемую систему, удовлетворяющую этому условию. Условие (5.375) можно представить в более сильной форме

$$\Phi_1(j\omega) + \Phi_2(j\omega) = 1, \tag{5.376}$$

что накладывает дополнительные требования на фазочувствительные характеристики. Из (5.376) следует, что частотная характеристика второго канала для выполнения условий абсолютной инвариантности должна быть

$$\Phi_2(j\omega) = 1 - \Phi_1(j\omega). \tag{5.377}$$

Из (5.377) следует, что по первому (основному) каналу передается информация, а по второму — коррекция ошибки. Таким образом, можно подобрать такие два физически осуществимых фильтра с частотными характеристиками $|\Phi_1(j\omega)|^2$, $|\Phi_2(j\omega)|^2$, которые осуществляют реализацию условий абсолютной инвариантности.

В воспроизводящих системах, следовательно, условия абсолютной инвариатности при произвольном сигнале общего вида реализуемы тогда и только тогда, когда имеются как минимум два канала передачи информации, отвечающие поставленным условиям. Таким образом, информационный критерий приводит к принципу двухканальности при физической реализации абсолютно инвариантных систем, полученный Б. Н. Петровым [637].

Аналогичным образом рассматриваются условия абсолютной инвариантности при стабилизации от воздействия $\xi_f(f, t)$ с точки зрения информационного критерия. В этом случае на выходе системы не должна наблюдаться информация о приложении воздействия

$$0 \equiv H'_f(\xi) + \frac{1}{2W}\int_W \log|v(j\omega)|^2\, d\omega, \tag{5.378}$$

где $v(j\omega)$ — частотная характеристика замкнутой по воздействию $\xi_f(f, t)$ системы.

Из (5.378) следуют условия абсолютной инвариантности для системы стабилизации при произвольном сигнале общего вида:

$$|H'_f(\xi)| = \left|\frac{1}{2W}\int_W \log|v(j\omega)|^2\, d\omega\right|. \tag{5.379}$$

Если $f(t)$ — детерминированный сигнал, то коррекция осуществляется за счет выбора оптимального оператора $\Phi_{опт}(j\omega)$ и достигается с помощью $K(D)$-изображения, т. е. $K(D)f(t)=0$. Для стационарных процессов и систем с бесконечной памятью при бесконечном интервале наблюдения передаточная функция оптимальной по Винеру системы характеризуется ошибкой ε^2:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S_h(\omega) - |\Phi_{опт}(j\omega)|^2 S_f(\omega)]\, d\omega, \tag{5.380}$$

где $S_f(\omega)$ — спектральная плотность $f(t)$; $S_h(\omega)$ — спектральная плотность желаемого сигнала.

При оптимальной фильтрации $\varepsilon^2=0$, $S_h(\omega)=0$ и

$$|\Phi_{опт}(j\omega)|^2 S_f(\omega) = 0. \tag{5.381}$$

В частном случае, когда $f(t)$ — детерминированный сигнал и $\Phi(D) \not\equiv 0$, $f(t) \not\equiv 0$, из (5.381) следует

$$\Phi_{опт}(D)\, f(t) = 0,$$

т. е. $\Phi_{опт}(D)$—$K(D)$-изображение или содержит его в качестве сомножителя. Следовательно, оптимальная по Винеру система удовлетворяет оптимальному решению, полученному на основе информационного критерия инвариантности.

Пример 2. Информационный критерий фильтрации и оценивания параметров САУ. Рассмотрим традиционную модель дискретной системы вида

$$X_{k+1} = c_k X_k + G_k U_k; \tag{5.382}$$

$$Z_k = B_k X_k + V_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.383}$$

где X_k — n-мерный вектор состояния; Z_k—m-мерный вектор измерения; U_k—r-мерный вектор шума; V_k—m-мерный вектор шума в канале измерения; c_k, B_k и G_k—$(n\times n)$-, $(m\times n)$- и $(n\times r)$-мерные матрицы соответственно. Предполагается, что U_k, V_k и X_0 — взаимно независимые белые гауссовские шумы с нулевыми средними и ковариантными матрицами

$$M[U_k U_j'] = Q_k \delta_{kj}; \qquad M[V_k V_j'] = R_k \delta_{kj};$$
$$M[X_0 X_0'] = AW_0 > 0; \qquad A \geqslant 0, \quad B > 0. \tag{5.384}$$

Предположим, что оценка $\hat{X}_k$ текущего состояния X_k дается по состоянию (наблюдению) Z_0^k вида

$$\hat{X}_k \triangleq F(Z_0^k) = M[X_k \mid Z_0^k], \tag{5.385}$$

где Z_0^k — выборка наблюдений Z_n от $n=0$ до $n=k$; $M[\cdot \mid Z_0^k]$ — условное математическое ожидание по Z_0^k и $F(\cdot)$ — отображение пространства наблюдаемых в пространство оценок.

Допустим, что эволюция во времени оценки $\hat{X}_k$ описывается уравнением

$$\hat{X}_{k+1} = A_k \hat{X}_k + S_{k+1} Z_{k+1}, \tag{5.386}$$

где A_k и S_{k+1}—$(n\times n)$- и $(n\times m)$-мерные неизвестные матрицы, соответственно. Ошибку оценивания между состояниями X_k и их оценками $\hat{X}_k$ обозначим $\tilde{X}_k = (X_k - \hat{X}_k)$.

Рассмотрим определение неизвестных матриц A_k и S_{k+1} по информационному критерию, следуя [639, 640].

Если оценка $\hat{X}_k$ задается в виде (5.385), то количество взаимной информации $I(\hat{X}_k, \tilde{X}_k)$ между оценкой $\hat{X}_k$ и ошибкой оценивания $\tilde{X}_k$ равно нулю, т. е.

$$I(\hat{X}_k, \tilde{X}_k) = 0. \tag{5.387}$$

Получаем *информационный критерий инвариантности оценки наблюдаемого процесса* от ошибки и возмущающих воздействий. Так как процессы гауссовские, то для доказательства (5.387) достаточно доказать, что $M[\hat{X}_k \tilde{X}_k'] = 0$. Отметим, что соотношение (5.387) является уравнением Винера — Хопфа в теории информации. Можно также показать, что [639]

$$\hat{I}(X_k, \hat{X}_k) = I(X_k, Z_0^{k\prime}) - \Delta I_k; \tag{5.388}$$

$$\Delta I_k = I(\tilde{X}_k, Z_0^k) - I(\tilde{X}_k, \hat{X}_k). \tag{5.389}$$

Тогда максимизация количества взаимной информации $I(X_k, \tilde{X}_k)$ между состоянием X_k и оценкой $\hat{X}_k$ эквивалентна минимизации энтропии $H(\tilde{X}_k)$ оцен-

ки ошибки $\widetilde{X}_k$, т. е.

$$\max_{A_k, S_{k+1}} I(X_k, \hat{X}_k) \Leftrightarrow \min_{A_k, S_{k+1}} H(\widetilde{X}_k); \tag{5.390}$$

$$\max_{A_k, S_{k+1}} I(X_k, \hat{X}_k) = I(X_k, Z_0^k). \tag{5.391}$$

Приведенные результаты позволяют доказать следующее утверждение [639]: оптимальный фильтр для линейной системы (5.382), (5.383), при котором количество взаимной информации $I(X_k, \hat{X}_k)$ максимально по (5.391), совпадает с фильтром Калмана — Бьюси. Оптимальные значения A_k^0 и S_{k+1}^0 матриц A_k и S_{k+1} имеют соответственно вид

$$A_k^0 = c_k - S_{k+1}^0 B_{k+1} c_k; \qquad S_{k+1}^0 = P_{k+1} B_{k+1}' P_{k+1}^{-1}; \qquad P_k = M[\widetilde{X}_k \widetilde{X}_k']. \tag{5.392}$$

Отметим, что здесь $\hat{X}_k$ — несмещенная оценка X_k, т. е. $M[\widetilde{X}_k] = 0$. При этом минимум энтропии $H(\widetilde{X}_k)$ ошибки $\widetilde{X}_k$ определяется в виде

$$H(\widetilde{X}_{k+1}) = \frac{1}{2} \log (2\pi e)^n \det P_{k+1}^0, \tag{5.393}$$

где P_{k+1}^0 — минимум от соответствующей ковариационной матрицы, характеризующей ошибку.

Аналогично может быть рассмотрена система

$$dX(t) = c(t) X(t)\, dt + G(t)\, d\alpha(t), \tag{5.394}$$

$$dZ(t) = B(t) X(t)\, dt + d\beta(t), \tag{5.395}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ предполагаются взаимно независимыми процессами Винера;

$$M[\alpha(t)\alpha'(s)] = \int_{t_0}^{\min(t,s)} Q(\tau)\, d\tau; \quad M[\beta(t)\beta'(s)] = \int_{t_0}^{\min(t,s)} R(\tau)\, d\tau; \quad Q(\tau) > 0;$$

$R(\tau) > 0$.

Оценку $\hat{X}(t)$ текущего состояния $X(t)$ обозначим через $\hat{X} = M[X(t) | Z_0^t]$, где Z_0^t — значение процесса $Z(\tau)$ от $\tau = 0$ до $\tau = t$. Эволюция оценки во времени описывается уравнением

$$d\hat{X}(t) = A(t)\hat{X}(t)\, dt + S(t)\, dZ(t). \tag{5.396}$$

Тогда, аналогично соотношению (5.390), максимум количества взаимной информации между состоянием $X(t)$ и оценкой $\hat{X}(t)$ эквивалентен минимуму энтропии ошибки оценки $X - \hat{X} = \widetilde{X}(t)$, т. е.

$$\max_{A(t), S(t)} I(X(t), \hat{X}(t)) \Leftrightarrow \min_{A(t), S(t)} H(\widetilde{X}(t)). \tag{5.397}$$

Оптимальный фильтр для линейной системы (5.394), (5.395), который максимизирует количество взаимной информации $I(X(t), \hat{X}(t))$ (5.397), совпадает с фильтром Калмана. Оптимальные значения $A^0(t)$ и $S^0(t)$ для неизвестных матриц $A(t)$ и $S(t)$ имеют в этом случае следующий вид:

$$A^0(t) = c(t) - S^0(t) B(t); \qquad S^0(t) = P(t) B'(t) P^{-1}(t), \tag{5.398}$$

$$P(t) = M[\widetilde{X}(t) \widetilde{X}^T(t)].$$

Таким образом, оптимальный фильтр, который доставляет максимум взаимному количеству информации $I(X(t), \tilde{X}(t))$, имеет вид

$$d\hat{X}(t)=c(t)\hat{X}(t)dt+P(t)B'(t)P^{-1}(t)[dZ(t)-B(t)\hat{X}(t)dt], \tag{5.399}$$

где $P(t)$ — ковариационная матрица ошибки, определяемая из уравнения

$$dP(t)/dt=c(t)P(t)+P(t)c'(t)+G(t)Q(t)G'(t)-P(t)B'(t)P^{-1}(t)B(t)P(t). \tag{5.400}$$

Приведенная модель является обобщением рассмотренного ранее дискретного варианта. Аналогичным образом можно исследовать задачу построения оптимального фильтра для нелинейных систем [639, 640].

Пример 3. *Информационное неравенство Рао — Крамера и некоторые его обобщения.* При осуществлении ограниченного по времени и затратам эксперимента стремятся извлечь из него максимальную информацию. Поэтому в первую очередь интересуются оценкой точности неизвестного параметра, располагая конечной выборкой.

Независимо друг от друга М. Фреше (1943 г.), С. Рао (1945 г.) и Г. Крамер (1946 г.) получили так называемое информационное неравенство или, как его часто называют в математической статистике, неравенство Рао — Крамера [573, 574, 576, 578].

Рассмотрим некоторые варианты вывода этого неравенства.

Допустим, что $g_n(x|\theta)=g(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ — совместная плотность распределения $x_1, \ldots, x_n$, дифференцируемая по θ в некотором открытом интервале Ω_0, в котором содержится истинное значение θ_0 неизвестного параметра θ.

Для несмещенной оценки θ_n параметра θ имеем

$$\int_X (\theta_n-\theta)\, g_n(x|\theta)\, dx=0, \tag{5.401}$$

а после дифференцирования по θ и алгебраических преобразований

$$\int_X (\theta_n-\theta)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln g_n(x|\theta)\right]g_n(x|\theta)dx=1. \tag{5.402}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского к (5.402), получим [573]

$$\sigma_\theta^2 \geqslant 1/J(\theta), \tag{5.403}$$

где

$$J(\theta)=\int_X\left(\frac{\partial \ln g_n(x|\theta)}{\partial\theta}\right)g_n(x|\theta)\,dx. \tag{5.404}$$

Величину (5.404) Р. Фишер назвал информацией, содержащейся в выборке, а в математической статистике величина $J(\theta)$ называется, как отмечалось, количеством информации по Фишеру. Неравенство (5.403), таким образом, утверждает, что дисперсия оценки одномерной величины θ_0 ограничена снизу информационным числом, зависящим от функции распределения $f(x, \theta)$ случайной величины x, по которой оценивается параметр θ_0, и объема выборки n.

С вероятностью единица знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда

$$k[\theta_n-\theta]=\partial \ln g_n(x|\theta)/\partial\theta. \tag{5.405}$$

В (5.405) величина k может зависеть от θ, но не зависит от x. Если в (5.403) достигается равенство, то оценка θ_n параметра θ называется эффективной; в этом случае говорят, что информация, содержащаяся в выборке, была использована полностью.

Допустим, что оценивается математическое ожидание нормальной функции плотности распределения вероятностей

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

$$J(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x, \theta)\, dx = \frac{1}{\sigma^2},$$

а для дисперсии любой несмещенной регулярной оценки θ_n^* выполняется

$$\sigma^2_{*\,\theta_n} \geqslant \sigma^2/n. \tag{5.406}$$

Но среднее арифметическое суммы независимых равноточных нормально распределенных случайных величин имеет, как отмечалось выше, как раз дисперсию σ^2/n; следовательно, среднее арифметическое есть наиболее точная оценка математического ожидания.

Для рассмотренного выше примера оценки параметра θ по совокупности нормально распределенных величин с единичной дисперсией и со средним значением $\theta^{1/3}$ имеем [574] $J(\theta) = (1/9)\theta^{-4/3}$, а нижняя граница для дисперсии составляет, следовательно, $(9/n)\theta^{4/3}$.

Для оценки [547] $\theta = \left[\left(\frac{1}{n}\sum x_l\right)^2 - 3\left(\frac{1}{n} - \sum x_l\right)^2\right]$ имеем

$$\sigma^2_{\theta_n} = \frac{9}{n}\theta^{4/3} + \frac{18}{n^2}\theta^{2/3} + \frac{6}{n^3}.$$

Таким образом, эта оценка больше $(9/n)\theta^{4/3}$, определяемой информационным неравенством, но при увеличении n быстро приближается к ней.

Отношение

$$e = \sigma^2_{\hat{\theta}}/\sigma^2_{\theta} \tag{5.407}$$

минимально возможной дисперсии $\sigma^2_{\hat{\theta}}$ к ее фактическому значению σ_θ^2 называется эффективностью оценки θ_n. Эта величина $0 \leqslant e \leqslant 1$. Равенство $e = 1$ выполняется, когда выполняется условие (5.405).

В случае, когда выборка $x_1, \ldots, x_n$ состоит из независимых случайных величин, имеем

$$g_n(x_1, \ldots; x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta), \qquad \ln g_n(x|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta); \tag{5.408}$$

$$J(\theta) = n\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x, \theta)\, dx.$$

Следовательно,

$$\sigma_\theta^2 \geqslant \left[n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x, \theta)\, dx \right]^{-1}. \tag{5.409}$$

Отметим, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} I(\theta_n) = 0$ не следует несостоятельность оценки. Если, например, в качестве оценки среднего значения взять вместо эффективной оценки $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ (для которой дисперсия равна σ^2/n) полусумму $(x_{\min}+x_{\max})/2$, то ее дисперсия, согласно [574], будет пропорциональна $\sigma^2/\ln n$. При $n\to\infty$ эффективность $e = (\ln n)/n$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} e(n)\to 0$, а сама оценка является состоятельной. Напротив, эффективность несостоятельных оценок всегда будет стремиться к нулю [574].

Рассмотрим теперь смещенные оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\theta_n - \theta)\, g_n(x \mid \theta)\, dx = b_n(\theta), \tag{5.410}$$

где $b_n(\theta)$ — смещение оценки θ, зависящее в общем случае от объема выборки. В рамках сделанных относительно $g_n(x|\theta)$ предположений после дифференцирования (5.410) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\theta_n - \theta) \frac{\partial \ln g_n(x \mid \theta)}{\partial \theta} g_n(x \mid \theta)\, dx = 1 + b_n'(\theta). \tag{5.411}$$

Если применить к (5.411) неравенство Коши — Буняковского, то получим [530]

$$\sigma_\theta^2 \geqslant [1 + b_n'(\theta)]^2 / J(\theta), \tag{5.412}$$

где $J(\theta)$ определяется по (5.404), а в случае независимых равноточных измерений — по (5.408).

Если проинтегрировать условие (5.405) по θ, то получим

$$g_n(x|\theta) = \exp\{A(\theta)\theta_n + B(\theta)\}h(x). \tag{5.413}$$

В (5.413) первый сомножитель зависит только от θ и θ_n, а второй — только от x. Следовательно, если функция плотности распределения вероятностей может быть представлена в виде (5.413), то в (5.403) будет выполняться равенство, т. е. θ_n будет эффективной оценкой.

Если условная функция плотности распределения вероятностей $g_n(x|\theta)$ представима в виде (5.413), то θ_n называется достаточной оценкой параметра θ или достаточной статистикой по Фишеру.

Таким образом, функция или набор функций $L(x_1, \ldots, x_n)$ от результатов наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ представляет собой достаточную статистику для оценки параметра θ (о котором принимается окончательное решение), если условное распределение для θ при данных значениях $x_1, \ldots, x_n$ зависит от $x_1, \ldots, x_n$ лишь посредством $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Усложним условия задачи. Пусть на измеримом пространстве существует

семейство вероятностных мер $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$, Θ — открытое подмножество в R^k, существует мера μ, для которой $dP_\theta = f(x;\ \theta)d\mu(x)$. Введем следующие обозначения:

$$C_j = C_j(x;\ \theta) = [\partial f(x;\ \theta)/\partial\theta]/f(x;\ \theta), \qquad j=1,\ \ldots,\ k;$$

$$\theta = (\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k);\ \widetilde{C}_1 = C_1 - \hat{M}_\theta\,(C_1 \mid C_2,\ \ldots,\ C_k) = C_1 - \sum_{j=2}^{k} \widetilde{k}_j C_j.$$

Величина $\widetilde{J}_1(\theta) = M_\theta \widetilde{C}_1^2$ — информационное количество Фишера о параметре θ_1 при наличии мешающего параметра $\sigma = (\theta_2,\ \ldots,\ \theta_k)$, $\widetilde{C}_1$ — модифицированный информант.

Допустим, что $J_{ij}(\theta) = M_\theta C J_j^2 < \infty$, $j=1,\ \ldots,\ k$, $\widetilde{C}_1(\theta) > 0$, $\theta\in\Theta$ и выполнены введенные ранее предположения относительно свойств $f(x;\ \theta)$. Пусть $x_1,\ \ldots,\ x_n$ — повторная выборка из совокупности с функцией плотности распределения вероятности $f(x;\ \theta)$, $\widetilde{\theta}_n^{(1)} = \widetilde{\theta}_n^{(1)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — оценка параметра θ_1 и $B_n = M_\theta(\widetilde{\theta}_n^{(1)} - \theta_n)$. Если соотношение $\int\limits_X \widetilde{\theta}_n^{(1)} \prod\limits_{j=1}^{n} f(x_j,\ \theta)d\mu(x_j) = B_n + \theta_1$ можно дифференцировать под знаком интеграла, то для оценки $\widetilde{\theta}_n^{(1)}$ при наличии мешающих параметров σ имеем аналог неравенства Рао — Крамера следующего вида [594]:

$$M_\theta\,(\widetilde{\theta}_n^{(1)} - \theta_1) \geqslant B_n^2 \left[1 + \frac{\partial B_n}{\partial\theta_1} - \sum_{j=2}^{n} k_j \frac{\partial B_n}{\partial\theta_j}\right]^2 \Big/ n\widetilde{J}_1(\theta). \tag{5.414}$$

Пусть $S_n(\theta) = M_\theta(\theta_n - \theta)^2$, $K_n(\theta) = M_\theta\theta_n$, а смещение оценки $b_n(\theta) = M_\theta\theta_n - \theta = K_n(\theta) - \theta$. В [530] показано, что если $\theta_1\in\Theta$, $\theta_2\in\Theta$, то для любой оценки θ выполняется неравенство

$$S_n(\theta_1) + S_n(\theta_2) \geqslant \frac{1}{2}(K_n(\theta_2) - K_n(\theta_1))^2 \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{n\int (\sqrt{f(x,\ \theta_2)} - \sqrt{f(x,\ \theta_1)})^2\,d\nu} - 1\right\} + b_n^2(\theta_1) + b_n^2(\theta_2). \tag{5.415}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, можно показать, что

$$\int (\sqrt{f(x,\ \theta_2)} - \sqrt{f(x,\ \theta_1)})^2\,d\nu = \int \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{f(x,\ \theta)})'_\theta\,d\theta\right]^2 d\nu \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{4} \frac{\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} J(u)\,du}{\theta_2 - \theta_1}. \tag{5.416}$$

Переходя к пределу в (5.415) и учитывая (5.416), получим

$$\frac{1}{2}(S_n(\theta) + \lim_{u\to\theta} S_n(\theta)) \geqslant$$
$$\geqslant \left[\varliminf_{u\to\theta} \frac{(K_n(u) - K_n(\theta))^2}{(u-\theta)}\right] \Big/ n \varliminf_{u\to\theta} \frac{1}{u-\theta} \int_\theta^u J(s)\,ds + b_n^2(\theta). \tag{5.417}$$

Если $S_n(\theta)$ и $J(\theta)$ ограничены на Θ, то $K_n(\theta)$ и $b_n(\theta)$ абсолютно непрерывны на Θ и из (5.417) следует неравенство Рао — Крамера

$$\sigma_\theta^2 = S_n(\theta) \geqslant (1 + b_n'(\theta))^2/nJ(\theta) + b_n^2(\theta). \tag{5.418}$$

Пусть задано гильбертово пространство L^2, в котором $\sqrt{P_\theta} \in L_\nu^2$ и $\|\sqrt{P_\theta}\| = 1$. Для случайной величины ξ с конечным вторым моментом относительно P_θ справедливо $\xi\sqrt{P_\theta} \in L_\nu^2$; математическое ожидание и дисперсия ξ определяются как

$$m(\theta) = \left(\sqrt{P_\theta},\ \xi\sqrt{P_\theta}\right); \qquad D(\theta) = \left\|[\xi - m(\theta)]\sqrt{P_\theta}\right\|^2. \tag{5.419}$$

В [33] на L^2 было введено расстояние

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = \left\|\sqrt{P_{\theta_1}} - \sqrt{P_{\theta_2}}\right\| = \left[2\left(1 - \left(\sqrt{P_{\theta_1}},\ \rho\sqrt{P_{\theta_2}}\right)\right)\right]^{1/2}. \tag{5.420}$$

В этом случае выполняется неравенство [33]

$$\left(\sqrt{D(\theta_1)} + \sqrt{D(\theta_2)}\right)^2 \geqslant \left(\frac{[m(\theta_1) - m(\theta_2)]\,[1 - \rho^2(\theta_1, \theta_2)/2]}{\rho(\theta_1, \theta_2)}\right)^2. \tag{5.421}$$

Неравенство (5.421) совпадает с (5.415). Если теперь потребовать выполнения условий: 1) $4\rho^2(\theta_1\ \theta_2) \sim J(\theta)(\theta_2 - \theta_1)^2 (\theta_2 \to \theta_1)$; 2) функция $m(\theta)$, дифференцируемая в точке θ, а $D(\theta)$ непрерывна в точке θ, то, переходя к пределу в (5.421) при $\theta_2 \to \theta_1$, получим обобщенное неравенство Рао — Крамера

$$D(\theta) \geqslant [m'(\theta)]^2/J(\theta). \tag{5.422}$$

Первое условие заведомо выполняется, если в L_ν^2 существует среднеквадратичная производная $(\sqrt{P_\theta})'$ функции $\sqrt{P_\theta}$ в точке θ, тогда

$$J(\theta) = 4\int \left[\left(\sqrt{P_\theta}\right)'\right]^2 d\nu$$

и совпадает с информационным количеством Фишера. При этом существует такое $\hat{\theta}_n^*$, что [530, 543, 574]

$$P_\theta\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) < x\} \to \sqrt{\frac{J(\theta)}{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{J(\theta)}{2} y^2\right\} u(y, T)\, dy. \tag{5.423}$$

Примеры использования оценок типа неравенства Рао — Крамера в информационной теории адаптивных систем управления можно найти в [40, 574, 583, 584].

Приложение 1

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ[1]

П1.1. Векторы и тензоры в криволинейных координатах. Элемент длины в трехмерном евклидовом пространстве в декартовых координатах определяется в виде

$$ds^2 = dx^{1^2} dx^{2^2} + dx^{3^2}, \tag{П1.1}$$

а в сферических координатах — формулой

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{П1.2}$$

Координаты в дальнейшем будем обозначать, как это принято, буквами x с проставленными сверху индексами. Если положить $r = x^1$; $\theta = x^2$; $\varphi = x^3$, то (П1.2) можно записать в следующем виде: (П1.3)

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2; \tag{П1.4}$$

$$g_{11} = 1; \quad g_{22} = (x^1)^2; \qquad g_{33} = (x^1)^2 \sin^2(x^2). \tag{П1.5}$$

Если преобразовать систему координат (П1.3) x^1, x^2, x^3 в другую систему x'^1, x'^2, x'^3 в виде

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3), \tag{П1.6}$$

где f^i — некоторые функции, то элемент длины в координатах x'^1, x'^2, x'^3 может быть записан как

$$ds^2 = \sum_i \sum_k g'_{ik} dx'^i dx'^k, \tag{П1.7}$$

где g'_{ik} — некоторые функции от координат x'^1, x'^2, x'^3.

Введем теперь важное правило записи суммы, а именно: если один и тот же индекс входит дважды в какой-нибудь член, причем один раз как верхний индекс, а другой раз как нижний, то этому индексу следует придать все значения от 1 до 3 (в n-мерном пространстве от 1 до n) и полученные члены сложить. В соответствии с этим правилом формула (П1.7) может быть записана без знаков суммы, т. е.

$$ds^2 = g'_{ik} dx'^i dx'^k. \tag{П1.8}$$

Формула (П1.8) относится к трехмерному евклидовому пространству, так как характер функций g_{ik} в этой формуле таков, что с помощью надле-

---

[1] В Приложении 1 использованы источники [184, 743, 57].

жащего преобразования координат она может быть приведена к виду

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2.$$

Риман обобщил понятие трехмерного евклидова пространства; было введено понятие n-мерного риманового пространства, линейный элемент которого определяется формулой

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k, \tag{П1.9}$$

где $i, k=1, 2, \ldots, n$, причем характер функций $g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$, вообще говоря, таков, что не существует преобразования координат, переводящего форму (П1.9) в сумму квадратов дифференциалов координат. В тех частных случаях, когда такое преобразование возможно, риманово пространство вырождается в n-мерное евклидово пространство. Простейшим примером двумерного риманового пространства является поверхность шара. Линейный элемент этой поверхности может быть записан в виде

$$ds^2=R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{П1.10}$$

или в виде

$$ds^2=g_{ik}dx^i dx^k,\ i,\ k=1,\ 2, \tag{П1.11}$$

где $x^1=\theta$; $x^2=\varphi$; $g_{11}=R^2$; $g_{22}=R^2\sin^2 x^1$; $g_{12}=0$.

Не существует преобразования координат, переводящего форму (П1.10) или (П1.11) в сумму квадратов дифференциалов координат.

Переход от системы координат $x^1, \ldots, x^k$ к другой системе координат производится при помощи формул

$$x'^i=\varphi^i(x^1, \ldots, x^k). \tag{П1.12}$$

При этом предполагается, что якобиан

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^1}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^k}&\cdots&\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^k}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{П1.13}$$

Как координаты $x^1, \ldots, x^k$, так и получающиеся при помощи уравнений (П1.12) координаты $x'^1, \ldots, x'^k$ относятся к одной и той же точке пространства. Другими словами, они определяют одну и ту же точку в разных системах координат.

В силу уравнения (П1.13) должны существовать обратные преобразования

$$x^i=\psi^i(x'^1, \ldots, x'^n), \tag{П1.14}$$

переводящие координаты $x'^1, \ldots, x'^n$ в координаты $x^1, \ldots, x^n$.

При преобразовании координат (П1.12) их дифференциалы преобразуются по закону

$$dx'^i=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k. \tag{П1.15}$$

Всякую совокупность n величин, которые преобразуются по закону

$$A'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}} A^{k}, \tag{П1.16}$$

т. е. по тому же закону, что и дифференциалы координат, назовем контравариантным вектором.

Компоненты контравариантных векторов принято обозначать при помощи верхних индексов. Так как в соответствии с формулой (П1.15) дифференциалы координат сами являются компонентами контравариантного вектора, то они в соответствии с приведенным условием имеют индексы сверху.

Рассмотрим теперь, как преобразуются производные скалярной функции $\varphi(x^1, \ldots, x^k)$ при переходе к новой системе координат. Очевидно, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^{i}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{i}}. \tag{П1.17}$$

Всякую совокупность величин, которые преобразуются по закону

$$A'_{i} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{k}} A_{k}, \tag{П1.18}$$

т. е. по тому же закону, что и производные скалярной функции $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^k)$, назовем ковариантным вектором. Компоненты ковариантных векторов принято обозначать при помощи нижних индексов.

В прямоугольных декартовых координатах в евклидовом пространстве законы преобразования компонент контравариантных и ковариантных векторов совпадают между собой. Поэтому в декартовых координатах в евклидовом пространстве исчезает различие между контравариантными и ковариантными векторами. Различие между контравариантными и ковариантными векторами имеет, таким образом, место в криволинейных координатах пространства любого типа (т. е. в евклидовом и римановом пространстве).

Если составить всевозможные произведения $A^{\mu\nu}$ компонент двух векторов A^{μ} и A^{ν}, заданных в n-мерном пространстве,

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu}A^{\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{П1.19}$$

то в соответствии с формулами (П1.16) величины $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu}. \tag{П1.20}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n-мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (П1.20), называется контравариантным тензором второй валентности. Следует заметить (и это очень существенно), что не всякий тензор второй валентности можно составить по формуле (П1.19), т. е. при помощи составляющих двух векторов. Однако можно показать, что любой тензор второй валентности $A^{\mu\nu}$ может быть представлен в виде сумм

$$A^{\mu\nu} = \underset{1\ 1}{A^{\mu}B^{\nu}} + \underset{2\ 2}{A^{\mu}B^{\nu}} + \cdots + \underset{n\ n}{A^{\mu}B^{\nu}} \tag{П1.21}$$

от n пар надлежаще выбранных n-мерных векторов. Если составить n^2 про-

изведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух ковариантных векторов

$$A_{\mu\nu}=A_\mu A_\nu, \tag{П1.22}$$

то в соответствии с формулами (П1.18) для этих величин справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau}A_{\mu\nu}. \tag{П1.23}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n-мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (П1.23), называется ковариантным тензором второй валентности. Наконец, можно составить n^2 произведений A_μ из ковариантных B^ν и контравариантных компонент двух векторов

$$A^\nu_\mu=A_\mu B^\nu. \tag{П1.24}$$

В соответствии с уравнениями (П1.16) и (П1.18) величины $A_\mu{}^\nu$ удовлетворяют закону преобразования

$$A'^\tau_\sigma=\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\sigma}A^\beta_\alpha. \tag{П1.25}$$

Объект, который по отношению к любой координатной системе в n-мерном пространстве описывается при помощи n^2 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (П1.19), называется смешанным тензором второй валентности.

По аналогии с изложенным можно дать определения контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров любой валентности. Наиболее общее определение может быть сформулировано следующим образом. Если некоторый объект в системе координат $(x^1, x^2, \ldots x^n)$ задан n^{p+q} величинами (функциями) $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{k_1 k_2 \ldots k_q}$ и в какой-либо другой системе координат $(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$ величинами (функциями)

$$A'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{k_1 k_2 \ldots k_q} \tag{П1.26}$$

и если

$$A'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{k_1 k_2 \ldots k_q}=\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{r_1}}\frac{\partial x'^{i_2}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{r_p}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial x'^{k_1}}\frac{\partial x^{s_2}}{\partial x'^{k_2}}\cdots\frac{\partial x^{s_q}}{\partial x'^{k_q}}A^{r_1 r_2 \ldots r_p}_{s_1 s_2 \ldots s_q}, \tag{П1.27}$$

то этот объект называется смешанным тензором контравариантной валентности p и ковариантной валентности q. Величины $A^{r_1 r_2 \ldots r_p}_{s_1 s_2 \ldots s_q}$ и $A'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{k_1 k_2 \ldots k_q}$ называются компонентами этого тензора в системах координат $(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ и $(x'^1, x'^2, \ldots, x'^k)$ соответственно.

Если тензор имеет только контравариантную валентность, его называют контравариантным тензором, соответственно тензор, имеющий только ковариантную валентность, называется ковариантным тензором. Повторим замечание, сделанное относительно законов преобразования компонент контравариантных и ковариантных векторов, а именно: в декартовых координатах евклидова

пространства законы преобразования контравариантных, ковариантных и смешанных тензоров совпадают между собой. Только в криволинейных координатах пространства любого типа законы преобразования тензоров различных типов существенно различаются между собой.

Если в некоторой системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^k)$ элемент длины дается формой

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, \ldots, x^k)dx^i dx^k, \tag{П1.28}$$

а в другой системе координат формой

$$ds'^2 = g'_{ik}(x'^1, \ldots, x'^k)\,dx'^i dx'^k, \tag{П1.29}$$

то должно выполняться равенство

$$ds' = ds. \tag{П1.30}$$

Из условия уравнения (П1.30) вытекает

$$g'_{pk} = \frac{\partial x^s}{\partial x'^p} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} g_{st}. \tag{П1.31}$$

Таким образом,

$$g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^k) \tag{П1.32}$$

являются компонентами ковариантного тензора.

Введем теперь следующее обозначение:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \tag{П1.33}$$

Если предположить, что форма (П1.29) положительно определена, можем ввести следующие величины:

$$g^{ik} = \frac{(\text{алгебраическое дополнение } g_{ik} \text{ в } g)}{g}. \tag{П1.34}$$

Из теории определителей следует, что должно быть

$$g^{is}g_{ik} = \delta^s_k = \begin{cases} 1 & \text{для } s = k; \\ 0 & \text{для } s \neq k. \end{cases} \tag{П1.35}$$

Нетрудно показать, что $g^{ik} = g^{ki}$ и δ^s_p являются компонентами контравариантного и смешанного тензора соответственно.

Из закона преобразования, с одной стороны,

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^s}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} g_{st} \tag{П1.36}$$

следует

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{g}. \tag{П1.37}$$

С другой стороны,

$$dx'^1 dx'^2 \ldots dx'^k = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| dx^1 dx^2 \ldots dx^k. \qquad (\text{П1.38})$$

Из двух последних уравнений получаем

$$\sqrt{g'}\, dx'^1 dx'^2 \ldots dx'^k = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^k. \qquad (\text{П1.39})$$

Итак, величина

$$dv = \sqrt{g} dx' dx^2 \ldots dx^k \qquad (\text{П1.40})$$

является инвариантом. Очевидно, этот инвариант представляет собой элементарный объем пространства в криволинейных координатах.

П1.2. Тензорная алгебра в криволинейных координатах. Основные операции тензорной алгебры определяются следующим образом.

Сложение и вычитание. При сложении или вычитании соответствующих компонент двух тензоров одинаковых типов (т. е. имеющих одну и ту же контрвариантную и ковариантную валентность) получается тензор того же типа. Например,

$$A^i_{pk} + B^i_{pk} = C^i_{pk}. \qquad (\text{П1.41})$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из приведенного выше определения тензора.

Умножение. Из тензора контрвариантной валентности p и ковариантной валентности q и тензора контрвариантной валентности s и ковариантной валентности t можно образовать тензор контрвариантной валентности $p+s$ и ковариантной валентности $q+t$. Для этой цели нужно умножить каждую компоненту первого тензора на каждую компоненту второго. Например, если $A_p{}^i$ и B_{ki} являются компонентами тензоров двух типов, то

$$C^l_{pki} = A^l_p B_{ki} \qquad (\text{П1.42})$$

являются компонентами тензора, тип которого определяется положением индексов. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из закона преобразования составляющих тензоров.

Свертка смешанного тензора. Из смешанного тензора контрвариантной валентности p и ковариантной валентности q можно образовать тензор контрвариантной валентности $p-1$ и ковариантной валентности $q-1$. Для этой цели один какой-либо значок контрвариантного характера следует приравнять одному значку ковариантного характера и по этому значку произвести суммирование. Например,

$$T^s_{pks} = T_{pk}; \qquad A^{\alpha s}_{\alpha\beta} = A^S_\beta. \qquad (\text{П1.43})$$

Из последнего тензора путем повторного свертывания можно получить тензор нулевой валентности или инвариант

$$A^\beta_\beta = A. \qquad (\text{П1.44})$$

Доказательство приведенной теоремы непосредственно следует из общего закона преобразования составляющих тензоров (П1.28). Операции умножения и свертки могут быть объединены. Например, из контрвариантного тензора первой валентности A^μ и ковариантного тензора второй валентности $B_{\sigma\nu}$ мо-

жем образовать сначала смешанный тензор

$$A^{\mu}B_{\sigma\nu} = A^{\mu}_{\sigma\nu}.$$

Свертывая далее по индексам μ и ν, получим ковариантный тензор первой валентности или вектор

$$D_{\sigma} = A^{\mu}B_{\sigma\mu} = A^{\mu}_{\sigma\mu}.$$

Если оказывается возможным произвести полное свертывание смешанного тензора по всем контравариантным и ковариантным индексам, то приходим к тензору нулевой валентности или инварианту. Например, $g_{ik}dx^i dx^k$. Здесь происходит полное свертывание по индексам i и k ковариантного тензора g_{ik} и контравариантного вектора dx^i, поскольку дифференциалы координат являются компонентами контравариантного вектора.

Полученный инвариант является квадратом элемента длины ds^2.

Приведем еще примеры образования инвариантов: $g_{ik}A^iA^k$ (длина вектора A^r); $A_{ik}B^{ik}$; $g_{ik}A^{ir}B_r{}^k$; $A_{ik}B^{ir}C_r{}^k$ и т. д.

Поднятие и опускание индексов («жонглирование» индексами). Если компоненты контравариантного вектора λ^s перемножить с компонентами ковариантного тензора g_{ik}, то в соответствии с изложенным величины $g_{ik}\lambda^s$ образуют компоненты смешанного тензора. Если теперь произвести свертку по индексам k и s, то получим ковариантный вектор, компоненты которого обозначим через λ_i, т. е.

$$\lambda_i = g_{ik}\lambda^k. \tag{П1.45}$$

Аналогично, если μ_s являются компонентами ковариантного вектора, можем с их помощью образовать контравариантный вектор

$$\mu^k = g^{ks}\mu_s. \tag{П1.46}$$

Легко видеть, что если

$$\mu_s = \lambda_s = g_{sk}\lambda^k, \tag{П1.47}$$

то и

$$\mu^k = \lambda^k. \tag{П1.48}$$

Последнее обстоятельство дает возможность определить объект, который назовем просто вектором. Этот объект может быть представлен контравариантными λ^i или ковариантными λ_i компонентами по нашему выбору. Обращаем внимание на вводимую здесь терминологию. Раньше говорилось о контравариантном λ^i и ковариантном λ_i векторах, как о различных объектах. Сейчас говорим о векторе, как об едином объекте (в смысле проблемы Вундгейлера), который может быть по нашему желанию представлен контравариантными λ^i или ковариантными компонентами λ_i по нашему выбору. Право на такое определение дают равенства (П1.47) и (П1.48).

Итак, переход от контравариантных компонент некоторого вектора к его ковариантным компонентам и наоборот дается следующими равенствами:

$$\lambda_s = g_{sk}\lambda^k; \qquad \lambda^k = g^{ks}\lambda_s. \tag{П1.49}$$

Аналогичные соображения могут быть высказаны относительно любого тензора. Итак, в дальнейшем будем говорить о тензоре как об объекте, который может быть по нашему желанию представлен контравариантными, ковариантными или смешанными компонентами. Сказанное иллюстрируется сле-

дующими примерами:

$$A^l_{pk} \to A_{ipk} = g_{is}A^s_{pk}; \qquad A_{ipk} \to A^k_{ip} = A_{ips}g^{sk} \tag{П1.50}$$

и т. д.

В дальнейшем величины

$$g_{ik};\ g^{ik};\ \delta^i_k \tag{П1.51}$$

назовем ковариантными, контравариантными и смешанными составляющими фундаментального метрического тензора.

Приведенные примеры (П1.51) показывают, что с помощью фундаментального метрического тензора можно поднимать и опускать индексы и при этом иметь дело с компонентами одного и того же тензора.

Эта операция поднятия и опускания индексов, или, как иногда говорят, «жонглирования» индексами, имеет важнейшее значение в тензорной алгебре. Приведем еще несколько примеров этой операции:

$$\begin{aligned} &g_{ik}A^{ip} = A^p_k; \qquad g_{ik}A^k_{ps} = A_{ips}; \\ &g^{ik}A_{iprn} = A^k_{prn}; \qquad g_{ik}A^{krst} = A^{rst}_i \end{aligned} \tag{П1.52}$$

и т. д.

Симметрирование и альтернирование. Операции симметрирования или альтернирования для тензоров, заданных в декартовых координатах, полностью сохраняются и для тензоров, заданных в криволинейных координатах, с одним только различием, а именно: для смешанных тензоров симметрирование или альтернирование может производиться по нескольким верхним или нескольким нижним индексам; симметрирование или альтернирование по индексам, среди которых имеются как верхние, так и нижние, не имеет никакого смысла, так как в результате этой операции не получим тензора.

Длина вектора. Угол между векторами, заданными в криволинейных координатах. Можно считать, что основная фундаментальная форма пространства

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{П1.53}$$

определяет длину ds вектора, имеющего контравариантные компоненты dx^s. Аналогично этому длина вектора, имеющего компоненты λ^i, определяется следующим образом:

$$(\lambda)^2 = g_{ik}\lambda^i\lambda^k. \tag{П1.54}$$

Эта формула, очевидно, совершенно аналогична следующей:

$$(\lambda)^2 = g_{ik}\lambda^i\lambda^k = \lambda_k\lambda^k = \lambda^i\lambda_i = g^{ik}\lambda_i\lambda_k. \tag{П1.55}$$

Вектор называется единичным, если длина его равна единице.

Рассмотрим два единичных вектора λ^i и μ^i, т. е. два вектора, компоненты которых удовлетворяют условиям

$$g_{ik}\lambda^i\lambda^k = 1 \text{ и } g_{ik}\mu^i\mu^k = 1. \tag{П1.56}$$

Основываясь на уравнениях (П1.56), можно доказать, что

$$(g_{ik}\lambda^i\mu^k)^2 \leqslant 1. \tag{П1.57}$$

Косинус угла между двумя единичными векторами λ^i и μ^i определяется при

помощи формулы

$$\cos\theta = g_{ik}\lambda^i\mu^k. \tag{П1.58}$$

Выражение, стоящее справа в этой формуле, является инвариантом, т. е. величиной, не изменяющейся при преобразованиях координат. В декартовых координатах (если переход к ним возможен, т. е. если пространство евклидово) формула (П1.58) принимает вид

$$\cos\theta = \delta_{ik}\lambda_i\lambda_k. \tag{П1.59}$$

Эта формула в двух- и трехмерном евклидовых пространствах действительно дает величину косинуса угла (в соответствии с его обычным геометрическим смыслом) между двумя единичными векторами.

Если заданы два произвольных вектора u^i и v^i, то косинус угла между ними определяется по формуле

$$\cos\theta = \frac{g_{ik}u^iv^k}{\sqrt{g_{ik}u^iu^kg_{nm}v^nv^m}}. \tag{П1.60}$$

Из формулы (П1.60) следует, что если два вектора ортогональны друг другу, то

$$g_{ik}u^iv^k = 0. \tag{П1.61}$$

П1.3. Некоторые важные формулы. Приведем вывод некоторых важных формул тензорного исчисления, которыми воспользуемся в дальнейшем.

Дифференцируя соотношения

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = n, \tag{П1.62}$$

получаем

$$g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = 0. \tag{П1.63}$$

Далее, дифференцируя соотношения

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^\mu_\nu, \tag{П1.64}$$

имеем

$$g_{\mu\sigma}dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma}dg_{\mu\sigma} \tag{П1.65}$$

и соответственно

$$g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} = -g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}. \tag{П1.66}$$

Умножив уравнение (П1.65) и (П1.66) на $g^{\mu\tau}$ или $g_{\nu\tau}$, получим

$$dg^{\nu\tau} = -g^{\nu\sigma}g^{\mu\tau}dg_{\mu\sigma}; \quad \frac{\partial g^{\nu\tau}}{\partial x^\lambda} = -g^{\nu\sigma}g^{\mu\tau}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \tag{П1.67}$$

и соответственно

$$dg_{\mu\tau} = -g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}dg^{\nu\sigma}; \quad \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\lambda} = -g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda}. \tag{П1.68}$$

Отметим еще, что в соответствии с правилами дифференцирования определителей

$$dg = g^{\mu\nu}gdg_{\mu\nu} \tag{П1.69}$$

или, учитывая уравнение (П1.63),

$$dg = -g_{\mu\nu} g dg^{\mu\nu}. \tag{П1.70}$$

П.1.4. Тензорный анализ (предварительные замечания). В п. П1.1 было показано, что частные производные инвариантной (скалярной) функции

$$A_\mu = \partial\varphi/\partial x^\mu \tag{П1.71}$$

являются ковариантными компонентами тензора первой валентности grad φ.

Вместе с тем нетрудно убедиться, что в криволинейных координатах вторые и (последующие) производные скалярной функции не образуют, вообще говоря, никакого тензора.

Существует, однако, в криволинейных координатах особая дифференциальная операция — так называемое ковариантное дифференцирование, применяя которую из заданных тензоров можем получить новые тензоры. Эта операция при переходе к декартовым координатам превращается в обыкновенное дифференцирование. Следует отметить, что только благодаря этой новой операции получаем возможность составлять общековариантные дифференциальные уравнения, т. е. уравнения, сохраняющие свой общий вид в любой криволинейной системе координат.

П1.5. Уравнения геодезической линии. Длина кривой линии

$$x^i = x^i(t), \tag{П1.72}$$

соединяющей две точки $p_1[x^1(t_1) \ \dots \ x^n(t_1)]$ и $p_2[x^1(t_2) \ \dots \ x^n(t_2)]$, может быть вычислена с помощью интеграла

$$\int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt. \tag{П1.73}$$

Кривая, для которой интеграл (П1.73) при постоянных значениях t_1 и t_2 принимает экстремальное значение, называется геодезической линией рассматриваемого пространства.

Если в качестве параметра вдоль геодезической линии взять длину дуги s, то, как это нетрудно показать методами вариационного исчисления, дифференциальные уравнения геодезической линии будут иметь следующий вид:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} p & k \\ & i \end{matrix} \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{П1.74}$$

Здесь коэффициенты $\left\{ \begin{matrix} p & k \\ & i \end{matrix} \right\}$ определяются формулой

$$\left\{ \begin{matrix} p & k \\ & i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ts} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s} \right). \tag{П1.75}$$

Эти коэффициенты называются символами Кристоффеля второго рода. Выражения вида

$$\left[\begin{matrix} p & k \\ & s \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s} \right) \tag{П1.76}$$

называются символами Кристоффеля первого рода. Очевидно, имеет место соотношение

$$\left\{ \begin{matrix} p & k \\ & i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{is} \left[\begin{matrix} p & k \\ s & \end{matrix} \right]. \qquad (\text{П1.77})$$

Для символов Кристоффеля первого и второго родов употребляются также следующие обозначения:

$$\Gamma_{s,pk} = \left[\begin{matrix} p & k \\ & s \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s} \right); \qquad (\text{П1.78})$$

$$\Gamma^i_{pk} = \left\{ \begin{matrix} p & k \\ & i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^s} \right). \qquad (\text{П1.79})$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что символы Кристоффеля удовлетворяют следующим тождествам:

$$\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^l_{ip}} - g_{sk}\Gamma^s_{pl} - g_{ps}\Gamma^s_{kl} = 0; \qquad (\text{П1.80})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} + g^{sp}\Gamma^i_{sk} + g^{is}\Gamma^p_{sk} = 0; \qquad (\text{П1.81})$$

$$\Gamma^s_{ps} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^p} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^p}. \qquad (\text{П1.82})$$

Учитывая далее, что левые части уравнения (П1.74) являются компонентами контравариантного вектора (так как ds — инвариант), можем получить следующий закон преобразования символов Кристоффеля второго рода Γ^i_{pk} при преобразованиях координат:

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^p \partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \Gamma'^{,i}_{pk} - \frac{\partial x^s}{\partial x'^p} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \Gamma^r_{st}; \qquad (\text{П1.83})$$

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^s \partial x^t} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^2} \Gamma^r_{st} - \frac{\partial x'^p}{\partial x^s} \frac{\partial x'^k}{\partial x^t} \Gamma'^{,i}_{pk}. \qquad (\text{П1.84})$$

Таким образом, символы Кристоффеля не являются компонентами тензора.

П1.6. Ковариантное дифференцирование (абсолютное дифференциальное исчисление). Допустим, что $f(x^1, \ldots, x^n)$ является скалярной (инвариантной) функцией. В таком случае

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \qquad (\text{П1.85})$$

также является скаляром. Что же касается производных $\partial f/\partial x^k$, то они являются компонентами ковариантного вектора.

В дальнейшем df и $\partial f/\partial x^k$ назовем соответственно ковариантным дифференциалом и ковариантной производной скаляра. Примем следующие обозначения для ковариантного дифференциала и ковариантной производной скаляра:

$$Df = df; \qquad (\text{П1.86})$$

$$f_{;k} = \partial f/\partial x^k. \qquad (\text{П1.87})$$

Итак, между ковариантным дифференциалом и ковариантной производной скаляра f и обыкновенными дифференциалом и производной этого же скаляра нет никакого различия.

Допустим теперь, что

$$A^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{П1.88}$$

являются компонентами контрвариантного вектора. В таком случае величины

$$dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k, \tag{П1.89}$$

вообще говоря, не являются компонентами контрвариантного вектора. Вместе с тем, комбинируя закон преобразования для dA^i с законом преобразования для Γ^i_{pk}, можно доказать, что

$$DA^i = dA^i + A^p \Gamma^i_{pk} dx^k \tag{П1.90}$$

являются компонентами контрвариантного вектора и

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^p \Gamma^i_{pk} \tag{П1.91}$$

являются компонентами смешанного тензора.

DA^i называется ковариантным дифференциалом вектора A^i и $A^i_{;k}$ — ковариантной производной этого же вектора.

Если $A_i(x^1, \ldots, x^k)$ являются компонентами ковариантного вектора, то dA_i не являются, вообще говоря, компонентами какого бы то ни было ковариантного вектора. Однако можно доказать, что

$$DA_p = dA_p - A_i \Gamma^i_{pk} dx^k \tag{П1.92}$$

являются компонентами ковариантного вектора и

$$A_{p;k} = \frac{\partial A_p}{\partial x^k} - A_i \Gamma^i_{pk} \tag{П1.93}$$

являются компонентами ковариантного тензора второй валентности.

DA_p называется ковариантным дифференциалом вектора A_p и $A_{p;k}$ — ковариантной производной этого же вектора.

Операция вычисления ковариантного дифференциала и ковариантной производной может быть определена для любого тензора. Например,

$$DA^i_{pk} = dA^i_{pk} + A^s_{pk} \Gamma^i_{sl} dx^l - A^i_{sk} \Gamma^s_{pl} dx^l - A^i_{ps} \Gamma^s_{kl} dx^l;$$

$$A^i_{pk;l} = \frac{\partial A^i_{pk}}{\partial x^l} + A^s_{pk} \Gamma^i_{sl} - A^i_{sk} \Gamma^s_{pl} - A^i_{ps} \Gamma^s_{kl}. \tag{П1.94}$$

Обращаем внимание на то, что ковариантный дифференциал DA^i_{pk} тензора A^i_{pk} является тензором того же типа, что и сам тензор A^i_{pk}. Что же касается ковариантной производной $A^i_{pk;l}$ тензора A^i_{pk}, то она является тензором, имеющим на один ковариантный индекс больше, чем тензор A^i_{pk}.

Общее правило ковариантного дифференцирования для любого тензора определяется следующей формулой:

$$A^{r_1,\ldots,r_m}_{s_1,\ldots,s_p;\,i} = \frac{\partial A^{r_1,\ldots,r_m}_{s_1,\ldots,s_p}}{\partial x^i} + \sum_{\alpha}^{1,\ldots,m} A^{r_1,\ldots,r_{\alpha-1}kr_{\alpha+1}\ldots r_m}_{s_1,\ldots,s_p}\Gamma^{r_\alpha}_{ki} -$$

$$- \sum_{\beta}^{1,\ldots,p} A^{r_1,\ldots,r_m}_{s_1,\ldots,s_{\beta-1}ls_{\beta+1}\ldots s_p}\Gamma^{l}_{s_\beta i}. \qquad (\text{П1.95})$$

Воспользовавшись общим правилом вычисления ковариантной производной любого тензора, нетрудно убедиться, что

$$g^{k;l}_{i} = 0; \qquad g^{ik}_{;l} = 0; \qquad \delta^{i}_{p;k} = 0. \qquad (\text{П1.96})$$

Таким образом, тензоры g_{ik}, g^{ik} и δ_p^i являются «постоянными» по отношению к ковариантному дифференцированию.

Операция ковариантного дифференцирования была введена чисто формально. Ниже будет вскрыт глубокий геометрический смысл этой операции.

Отметим еще, что в декартовых координатах ковариантное дифференцирование совпадает с обыкновенным дифференцированием.

П1.7. Основные правила абсолютного дифференциального исчисления. Легко проверить, что ковариантное дифференцирование суммы, разности и произведения тензора подчиняется правилам обычного дифференцирования. Например,

$$(A_{ip}B^{kl})_{;m} = A_{ip}B^{kl}_{;m} + B^{kl}A_{ip;m};$$

$$(A_{ipk}B^{kl})_{;m} = A_{ipk;m}B^{kl} + A_{ipk}B^{kl}_{;m}.$$

П1.8. Вихрь антисимметричного ковариантного тензора. Если $A_i(x^1, \ldots, x^n)$ является ковариантным вектором, то, как нетрудно убедиться, антисимметричный тензор

$$A_{p;k} - A_{k;p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^p} \qquad (\text{П1.97})$$

не зависит от символов Кристоффеля. Этот тензор называется вихрем ковариантного вектора.

Если $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}(x^1, \ldots, x^k)$ является антисимметричным тензором, то можно образовать новый антисимметричный тензор

$$(p+1)\,A_{[i_1 \ldots i_p;k]} = \frac{\partial A_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ki_2 \ldots i_p}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial A_{i_1 k i_2 \ldots i_p}}{\partial x^{i_2}} - \cdots \frac{\partial A_{i_1 \ldots i_{p-1}k}}{\partial x^p}, \qquad (\text{П1.98})$$

который, как нетрудно убедиться, не зависит от символов Кристоффеля. Этот тензор называется вихрем антисимметричного тензора $A_{i_1 \ldots i_p}$.

П1.9. Дивергенция тензора. Если $A^i(x^1, \ldots, x^k)$ является контравариантным вектором, то, как нетрудно убедиться, скаляр

$$A^{i}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^p\Gamma^i_{pi} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}A^i}{\partial x^i}$$

зависит только от g, A^i и их обыкновенных производных по координатам. Этот скаляр называется дивергенцией контравариантного вектора A^i.

Аналогично дивергенцией ковариантного вектора A_i называется скаляр

$$g^{pk}(A_{p;k}). \tag{П1.99}$$

Дивергенция ковариантного тензора $A_{i_1 \ldots i_p}$ определяется как тензор

$$g^{ik}A_{i_1 i_2 \ldots i_p;k}. \tag{П1.100}$$

П1.10. Градиент скалярного поля. Как уже отмечалось, ковариантный вектор $\partial f/\partial x^k$, где $f(x^1, \ldots, x^k)$ — скаляр, называется градиентом скалярного поля. Квадрат длины этого вектора может быть вычислен по формуле

$$\Delta_1 f = g^{ik} f_{;i} f_{;k}; \tag{П1.101}$$

$\Delta_1 f$ называется дифференциальным параметром Бельтрами первого рода.

Если вычислить дивергенцию градиента $f_{;i}$, то получим

$$\Delta_2 f = g^{ik}(f_{;l})_{;k} = (g^{ik} f_{;l})_{;k}; \tag{П1.102}$$

$\Delta_2 f$ называется параметром Бельтрами второго рода.

Дифференциальный параметр Бельтрами второго рода называется также лапласианом от $f(x)$. Лапласиан обычно обозначают следующим образом:

$$\Delta f = g^{ik} f_{;l;k}. \tag{П1.103}$$

П1.11. Контрвариантное дифференцирование. Контрвариантная производная тензора $A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s}$ определяется следующим образом:

$$A^{\alpha_1 \ldots \alpha_r ; k}_{\beta_1 \ldots \beta_s} = g^{kn} A^{\alpha_1, \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s ; n}. \tag{П.104}$$

Таким образом, если известна ковариантная производная тензора, легко может быть вычислена его контрвариантная производная. Пользуясь формулой (П1.104), нетрудно показать, что

$$g^{ip;k} = 0.$$

П1.12. Тензор кривизны. Тождества Риччи и Бианки. Итак, вторая ковариантная производная от скаляра $f(x^1, \ldots, x^n)$ может быть вычислена по формуле

$$f_{;p;k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^p \partial x^k} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Gamma^i_{pk}. \tag{П1.105}$$

Из формулы (П1.105) следует, что

$$f_{;p;k} - f_{;k;p} = 0. \tag{П1.106}$$

Однако последовательное ковариантное дифференцирование векторов и тензоров не является в общем случае перестановочным. Так, например, нетрудно убедиться, что для контрвариантного вектора A^i имеет место формула

$$A^i_{;k;p} - A^i_{;p;k} = A^s R^i_{skp}, \tag{П1.107}$$

где

$$R^i_{skp} = \frac{\partial}{\partial x^p} \Gamma^i_{sk} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{sp} + \Gamma^r_{sk} \Gamma^i_{rp} - \Gamma^r_{ps} \Gamma^i_{rk}. \tag{П1.108}$$

Величины R^i_{spk} являются компонентами смешанного тензора, который но-

сит название тензора кривизны Римана — Кристоффеля. Заметим, что некоторые авторы введенные здесь компоненты R^i_{pks} обозначают через $-R^i_{pks}$.

Непосредственным вычислением нетрудно получить следующие формулы, аналогичные формуле (П1.107):

$$A_{p;k;s} - A_{p;s;k} = -A_i R^i_{pks}; \tag{П1.109}$$

$$A^i_{pk;l;m} - A^i_{pk;m;l} = A^s_{pk} R^i_{slm} - A^i_{sk} R^s_{plm} - A^i_{ps} R^s_{klm}. \tag{П.110}$$

В общем случае имеют место следующие формулы:

$$A_{r_1 \ldots r_m;k;l} - A_{r_1 \ldots r_m;l;k} = \sum_{\alpha}^{1 \ldots m} A_{r_1, \ldots r_{\alpha-1} h r_{\alpha+1} \ldots r_m} R^h_{r_\alpha kl}; \tag{П1.111}$$

$$A^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p;t;k} - A^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p;k;t} = \sum_{\alpha}^{1 \ldots p} A^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_{\alpha-1} l s_{\alpha+1} \ldots s_p} R^l_{s_\alpha tk} -$$

$$- \sum_{\beta}^{1 \ldots m} A^{r_1 \ldots r_{\beta-1} l r_{\beta+1} \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p} R^{r_\beta}_{ltk}. \tag{П1.112}$$

Формулы (П1.111) и (П1.112) носят название тождеств Риччи.

Из тензора Римана — Кристоффеля R^i_{pkl} можно путем свертывания получить новый тензор, который носит название тензора Риччи

$$R_{pk} = R^s_{pks}. \tag{П1.113}$$

Тензор Риччи имеет большое значение в теории гравитационного поля. Умножив тензор Риччи R_{pk} на фундаментальный тензор g^{sl} и произведя свертывание по всем индексам, получим инвариант, который носит название скалярной кривизны

$$R = g^{pk} R_{pk}. \tag{П1.114}$$

Нетрудно убедиться, что тензор Римана — Кристоффеля удовлетворяет следующим тождествам:

$$R^i_{pkl} = -R^i_{plk}; \tag{П:115}$$

$$R^i_{pkl} + R^i_{klp} + R^i_{lpk} = 0. \tag{П1.116}$$

Ковариантные компоненты тензора Римана — Кристоффеля определяются следующим образом:

$$R_{ipkl} = g_{is} R^s_{pkl}. \tag{П1.117}$$

Нетрудно убедиться, что ковариантные компоненты тензора Римана — Кристоффеля удовлетворяют следующим тождествам:

$$R_{ipkl} = -R_{iplk}; \tag{П1.118}$$

$$R_{ipkl} + R_{ikl p} + R_{ilpk} = 0. \tag{П1.119}$$

Тождества (П1.116) и (П1.119) носят название тождеств Бианки первого рода.

Если применить формулу (П1.111) к метрическому тензору g_{ip}, то получим

$$g_{ip;kl} - g_{ip;l;k} = -g_{sp}R^s_{ikl} - g_{is}R^s_{pkl} = 0. \qquad (П1.120)$$

Из формулы (Р1.120) следует, что

$$R_{ipkl} = -R_{pikl}. \qquad (П1.121)$$

Нетрудно также убедиться, что

$$R_{ipkl} = R_{klip}. \qquad (П1.122)$$

Свертывая тождества (П1.116) по i и l и учитывая формулы (П1.115) и (П1.121), получим

$$R_{pk} - R_{kp} = 0. \qquad (П1.123)$$

Итак, тензор Риччи является симметричным тензором.

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что смешанные компоненты тензора Римана — Кристоффеля удовлетворяют следующему тождеству:

$$R^i_{pkl;m} + R^i_{plm;k} + R^i_{pmk;l} = 0. \qquad (П1.124)$$

Тождество (П1.124) носит название тождества Бианки второго рода.

В заключение приведем еще следующие важные формулы:

$$R^s_{pkl;s} = R_{pk;l} - R_{pl;k}; \qquad (П1.125)$$

$$R^s_{l;s} = 1/2R_{;l}. \qquad (П1.126)$$

Формула (П1.125) получается из выражения (П1.124) свертыванием по индексам i и m, а формула (П1.126) получается из выражения (П1.125) умножением на g^{pk} и свертыванием по p и k.

П1.13. Кривизна в двумерном направлении. Рассмотрим двумерную поверхность, фундаментальная метрическая форма которой имеет вид

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2. \qquad (П1.127)$$

Нетрудно убедиться, что для этой поверхности единственными нулевыми компонентами тензора Римана — Кристоффеля будут следующие:

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}. \qquad (П1.128)$$

Гауссова кривизна рассматриваемой поверхности может быть вычислена по формуле

$$K = -R_{1212}/g. \qquad (П1.129)$$

Вернемся теперь к общему случаю Риманова пространства n измерений. Предположим, что в некоторой точке $(X^1, \ldots, X^n)$ этого пространства задано два контравариантных вектора:

$$\lambda^1(x^1, \ldots, x^n),\ \lambda^2(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \lambda^n(x^1, \ldots, x^n);$$
$$\mu^1(x^1, \ldots, x^n),\ \mu^2(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \mu^n(x^1, \ldots, x^n). \qquad (П1.130)$$

Векторы (П1.130) определяют в рассматриваемой точке пучок направлений

$$\xi^i = \alpha\lambda^i + \beta\mu^i, \qquad (П1.131)$$

где α и β — параметры.

Совокупность векторов ξ^i определяет в рассматриваемой точке некоторое зависящее от параметров α и β двумерное линейное многообразие, которое можно рассматривать как двумерную плоскость, натянутую на векторы λ^i и μ^i. Далее совокупность геодезических, проведенных в направлении всех векторов пучка (П1.131), образует так называемую двумерную геодезическую поверхность. Можно сказать также, что эта поверхность образована всеми геодезическими, которые проходят через рассматриваемую точку $(x^1, \ldots, x^n)$ и касаются двумерной плоскости, натянутой на векторы λ^i и μ^i.

Нетрудно показать, что в соответствии с формулой (П1.129) кривизна геодезической поверхности в рассматриваемой точке $(x^1, \ldots, x^n)$

$$K = \frac{R_{ipkl}\lambda^i\mu^p\lambda^k\mu^l}{(g_{ik}g_{pl} - g_{il}g_{pk})\,\lambda^i\mu^p\lambda^k\mu^l} = \frac{R_{ipkl}\lambda^i\mu^p\lambda^k\mu^l}{(g_{pk}g_{il} - g_{pl}g_{ik})\,\lambda^i\mu^p\lambda^k\mu^l}. \qquad (\text{П1.132})$$

Величина K носит название кривизны в двумерном направлении, исходящем из точки $(x^1, \ldots, x^n)$ и натянутом на векторы $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ и $(\mu^1, \ldots, \mu^n)$.

Если векторы $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ и $(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ будут единичными взаимно ортогональными векторами, то формула (П1.132) упрощается и принимает вид

$$K = -R_{ipkl}\lambda^i\mu^p\lambda^k\mu^l. \qquad (\text{П1.133})$$

Рассмотрим теперь в точке $(x^1, \ldots x^n)$ n взаимно-ортогональных единичных контрвариантных векторов

$$\lambda_s^i \;(i = 1, \ldots, n); \qquad (s = 1, \ldots, n). \qquad (\text{П1.134})$$

Так как векторы $\lambda_i{}^s$ единичны и ортогональны, то должно быть

$$g_{ip}\lambda_n^i\lambda_m^p = \delta_{nm}. \qquad (\text{П1.135})$$

Следовательно,

$$g^{ip} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^i\lambda_s^p. \qquad (\text{П1.136})$$

Вычислим теперь кривизну в двумерном направлении, исходящем из точки $(x^1, \ldots, x^n)$ и определенном двумерной плоскостью, натянутой на вектора $\lambda_p{}^i$ и $\lambda_q{}^i$.

В соответствии с формулой (П1.133) эта кривизна

$$K_{pq} = -R_{iskl}\lambda_p^i\lambda_q^s\lambda_p^k\lambda_q^l. \qquad (\text{П1.137})$$

Из формулы (П1.137) следует

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq} = -R_{iskl}\lambda_p^i\lambda_p^k g^{sl}; \qquad (\text{П1.138})$$

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq} = R_{sk}\lambda_p^s\lambda_p^k. \qquad (\text{П1.139})$$

Эта величина называется кривизной Риччи в направлении единичного вектора $\lambda_p{}^i$. Из формулы (П1.139) следует

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} K_{pq} = R. \qquad (П1.140)$$

Итак, $\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} K_{pq}$ равняется скалярной кривизне пространства в рассматриваемой точке.

П1.14. Плоские пространства. Если рассматриваемое пространство допускает существование координатной системы, в которой все g_{ik} — постоянные величины, то это пространство называется плоским. Очевидно, что евклидово и псевдоевклидово пространства будут плоскими пространствами.

Далее, если все величины g_{ik} постоянны, то, как это следует из формулы (П1.108), все составляющие тензора Римана — Кристоффеля обратятся в нуль. Но, если все составляющие тензора Римана — Кристоффеля обращаются в нуль в какой-либо из координатных систем, то, как это следует из закона преобразования тензоров, они будут равны нулю в любой другой координатной системе.

Итак, обращение в нуль тензора Римана — Кристоффеля является необходимым условием для того, чтобы пространство было плоским, т. е. чтобы можно было посредством надлежащего выбора координатной системы сделать все g_{ik} постоянными.

Можно показать, что это условие является также и достаточным.

П1.15. О физических составляющих тензоров. При пользовании только прямоугольными системами координат различие между ковариантными и контравариантными составляющими векторов исчезает, так как в этом случае оба преобразования эквивалентны друг другу. При переходе к криволинейной системе координат, например к полярной системе координат на плоскости, появляются как ковариантные, так и контравариантные составляющие вектора, причем размерность этих составляющих будет отличаться от их размерности в первоначальной прямоугольной системе координат. Вместе с тем в элементарной механике при переходе к полярной системе координат размерность составляющих вектора (например, векторы силы или векторы перемещения) сохраняется. Это объясняется тем, что в элементарной механике не рассматриваются действительные полярные составляющие вектора, т. е. ковариантные и контравариантные составляющие, а рассматриваются лишь прямоугольные компоненты вектора, но в трех новых направлениях — в радиальном и поперечном.

Во многих случаях оказывается необходимым перейти от ковариантных или контравариантных составляющих вектора к его физическим составляющим, т. е. к таким составляющим, которые при любых преобразованиях координат сохраняют ту же размерность, которую они имели в исходной прямоугольной системе координат. Аналогичная задача возникает нередко также по отношению к составляющим тензоров различных валентностей. Этой задачей занимался еще Леви-Чивита, наиболее подробно ее рассмотрел Трусдел.

Приведем основные формулы, по которым могут быть найдены физические составляющие векторов и тензоров (во всех следующих формулах настоя-

щего параграфа суммирование по одинаковым индексам не производится). Физические составляющие векторов находятся по формулам

$$\lambda_i = \sqrt{g_{ii}}\lambda^i. \qquad (\text{П1.141})$$

Физические составляющие тензоров второй валентности имеют две формы: а) левые составляющие

$$\overset{\text{л}}{A}_{ik} = \sqrt{g_{ii}/g_{kk}}A_i^k; \qquad (\text{П1.142})$$

б) правые составляющие

$$\overset{\text{п}}{A}_{ik} = \sqrt{g_{ii}/g_{kk}}A_k^i. \qquad (\text{П1.143})$$

Заметим, что следы матриц

$$(A_k^i);\ (A_i^k);\ (\overset{\text{л}}{A}_{ik}) \text{ и } (\overset{\text{п}}{A}_{ik})$$

совпадают друг с другом. В ортогональных координатах

$$\overset{\text{л}}{A}_{ik} = \overset{\text{п}}{A}_{ik} = \sqrt{g_{ii}/g_{kk}}A_k^i, \text{ или } \sqrt{g_{kk}/g_{ii}}A_i^k, \text{ или } \sqrt{g_{ii}g_{kk}}A^{ik},$$
$$\text{или } A_{ik}/\sqrt{g_{ii}g_{kk}}. \qquad (\text{П1.144})$$

Физические составляющие тензоров любой валентности могут быть вычислены по формулам

$$A_{i_1\ldots k_q} = \sqrt{\frac{g_{i_1i_1}\cdots g_{i_pi_p}}{g_{k_1k_1}\cdots g_{k_qk_q}}}A_{k_1\ldots k_q}^{i_1\ldots i_p},$$
$$\text{или } \sqrt{g_{i_1i_1}\cdots g_{k_qk_q}}A^{i_1\ldots k_q}, \text{ или } \frac{A_{i_1\ldots k_q}}{\sqrt{g_{i_1i_1}\cdots g_{k_qk_q}}}. \qquad (\text{П1.145})$$

П1.16. Параллельное перенесение векторов и тензоров. Остановимся на некоторых специальных вопросах тензорного анализа. Рассмотрим вопросы о параллельном переносе векторов и тензоров и о нахождении группы движений риманового пространства.

Содержание этого раздела имеет большое значение для ряда приложений тензорного исчисления к проблемам механики и физики.

Рассмотрим вектор (A^1, A^2), заданный в декартовых координатах на евклидовой плоскости в точке p_1. Если этот вектор перенести в точку p_2 таким образом, чтобы он все время оставался параллельным самому себе, то, очевидно, его компоненты A^1 и A^2 во время этого переноса сохранят свои значения, которые они имели в точке p_1. Совершенно иная картина будет в криволинейных координатах. Совершим, например, преобразование координат по формулам

$$x'^1 = x^1 + a(x^2)^2; \qquad x'^2 = x^2 + b(x^1)^2. \qquad (\text{П1.146})$$

В таком случае имеем

$$A'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^r}A^r = A^1 + 2ax^2A^2; \qquad A'^2 = \frac{\partial x'^2}{\partial x^r}A^r = 2bx^1A^2{}^1 + A^2. \qquad (\text{П1.147})$$

Допустим, что точки p_1 и p_2 имеют координаты (x^1, x^2) и (x^1+dx^1, x^2+dx^2) соответственно. Воспользовавшись формулами (П1.146), легко получить также штрихованные координаты этих точек

$$\left.\begin{aligned} x'^1 &= x^1 + a\,(x^2)^2 \\ x'^2 &= x^2 + b\,(x^1)^2 \end{aligned}\right\} \text{ для точки } p_1;$$

$$\left.\begin{aligned} x'^1 + dx'^1 &= x^1 + a\,(x^2)^2 + dx^1 + 2ax^2dx^2 \\ x'^2 + dx'^2 &= x^2 + b\,(x^1)^2 + 2bx^1dx^1 + dx^2 \end{aligned}\right\} \text{ для точки } p_2. \qquad (\text{П1.148})$$

Воспользовавшись теперь формулами (П1.147), нетрудно убедиться в том, что

$$A'^1(x'^1+dx'^1;\ x'^2+dx'^2) \neq A'^1(x'^1;\ x'^2), \qquad (\text{П1.149})$$

$$A'^2(x'^1+dx'^1;\ x'^2+dx'^2) \neq A'^2(x'^1;\ x'^2),$$

в то время как в системе координат (x^1, x^2)

$$A^1(x^1+dx^1;\ x^2+dx^2) = A^1(x^1, x^2), \qquad (\text{П1.150})$$

$$A^2(x^1+dx^1;\ x^2+dx^2) = A^2(x^1, x^2).$$

Итак, в криволинейных координатах в результате параллельного переноса компоненты вектора получают некоторые приращения. Нетрудно показать, что в общем случае криволинейных координат на евклидовой плоскости приращения компонент вектора при его параллельном переносе определяются формулой

$$dA^l = -\Gamma^i_{pk} A^p dx^k. \qquad (\text{П1.151})$$

Следовательно, при параллельном переносе вектора

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{pk} A^p dx^k = 0, \qquad (\text{П1.152})$$

где $i=1, 2$.

По аналогии с этим результатом будем говорить, что в римановом пространстве любого числа измерений вектор A^i в точке $(x^1, \ldots, x^n)$ и вектор A^i+dA^i в точке $(x^1+dx^1, \ldots, x^n+dx^n)$ параллельны между собой, если

$$dA^i = dA^i + \Gamma^i_{pk} A^p dx^k = 0, \qquad (\text{П1.153})$$

где $i=1, \ldots, n$.

При выполнении условия (П1.153) будем говорить также, что вектор A^i+dA^i в точке $(x^1+dx^1, \ldots, x^k+dx^k)$ получен из вектора A^i в точке $(x^1, \ldots, x^n)$ параллельным перенесением.

Аналогичное определение параллельного перенесения может быть дано для любого тензора.

Фундаментальное значение понятия параллельного перенесения заключается в том, что оно инвариантно относительно преобразования координат.

Для того чтобы перенести вектор $A_0{}^i$ из точки $p_0(x_0{}^1, \ldots, x_0{}^n)$ в другую точку $p_1(x_1{}^1, \ldots, x_1{}^n)$, необходимо прежде всего выбрать кривую

$$x^i = x^i(t), \qquad (\text{П1.154})$$

где $i=1, \ldots, n$, соединяющую точки p_0 и p_1, т. е. кривую, для которой

$$x^i(t_0) = x_0{}^i \text{ и } x^i(t_1) = x_1{}^i, \qquad (\text{П1.155})$$

где $i=1, \ldots, n$, и затем проинтегрировать систему уравнений

$$\frac{dA^i}{dt}+\Gamma^i_{pk}A^p\frac{dx_k}{dt}=0 \qquad (\text{П1.156})$$

при начальных условиях $A^i(t_0)=A_0{}^i$.

Если вектор $A(t)$ является решением системы уравнений (П1.156) при указанных начальных условиях, то вектор $A^i(t_1)$ будет тем вектором, который получается в результате параллельного перенесения вектора $A_0{}^i$ из точки p_0 в точку p_1 вдоль кривой (П1.154).

Итак, параллелизм векторов зависит, вообще говоря, от кривой, соединяющей начальную и конечную точки.

Однако в евклидовом (или псевдоевклидовом) пространстве параллелизм векторов не зависит от кривой, вдоль которой производится параллельное перенесение вектора.

Итак, в каждой точке евклидова (и псевдоевклидова) пространства существует только один вектор $A^i(x^1, \ldots, x^n)$, параллельный данному $A_0{}^i(x_0{}^1, \ldots, x_0{}^n)$.

Сравнивая уравнение (П1.156) с уравнением геодезической

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{pk}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0, \qquad (\text{П1.157})$$

видим, что в любом римановом пространстве вектор dx^i/ds, касательный к геодезической, переносится параллельно вдоль геодезической.

П1.17. Некоторые свойства непрерывных групп. Точечное преобразование в римановом пространстве, зависящее от одного параметра, может быть описано системой уравнений

$$\overline{x^i}=f^i(x^1, \ldots, x^n; a), \qquad (\text{П1.158})$$

где $i=1, 2, \ldots, n$ и a — параметр.

Если в уравнении (П1.158): 1) последовательное выполнение двух таких преобразований равносильно выполнению одного преобразования того же типа; 2) в системе преобразований (П1.158) содержится тождественное преобразование и преобразование, обратное каждому из данных, то совокупность преобразований (П1.158) называется однопараметрической непрерывной группой преобразований.

Первое из сформулированных условий равносильно утверждению, что для каждой пары параметров a и b всегда найдется такой третий параметр c, что

$$f^i[f^1(x^1, \ldots, x^n; a); f^2(x^1, \ldots, x^n; a); \ldots f^n(x^1, \ldots x^n; a); b]= \\ =f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, c). \qquad (\text{П1.159})$$

Второе условие равносильно утверждению, что всегда найдутся такие параметры a^0 и $\overline{a}$, что

$$x^i=f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n, a^0); \qquad (\text{П1.160})$$

$$x^i=f^i(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n, \overline{a}), \qquad (\text{П1.161})$$

если $\overline{x}^k$ определяется по уравнениям (П1.158).

Определение однопараметрической непрерывной группы преобразований может быть обобщено, если вместо уравнений (П1.158) рассматривать урав-

нения, зависящие от r параметров:

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, \ldots x^n; a^1, \ldots, a^r), \tag{П1.162}$$

где $i=1, \ldots, n$ и $a^1, \ldots, a^r$ — параметры.

Для того чтобы совокупность уравнений (П1.162) определяла группу, необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям, аналогичным условиям, сформулированным для однопараметрических групп. В дальнейшем будем считать правые части уравнений (П1.158) и (П1.162) аналитическими функциями всех своих аргументов.

Если уравнения (П1.158) определяют однопараметрическую группу, то все $\bar{x}^i$, рассматриваемые как функции параметра a, должны удовлетворять системе уравнений вида

$$d\bar{x}^i/da = \psi(a)\,\xi^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n). \tag{П1.163}$$

Допустим, что a_0 есть значение параметра, соответствующее тождественному преобразованию. В таком случае, положив

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\,da, \tag{П1.164}$$

приведем уравнение (П1.163) к виду

$$d\bar{x}^i/dt = \xi^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n), \tag{П1.165}$$

причем тождественному преобразованию теперь соответствует значение параметра $t=0$.

Если функции $\xi^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ регулярны в некоторой области определения переменных $\bar{x}^i$, то интегралы уравнений (П1.165) можно представить в виде

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\,t + \xi^p(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial \xi^l}{\partial x^p}\frac{t^2}{2} + \ldots \tag{П1.166}$$

Введем теперь обозначения

$$Xf = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}; \tag{П1.167}$$

$$X^r f = \underbrace{X \ldots X}_{r \text{ раз}} f. \tag{П1.168}$$

С помощью этих обозначений равенства (П1.166) можно записать в виде

$$\bar{x}^i = x^i + tXx^i + \frac{t^2}{2}X^2x^i + \cdots \frac{t^r}{r!}X^r x^i \ldots \tag{П1.169}$$

Нетрудно также убедиться, что, вообще говоря, любая регулярная в области определения x^i функция $F(x^1, \ldots, x^n)$ может быть представлена в виде

$$F(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) = F(x^1, \ldots, x^n) + tXF(x^1, \ldots, x^n) + \\ + \cdots + \frac{t^r}{r!}X^r F(x^1, \ldots, x^n) + \ldots \tag{П1.170}$$

В теории непрерывных групп преобразований большое значение имеют инфинитизимальные или бесконечно малые преобразования. Эти преобразо-

вания получим, если в формуле (П1.169) заменим параметр t бесконечно малым δt и отбросим все члены, имеющие порядок малости выше первого. Итак, имеем

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\,\delta t. \qquad (П1.171)$$

При бесконечно малом преобразовании группы координаты испытывают бесконечно малое изменение

$$\delta x^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\delta t. \qquad (П1.172)$$

Кроме того, как это видно из формулы (П1.170), любая функция $F(x, \ldots, x^n)$ испытывает при этом бесконечно малое изменение

$$\delta F = XF\delta t. \qquad (П1.173)$$

Согласно предложенной Ли терминологии оператор Xf называют символом бесконечно малого преобразования группы. Этот оператор в соответствии с формулой (П1.169) дает возможность построить также конечные уравнения группы. Принято говорить, что группа порождена оператором Xf, и сам этот оператор называется оператором, порождающим группу.

Из формул (П1.165) видно, что функции $\xi^i = (x^i, \ldots, x^n)$ являются контравариантными компонентами некоторого вектора. Ковариантные компоненты этого вектора могут быть вычислены с помощью обычного приема опускания индексов.

Совершим теперь преобразование координат

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad (П1.174)$$

где $i = 1, \ldots, n$; φ^1 удовлетворяет уравнению

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^i} = 1, \qquad (П1.175)$$

а $\varphi^2, \ldots, \varphi^n$ — независимые решения уравнения

$$\xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0. \qquad (П1.176)$$

Нетрудно видеть, что в новой системе координат контравариантный вектор ξ^i будет иметь компоненты

$$\xi'^1 = 1; \quad \xi'^2 = \xi'^3 = \ldots = \xi'^n = 0. \qquad (П1.177)$$

Итак, в новой системе координат уравнения группы (П1.165) примут следующий вид:

$$\frac{d\bar{x}'^1}{dt} = 1; \quad \frac{dx'^k}{dt} = 0 \quad (k = 2, \ldots, n). \qquad (П1.178)$$

Следовательно, в этой системе координат конечные уравнения группы будут иметь следующий вид:

$$\bar{x}' = x' + t; \text{ и } \bar{x}^k = x^k, \quad (k = 2, \ldots, n). \qquad (П1.179)$$

Рассмотрим теперь r бесконечно малых преобразований

$$X_\alpha f = \xi^i_\alpha \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (\alpha = 1, \ldots, r). \qquad (П1.180)$$

Будем говорить, что эти преобразования линейно независимы, если не существует системы постоянных c^α, для которых выполняются равенства

$$c^\alpha \xi_\alpha^i = 0. \tag{П1.181}$$

Допустим теперь, что символы $X_\alpha f$ бесконечно малых преобразований удовлетворяют условиям

$$X_\alpha X_\beta f - X_\beta X_\alpha f = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma f, \tag{П1.182}$$

где $\beta, \alpha, \gamma = 1, \ldots, r$; константы $c_{\alpha\beta}^\gamma$ удовлетворяют условиям:

$$c_{\alpha\beta}^\gamma + c_{\beta\alpha}^\gamma = 0;$$

$$c_{\alpha\beta}^\gamma c_{\gamma\delta}^\varepsilon + c_{\beta\delta}^\gamma c_{\gamma\alpha}^\varepsilon + c_{\delta\alpha}^\gamma c_{\gamma\beta}^\varepsilon = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, \ldots, r). \tag{П1.183}$$

В теории непрерывных групп доказывается, что операторы $X_\alpha f$, удовлетворяющие упомянутым условиям, порождают некоторую r-параметрическую группу c_r, образованную из всех однопараметрических групп, порожденных бесконечно малыми преобразованиями

$$c^\alpha X_\alpha f, \tag{П1.184}$$

где все c^α — произвольные постоянные.

Верна также обратная теорема: каждая r-параметрическая группа c_r может быть порождена r линейно-независимыми бесконечно малыми преобразованиями $X_\alpha f$, удовлетворяющими условиям (П1.182) и (П1.183). Заметим, что константы $c_{\alpha\beta}^\gamma$ называются структурными константами группы.

Операторы (П1.184) порождают инфинитизимальное преобразование

$$x'^i = x^i + c^\alpha \xi_\alpha^i (x^1, \ldots, x^n)\, \delta t \qquad (\alpha = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n). \tag{П1.185}$$

Инфинитизимальные преобразования (П1.185) в свою очередь порождают, по терминологии Ли, конечные преобразования группы

$$x'^i = x^i + tc^\alpha X_\alpha x^i + \ldots + \frac{t^m}{m!} c^{\alpha_1} \ldots c^{\alpha_m} X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_m} x^i + \ldots \tag{П1.186}$$

Разумеется, преобразования (П1.186) имеют смысл только при тех значениях c^α и t, при которых ряды (П1.186) сходятся.

Параметры a^α, входящие в конечные уравнения группы (П1.162), могут быть представлены в виде

$$a^\alpha = \psi^\alpha(u^1, \ldots, z^r); \qquad u^\alpha = c^\alpha t. \tag{П1.187}$$

Не будем более подробно останавливаться на основных свойствах непрерывных групп преобразований. Более подробное изложение приведено в [743].

В заключение приведем один пример. Пусть однопараметрическая группа на плоскости задана оператором

$$Xf = x^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}. \tag{П1.188}$$

Следовательно, в этом случае $\xi^1(x^1, x^2) = -x^2$; $\xi^2(x^1, x^2) = x^1$.

Итак, в соответствии с формулами (П1.171) получим следующие беско-

нечно малые преобразования группы, порожденной оператором (П1.188):

$$\bar{x}^1 = x^1 - x^2\delta t; \qquad \bar{x}^2 = x^2 + x^1\delta t. \tag{П1.189}$$

Аналогично в соответствии с формулами (П1.169) получим следующие конечные уравнения группы:

$$\bar{x}^1 = x^1 - x^2 t - x^1\frac{t^2}{2!} + x^2\frac{t^3}{3!} + \ldots = x^1\cos t - x^2\sin t;$$

$$\bar{x}^2 = x^2 + x^1 t - x^2\frac{t^2}{2} - x^1\frac{t^3}{3} + \ldots = x^1\sin t + x^2\cos t. \tag{П1.190}$$

Итак, оператор (П1.190) порождает группу вращений плоскости.

П1.18. Группы движений. Уравнения Киллинга. Допустим, что в рассматриваемом римановом пространстве существуют две системы координат x^i и $\bar{x}^i$, обладающие тем свойством, что для каждой из них компоненты метрического тензора g_{ik} и $\bar{g}_{ik}$ являются одними и теми же функциями от x^i и $\bar{x}^i$ соответственно. Допустим, далее, что уравнения преобразования координат

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \tag{П1.191}$$

зависят от одного или нескольких параметров. В таком случае эти уравнения можно рассматривать, как уравнения, определяющие непрерывное движение пространства в самом себе.

Пусть бесконечно малое движение в нашем пространстве задается уравнениями

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\,\delta t. \tag{П1.192}$$

В таком случае должно иметь соотношение

$$g_{ik}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)\,d\bar{x}^i\,d\bar{x}^k = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)\,dx^i\,dx^k \tag{П1.193}$$

или, учитывая уравнение (П1.192),

$$\left(g_{ik} + \xi^\alpha\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha}\delta t\right)\left(dx^i + \frac{\partial\xi^i}{\partial x^\beta}dx^\beta\,\delta t\right)\left(dx^k + \frac{\partial\xi^k}{dx^\nu}dx^\nu\delta t\right) = g_{ik}dx^i dx^k. \tag{П1.194}$$

Так как уравнение (П1.194) должно удовлетворяться для любых dx^i с точностью до членов высшего порядка малости относительно δt, получим

$$\xi^\alpha\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}g_{\alpha k} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^k}g_{i\alpha} = 0; \tag{П1.195}$$

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0. \tag{П1.196}$$

Уравнения (П1.196) называются уравнениями Киллинга, а контравариантный вектор ξ^i — вектором Киллинга.

Итак, если пространство допускает бесконечно малое движение (П1.192), то вектор Киллинга удовлетворяет уравнению (П1.196). Предположим, что выбрана такая координатная система, что вектор Киллинга имеет компоненты

$$\xi^1 = 1, \ \xi^2 = \xi^3 = \ldots = \xi^n = 0. \tag{П1.197}$$

В этом случае уравнение Киллинга (П1.195) принимает вид

$$\partial g_{ik}/\partial x^r = 0. \tag{П1.198}$$

Итак, если система координат выбрана таким образом, что компоненты метрического тензора не зависят от x^1, это пространство допускает порождаемую вектором ξ^i однопараметрическую группу движений

$$\bar{x}^i = x^i + \delta^i_1 t. \qquad (П1.199)$$

В заключение приведем без доказательства одну теорему, имеющую важное значение в теории групп движений.

Т е о р е м а. Всякое n-мерное пространство постоянной кривизны допускает непрерывную группу движений, зависящую от $[n(n+1)]/2$ параметров. Пространства постоянной кривизны являются единственным типом пространств, допускающих группу движений, содержащую $[n(n+1)]/2$ параметров. Доказательство этой теоремы можно найти в [743].

П1.19. Тензорные методы в механике консервативных систем с конечным числом степеней свободы [57]. Остановимся на некоторых приложениях тензорных методов к проблемам механики. Приведенные примеры приложений этих методов, разумеется, не могут дать исчерпывающего представления о роли тензорного исчисления в механике. Вместе с тем, ознакомившись с этими примерами, читатель сможет в известной мере оценить их высокую эффективность при рассмотрении конкретных проблем, освещенных в настоящей книге.

Рассмотрим консервативную механическую систему, конфигурация которой определяется значениями координат x^i. Будем считать, что вариации этих координат могут иметь произвольные значения.

Действующие на систему внешние обобщенные силы X_i определяются равенствами

$$dw = X_i dx^i;$$

здесь w — работа, произведенная этими силами над системой на перемещениях dx^i.

Так как силы X_i предполагаются консервативными, то должно быть

$$X_i = \partial w / \partial x^i. \qquad (П1.200)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы задается формулой

$$T = 1/2 a_{ik}(x) \dot{x}^i \dot{x}^k. \qquad (П1.201)$$

Уравнения движения системы по Лагранжу должны иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i.$$

Пространство конфигураций системы может быть метризовано при помощи линейных элементов следующих типов:

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ik} dx^i dx^k \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \qquad (П1.202)$$

или

$$ds^2 = (E - V) a_{ik} dx^i dx^k;$$

здесь E — полная и V — потенциальная энергии системы.

В дальнейшем, если это не будет оговорено, будем пользоваться линейным элементом (П1.202). Следует обратить внимание на то, что в пространстве конфигураций коэффициенты $a_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$ играют роль метрического

тензора. Итак, рассмотрим пространство конфигураций как некое риманово пространство, характеризуемое линейным элементом (П1.202).

В этом пространстве ковариантный дифференциал и ковариантная производная вектора A^i определяются следующими формулами:

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{pk} A^p dx^k; \qquad A^i_{ik} = \partial A^i/\partial x^k + \Gamma^i_{pk} A^p.$$

Здесь символы Кристоффеля Γ^i_{pk} вычисляются при помощи метрического тензора a_{ik}. По аналогии с обычным дифференциальным исчислением можно определить ковариантную производную вектора A^i вдоль кривой $x^i = x^i(\sigma)$, где σ — параметр, при помощи следующих формул:

$$\frac{\delta A^i}{\delta \sigma} = \frac{dA^i}{d\sigma} + \Gamma^i_{pk} A^p \frac{dx^k}{d\sigma}.$$

В частном случае параметр σ может иметь смысл времени, в этом случае будем вместо σ писать t, т. е., другими словами, будем считать, что $\sigma = t$.

Скоростью рассматриваемой системы в римановом пространстве конфигураций будем называть контрвариантный вектор $v^i = dx^i/dt$. В соответствии с этим ускорение системы определяется как ковариантная производная вектора v^i вдоль кривой $x^i(t)$, т. е. при помощи формулы

$$f^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{pk} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^k}{dt}.$$

Само собой разумеется, что с помощью фундаментального метрического тензора a_{ik} можем от контрвариантных компонент векторов v^i и f^i перейти к их ковариантным компонентам, т. е. выполнить следующую операцию: $v_i = a_{ip} v^p$; $f_i = a_{ip} f^p$.

Первый инвариант (квадрат длины) вектора скорости механической системы может быть вычислен по формуле $v^2 = v_i v^i = a_{ik} v^i v^k = (ds/dt)$.

Пусть λ^i — единичный вектор касательной; ν^i — единичный вектор главной нормали к траектории $x^s(s)$ и k — кривизна этой траектории, тогда в соответствии с первой формулой Френе имеем

$$\frac{\delta \lambda^i}{\delta s} = \frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma^i_{pk} \lambda^p \frac{dx^k}{ds} = k\nu^i.$$

Далее, учитывая, что $v^i = v\lambda^i$, имеем

$$f^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{\delta (v\lambda^i)}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^i + v\frac{\delta \lambda^i}{\delta t} = \frac{dv}{dt}\lambda^i + v\frac{\delta \lambda^i}{\delta s}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\lambda^i + kv^2\nu^i. \tag{П1.203}$$

Итак, ускорение, как и в элементарной динамике, складывается из компоненты dv/dt, направленной по касательной, и компоненты kv^2, направленной по главной нормали к траектории в пространстве конфигураций.

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = f_i.$$

Учитывая приведенные выше формулы, имеем $f_i = X_i$ или $f^i = X^i$.

Таким образом, приходим к выводу, что в римановом пространстве конфигураций ускорение равно силе — замечательное, как говорит Дж. Л. Синдж

[57], обобщение второго закона Ньютона. Учитывая формулу (П1.203), можем уравнения движения записать также в виде

$$\frac{dv}{dt}\lambda^i + kv^2\nu^i = X^i$$

и, учитывая формулу (П1.201), в виде

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{pk}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^k}{dt} = X^i.$$

Наконец, если выбрать s в качестве независимой переменной, уравнения движения могут быть представлены в следующем виде:

$$v^2\left[\frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma^i_{pk}\lambda^p\frac{dx^k}{ds}\right] + v\frac{dv}{ds}\lambda^i = X^i; \qquad \lambda^i = \frac{dx^i}{ds}; \qquad \lambda_i\lambda^i = 1.$$

Тензорные методы могут быть с успехом применены при изучении вопросов устойчивости рассматриваемой динамической системы. Для этой цели введем множество траекторий, определяемое уравнением $x^i = x^i(\sigma, \tau)$. Здесь σ — параметр, меняющийся вдоль каждой траектории, и τ — параметр, постоянный для всех точек данной траектории. Далее, обозначив через ξ^i вектор бесконечно малого смещения (вектор возмущения), можем написать

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tau}d\tau.$$

Если ввести в рассмотрение единичный вектор μ^i, имеющий то же направление, что и вектор ξ^i, то, очевидно, $\xi^i = \xi\mu^i$; $\mu_i\mu^i = 1$, где $\xi = \sqrt{\xi_i\xi^i}$.

В зависимости от физических соображений термину «устойчивость» могут быть даны различные определения. Однако во всех этих определениях основное значение имеет характер изменения длины вектора смещения, ξ^i, т. е. характер изменения величины ξ, определяемой предыдущей формулой. Можно доказать [57], что длина вектора возмущения ξ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi\left(v^2R_{ipkl}\mu^i\lambda^p\mu^k\lambda^l - \frac{\delta\mu_i}{\delta t}\frac{\delta\mu^i}{\delta t} - X_{ip}\mu^i\mu^p\right) = 0. \qquad \text{(П1.204)}$$

Здесь все величины, стоящие в круглых скобках, относятся к невозмущенной траектории.

Отметим, что приведенные формулы относятся собственно не только к классу консервативных голономных систем, но и к более широкому классу так называемых склерономных голономных систем, кинетическая энергия которых определяется той же формулой (П1.201), но силы $X_i(x^1, \ldots, x^n)$ уже не являются больше консервативными. [Другими словами, в случае склерономных, но не консервативных, голономных систем, уравнения (П1.200) для сил X_i уже не имеют места].

Если ограничиться консервативными голономными системами, то вместо линейного элемента (П1.202) можно воспользоваться также линейными элементами

$$ds^2 = (E - V)a_{ik}dx^i dx^k. \qquad \text{(П1.205)}$$

Траектория движения системы будет геодезической в римановом пространстве,

метрика которого определяется линейным элементом (П1.205), т. е.

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pk}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (П1.206)$$

Длина вектора возмущения ξ в рассматриваемом случае будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \xi\left(K - \frac{\delta\mu_i}{\delta s}\frac{\delta\mu^i}{\delta s}\right) = 0. \qquad (П1.207)$$

Здесь K — риманова кривизна в двумерном направлении, определенном векторами ξ^i и λ^i, где λ^i — единичный касательный вектор к невозмущенной траектории.

В заключение отметим, что теории координат Ферми и переноса Ферми — Уолкера изложены в [139].

Существуют две формы записи смешанных тензоров: $T^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ и $T^{i_1 i_2 \ldots i_n}{}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$. В последнее время более распространенной стала вторая форма, так как здесь сразу видно, в каком порядке и на какие места должны опускаться верхние индексы (или подниматься нижние индексы). Если пользоваться этим правилом, то можно применять первую форму как более компактную.

Приложение 2

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКИХ И КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

П2.1. Представления наблюдаемых в квантовой теории в форме Дирака. П. Дирак ввел следующие обозначения в квантовую теорию [44]: $|\psi\rangle$ — кет-вектор (вектор-столбец), $\langle\psi|$ — бра-вектор (вектор-строка, сопряженная столбцу $|\psi\rangle$), $\langle\psi|\chi\rangle$ — бракет (круглые скобки, означающие скалярное произведение ψ и χ). Эти обозначения и их свойства нашли широкое применение при описании динамических моделей квантовых систем. Отметим некоторые свойства введенных векторов.

1. Если C_1 и C_2 — произвольные комплексные числа, то существует такой вектор

$$|u\rangle = C_1|a\rangle + C_2|b\rangle.$$

2. Если кет-вектор зависит от параметра q', $q_1' \leqslant q' \leqslant q_2'$, то для непрерывного набора состояний

$$|v\rangle = \int_{q_1'}^{q_2'} c(q')|q'\rangle\, dq';$$

3. $C_1|a\rangle + C_2|a\rangle = (C_1 + C_2)|a\rangle$.

Отметим, что кет-векторы $+|a\rangle$ и $-|a\rangle$ представляют одно и то же состояние, т. е. между состоянием системы и «направлением» кет-вектора в пространстве кет-векторов существует взаимно-однозначное соответствие. Данное утверждение не имеет аналогов в классической механике и показывает, что классический и квантовый принцип суперпозиции отличаются друг от друга.

Пример 1. Если в классической физике складывать два типа колебаний струны, отличающихся только амплитудой друг от друга, то в результате образуется новый тип колебаний с новой амплитудой, т. е. в классической механике различные амплитуды соответствуют различным состояниям системы. В квантовой механике все три амплитуды будут соответствовать одному типу колебаний, так как в квантовой механике отсутствует понятие, аналогичное классической амплитуде; существенным является только направление кет-вектора. Если $(C_1 + C_2) = 0$, то в классической механике имеем состояние покоя, которое является одним из состояний системы; в квантовой механике вообще нет состояния, в котором отсутствует движение, так как отсутствие движения вообще ничему не соответствует в квантовой механике. Такая ситуация особенно проявляется при исследовании так называемого вакуумного состояния в квантовой теории, о котором речь пойдет ниже.

4. Скалярное произведение двух векторов $\langle b|$ и $|a\rangle$ имеет следующие свойства:

а) $(\langle b_1| + \langle b_2|)|a\rangle = \langle b_1|a\rangle + \langle b_2|a\rangle$;

б) $(c\langle b|)|a\rangle = c\langle b|a\rangle$.

5. Допустим, что $g(t) = \frac{d}{dt} f(t) = Df(t)$. Тогда

а) $|b\rangle = D|a\rangle$;

б) $D(|a_1\rangle + |a_2\rangle) = D|a_1\rangle + D|a_2\rangle$; в) $D(c|a\rangle) = cD|a\rangle$.

Если $D = I$ — оператор тождественного преобразования, то $I|a\rangle = |a\rangle$.

Коммутатор двух операторов D_1 и D_2 записывается в указанном выше виде $[D_1, D_2]$ с помощью соотношения $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$. При этом, если $D_1D_2 = D_2D_1$, то операторы коммутируют между собой (имеем аналог классических переменных); в общем случае $D_1D_2 \neq D_2D_1$ (имеем аналог квантовых переменных).

Рассмотрим два кет-вектора $|a\rangle$ и $|b\rangle$ и соответствующие им бра-вектора $\langle a|$ и $\langle b|$. Из этих векторов можно образовать четыре комбинации чисел: $\langle a|b\rangle$, $\langle b|a\rangle$, $\langle a|a\rangle$ и $\langle b|b\rangle$. В общем случае числа $\langle a|b\rangle$ и $\langle b|a\rangle$ будут комплексными. В квантовой теории делается предположение

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*, \qquad \langle a|a\rangle \geqslant 0.$$

Допустим, что L^+ — линейный оператор, эрмитовски сопряженный оператору L. Тогда бра-вектор, связанный с кет-вектором $|q\rangle = L|p\rangle$, записывается так:

$$\langle q| = \langle p|L^+ = (\langle L|p\rangle)^+ = (|q\rangle)^+.$$

Следовательно, если $\langle a| = \langle p|L^+$ и $|a\rangle = L|p\rangle$, то

$$\langle p|L^+|b\rangle = \langle b|L|p\rangle^*.$$

Если некоторая величина может быть измерена, то ее собственные кет-векторы образуют полную систему собственных векторов. В случае дискретных собственных значений наблюдаемой величины имеется система собственных кет-векторов $\{|l\rangle\}$; это означает, что любой кет-вектор $|\psi\rangle$ можно разложить по собственным кет-векторам

$$|\psi\rangle = \sum_l |l\rangle\langle l|\psi\rangle, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = I.$$

Допустим теперь, что операторы наблюдаемых величин A и B не коммутируют между собой и удовлетворяют условию коммутации

$$[A, B] = iC, \tag{П2.1}$$

где C — постоянная или оператор. Квантовое среднее значение величин A и B для большого числа измерений равно

$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$, $\langle B\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, Тогда квантовые флуктуации

$$\langle A^2\rangle = \langle\psi|A^2|\psi\rangle, \qquad \langle B^2\rangle = \langle\psi|B^2|\psi\rangle.$$

Среднеквадратичные отклонения при измерении величин A и B, имеющие кван-

товую природу, равны соответственно

$$\langle(\Delta A)^2\rangle=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2,\ \langle(\Delta B)^2\rangle=\langle B^2\rangle-\langle B\rangle^2.$$

В рассматриваемом случае наблюдаемые переменные A и B не могут быть одновременно измерены с любой степенью точности, их среднеквадратичные отклонения удовлетворяют неравенству

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle\geqslant{}^1/_2|\langle C\rangle|^2,\quad \langle C\rangle=(\psi|C|\psi). \tag{П2.2}$$

Таким образом, получили математическое выражение принципа неопределенности Гейзенберга.

Обозначим $\alpha=A-\langle A\rangle$, $\beta=B-\langle B\rangle$. Так как величины $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ — обыкновенные числа, то операторы α и β удовлетворяют условию (П2.1) $[\alpha, \beta]=iC$. Так как $\langle\alpha\rangle=\langle\beta\rangle=0$, то $\langle(\Delta A)^2\rangle=\langle\alpha^2\rangle=\langle(\Delta\alpha)^2\rangle$, $\langle(\Delta B)^2\rangle=\langle(\Delta\beta)^2\rangle$. Следовательно, в силу (П2.2)

$$\langle(\Delta\alpha)^2(\Delta\beta)^2\rangle=\langle(\Delta A)^2(\Delta B)^2\rangle\geqslant{}^1/_4|\langle C\rangle|^2. \tag{П2.3}$$

Знак равенства в соотношениях неопределенности (П2.1), (П2.2) достигается при условии

$$\alpha|\psi)=C\beta|\psi),\qquad (\psi|(\alpha\beta+\beta\alpha)|\psi)=0, \tag{П2.4}$$

где C — постоянная.

Таким образом, если кет-вектор $|\psi)$ удовлетворяет условиям (П2.4), то произведение оказывается минимальным, $(\Delta A)(\Delta B)={}^1/_2\langle C\rangle$. Состояния с минимальной неопределенностью рассмотрены подробно в [398] и др. В п. П2.2 приведены элементарные примеры подобных состояний.

П2.2. Состояния с минимальной неопределенностью в квантовой теории. Состояния, для которых в (П2.2) выполняется соотношение типа $(\Delta A\Delta B)={}^1/_2\langle C\rangle$, будем называть состояниями с минимальной неопределенностью. Так, для квантовой системы, описываемой в терминах переменных $(\hat{q}, \hat{p})$, имеем $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p}=\hbar/2$.

Рассмотрим несколько наиболее распространенных примеров нахождения состояний квантовых систем с минимальной неопределенностью [388, 389, 408, 409], имеющих самостоятельный интерес.

Пример 1. Рассмотрим свободную частицу. Предположим, что $A=p$, $B=q$ и необходимо найти состояние системы, в котором произведение $(\Delta\hat{p}\Delta\hat{q})$ минимально.

Поскольку операторы A и B имеют p- и q-представления, то необходимо иметь соответствующие правила работы с этими представлениями и перехода от одного представления к другому. В квантовой теории оператор $\hat{p}$ при переходе из p-представления к q-представлению преобразуется по следующему правилу [389, 408, 409]:

$$(q'|\hat{p}|q'')=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q'}(q'|q'')=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q''}(q'|q''). \tag{П2.5}$$

Аналогично оператор $\hat{q}$ при переходе к p-представлению преобразуется по правилу

$$(p'|\hat{q}|p'')=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p'}(p'|p'')=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p''}(p'|p'').$$

Тогда искомое состояние системы соответствует минимальной степени локали-

зации частицы в импульсном пространстве, когда ее координата находится в интервале Δq координатного пространства.

Уравнения типа (П2.4) эквивалентны уравнению

$$\frac{i}{\xi}(q' - \langle q\rangle)\,\psi(q') = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq'} - \langle p\rangle\right)\psi(q'); \qquad (П2.6)$$

$c = i\xi$, $\psi(q') = (q' \mid \psi)$.

Решение (П2.6) имеет вид

$$\psi(q') = c_2 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle q' - \frac{1}{2\pi\xi}(q' - \langle q\rangle)^2\right\}, \qquad (П2.7)$$

где c_2 — постоянная интегрирования. Так как

$$(\psi \mid \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q')|^2\, dq' = 1, \quad \langle(\Delta q)^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q')|^2 (q' - (\Delta q))^2\, dq',$$

то имеем

$$\hbar\xi = 2\langle(\Delta q)^2\rangle; \qquad |c_2|^2 = [2\pi\langle(\Delta q)^2\rangle]^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\psi(q') = \frac{1}{[2\pi\langle(\Delta q)^2\rangle]^{1/4}} \exp\left\{\frac{i\langle p\rangle q'}{\hbar} - \frac{(q' - \langle q\rangle)^2}{4\langle\Delta q)^2\rangle}\right\}. \qquad (П2.8)$$

Таким образом, выражение (П2.8) описывает волновую функцию с минимальной неопределенностью в координатном представлении. Среднеквадратичная флуктуация величины p определяется через заданную среднеквадратичную флуктуацию $\langle(\Delta q)^2\rangle$ в виде

$$\langle(\Delta p)^2\rangle = \hbar^2\langle(\Delta q)^2\rangle/4.$$

Так как вектор состояния $|\psi)$ в p-представлении и q-представлении имеет соответственно вид

$$\psi(q') \equiv (q' \mid \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp\left\{\frac{ip'q'}{\hbar}\right\}(p' \mid \psi)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \qquad (П2.9)$$

$$\varphi(p') \equiv (p' \mid \psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dq' \exp\left\{-\frac{ip'q'}{\hbar}\right\}(q' \mid \psi), \qquad (П2.10)$$

то из (П2.8), (П2.10) следует

$$\varphi(p') = \frac{1}{[2\pi\langle(\Delta p^2)\rangle]^{1/4}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\langle q\rangle(p' - \langle p\rangle) - \frac{(p' - \langle p\rangle)^2}{4\langle(\Delta p)^2\rangle}\right\}. \qquad (П2.11)$$

Таким образом, получили выражение для волновой функции с минимальной неопределенностью в импульсном представлении.

Согласно вероятностной интерпретации квантовой теории вероятность того, что частица локализована между q' и $q'+dq'$, равна $|\psi(q')|^2 dq'$. Используя (П2.8), получим

$$|\psi(q')|^2 dq' = \frac{dq'}{\sqrt{2\pi(\langle(\Delta q)^2\rangle)}} \exp\left\{-\frac{(q' - \langle q\rangle)^2}{2\langle(\Delta q)^2\rangle}\right\}. \qquad (П2.12)$$

В импульсном представлении $|\varphi(p')|^2$ также гауссовская функция с центром $p'=\langle p\rangle$ и нормальным отклонением $\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}=\hbar/2\cdot\sqrt{\langle(\Delta q)^2\rangle}$. Функция $\psi(q')$ представляет собой волновой пакет, а соотношение (П2.8) определяет волновой пакет с минимальной неопределенностью.

Пример 2. Рассмотрим теперь поведение волновых пакетов с минимальной неопределенностью во времени на примере той же свободной частицы, у которой потенциал $U(q)=0$. Гамильтониан такой системы

$$H=p^2/2m=H^+. \tag{П2.13}$$

Так как для консервативной системы величина H является интегралом движения, а $[p, H]=0$, то величина p также является интегралом движения для свободной частицы. Оператор p удовлетворяет уравнению для собственных значений

$$p\,|\,p'\,\rangle = p'\,|\,p'\,\rangle; \tag{П2.14}$$

$$Hp\,|\,p'\,\rangle = pH\,|\,p'\,\rangle = p'H\,|\,p'\,\rangle. \tag{П2.15}$$

Из (П2.15) следует, что вектор $H|p'\rangle$ также является собственным кет-вектором оператора p с собственным значением p' и отличается от кет-вектора согласно его свойствам только постоянным множителем E. Тогда

$$H\,|\,p'\,\rangle = E\,|\,p'\,\rangle,$$

т. е. $E=p^2/2m$. Отметим, что $-p$ и $+p$ дают одинаковые значения энергии при движении частицы направо и налево, т. е. имеют пример вырождения в квантовой системе.

Кет-вектор состояния системы $|\psi(t)\rangle$ с гамильтонианом H подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\,\psi(t)\,\rangle = H\,|\,\psi(t)\,\rangle, \tag{П2.16}$$

которое дает решение

$$|\,\psi(t)\,\rangle = U(t, t_0)\,|\,\psi(t_0)\,\rangle, \qquad U(t, t_0)=\exp[-iH(t-t_0)/\hbar]; \tag{П2.17}$$

вектор $\psi(t_0)$ представляет состояние системы в момент времени t_0. В рассматриваемом случае уравнение Шредингера (П2.16) принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\,|\,\psi(t)\,\rangle}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\,|\,\psi(t)\,\rangle \tag{П2.18}$$

и из (П2.17) следует

$$|\,\psi(t)\,\rangle = \exp[-ip^2t/2m\hbar]\,|\,\psi(0)\,\rangle. \tag{П2.19}$$

В координатном представлении волновая функция, зависящая от времени, имеет, согласно изложенному выше, вид

$$\psi(q', t) = \langle q'\,|\,\psi(t)\,\rangle = \langle q'\,|\exp[-ip^2t/2m\hbar]\,|\,\psi(0)\,\rangle. \tag{П2.20}$$

Из условия полноты для собственных векторов $|p'\rangle$ уравнение (П2.20) можно записать в виде

$$\psi(q', t) = \int_{-\infty}^{\infty}\langle q'\,|\exp[-ip^2t/2m\hbar]\,|\,p'\,\rangle\,dp'\,\langle p'\,|\,\psi(0)\,\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\exp[-ip^2t/2m\hbar]\,\langle q'\,|\,p'\,\rangle\,dp'\varphi(p', 0). \tag{П2.21}$$

Так как

$$\langle p' \mid q' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{ip'q'}{\hbar}\right\}, \qquad \langle q' \mid p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[ip'q'/\hbar\right] \tag{П2.22}$$

и является собственной функцией оператора координаты в импульсном представлении и оператора импульса в координатном представлении соответственно, то уравнение (П2.21) принимает вид

$$\psi(q', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{ip'^2 t}{2m\hbar}\right\} \exp\left\{\frac{ip'q'}{\hbar}\right\} \varphi(p', 0)\, dp'. \tag{П2.23}$$

Таким образом, уравнение (П2.23) дает выражение для волновой функции $\psi(q', t)$ в координатном представлении через начальную волновую функцию $\varphi(p', 0)$ в импульсном представлении.

Предположим, что в (П2.23) начальная волновая функция $\varphi(p', 0)$ с минимальной неопределенностью имеет вид (П2.11); для упрощения выкладок примем $\langle p(0) \rangle = \langle q(0) \rangle = 0$. В состоянии с минимальной неопределенностью выполняется соотношение $\sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle_{t=0}} = \hbar/2 \cdot \sqrt{\langle (\Delta q)^2 \rangle_{t=0}}$. В рамках принятых обозначений из (П2.23) имеем

$$\psi(q', t) = \exp\left[-\frac{q'^2}{4\langle (\Delta q)^2 \rangle + 2i\hbar t/m}\right] \Big/ (2\pi)^{1/4} \left(\sqrt{\langle (\Delta q)^2 \rangle} + \frac{i\hbar t}{2m} \sqrt{\langle (\Delta q)^2 \rangle}\right)^{1/2}. \tag{П2.24}$$

В (П2.24) обозначено

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle = |\langle \psi(0) \mid q^2 \mid \psi(0) \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q'^2 \mid \psi\langle q', 0) \mid^2 dq'.$$

Из (П2.24) следует

$$\langle q \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q', t)|^2 q'\, dq' = 0. \tag{П2.25}$$

Таким образом, частица в среднем все время остается в точке $q' = 0$. Среднеквадратичное отклонение

$$\langle q^2 \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q', t)|^2 q'^2\, dq' = \langle (\Delta q)^2 \rangle_{t=0} + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \langle (\Delta q)^2 \rangle_{t=0}}. \tag{П2.26}$$

Из (П2.26) следует, что волновой пакет с течением времени расплывается в координатном пространстве. Из (П2.26) следует также, что чем меньше $\sqrt{\langle (\Delta q)^2 \rangle}$ в начальный момент $t = 0$, тем быстрее происходит расплывание такого волнового пакета с возрастанием времени.

Среднее значение импульса такой частицы в любой момент времени t равно нулю:

$$\langle p \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q', t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(q', t)}{\partial q'} dq' = 0, \tag{П2.27}$$

а среднеквадратичное отклонение импульса от $p'=0$ в момент времени t равно

$$\langle p^2\rangle_t = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q', t)\, \frac{\partial^2}{\partial q'^2}\, \psi(q', t)\, dq' = \frac{\hbar^2}{4\langle (\Delta q)^2\rangle_{t=0}} = \langle p^2\rangle_{t=0}. \tag{П2.28}$$

При выводе (П2.27), (П2.28) использовалось соотношение

$$\langle F(p, q)\rangle = (\psi(t) \mid F(p, q) \mid \psi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(q', t)\, F\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q'},\ q'\right) \times \psi(q', t)\, dq' \tag{П2.29}$$

и уравнение (П2.24).

Тогда произведение неопределенностей в момент времени t равно

$$\langle (\Delta p)_t^2\rangle \langle (\Delta q)_t^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4} + \left[\frac{\hbar^2}{4\langle (\Delta q)_{t=0}\rangle}\right]^2 t^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4}. \tag{П2.30}$$

Из (П2.30) следует, что произведение неопределенностей, которое было минимальным в начальный момент, с течением времени увеличивается.

Пример 3. Рассмотрим классический гармонический осциллятор, описываемый координатой q и импульсом p; функция гамильтона

$$H = {}^1/_2 (p^2 + \omega^2 q^2). \tag{П2.31}$$

Классические уравнения движения в гамильтоновой форме имеют вид

$$dq/dt = \partial H/\partial p = p; \qquad \partial p/\partial t = -\partial H/\partial q = -\omega^2 q. \tag{П2.32}$$

Если ввести обозначения

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip); \qquad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip), \tag{П2.33}$$

то уравнения (П2.32) примут еще более простой вид

$$da/dt = -i\omega a; \qquad da^*/dt = i\omega a^*. \tag{П2.34}$$

Соотношения (П2.33) разрешаются относительно p и q в виде

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a^* + a); \qquad p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a^* - a). \tag{П2.35}$$

По аналогии с классическим случаем для квантовой системы вводятся два неэрмитовых оператора $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ соотношениями

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}); \qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}); \tag{П2.36}$$

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a}); \qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a}). \tag{П2.37}$$

Оператор $\hat{a}$ называется *оператором уничтожения*, а оператор $\hat{a}^+$ — *оператором рождения*.

Для квантовой системы

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar; \tag{П2.38}$$

$$\hat{H} = {}^1/_2 (\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) = \hat{H}^+. \tag{П2.39}$$

Согласно изложенному определения векторов состояния системы в представлении Шредингера и Гейзенберга связаны соотношением

$$|\psi_{\text{Ш}}(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi_{\text{Г}}(t_0)\rangle. \tag{П2.40}$$

При $t=t_0$ имеем $U(t_0, t_0)=1$, т. е. в этом случае векторы состояний в обоих представлениях совпадают друг с другом.

Согласно (П2.16), (П2.17) имеем для (П2.40)

$$|\psi_{\text{Ш}}(t)\rangle = U(t, 0)\,|\psi_{\text{Г}}(0)\rangle = \exp\left\{-\frac{iHt}{\hbar}\right\}|\psi_{\text{Г}}(0)\rangle. \tag{П2.41}$$

Операторы $[a, a^+]=1$ и

$$q_{\text{Г}}(t) = U^+(t, 0)\,q_{\text{Ш}}U(t, 0), \qquad p_{\text{Г}}(t) = U^+(t, 0)\,p_{\text{Ш}}U(t, 0). \tag{П2.42}$$

Если подставить (П2.37) в (П2.39), получим

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{П2.43}$$

В классическом осцилляторе (П2.35), (П2.36) имеем

$$H = \omega a^* a. \tag{П2.44}$$

Таким образом, уравнение (П2.43) отличается от (П2.44), так как операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ здесь не коммутируют; величина $\hbar\omega/2$ называется *нулевой энергией осциллятора.*

Для операторов $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ выполняются дополнительные правила коммутации

$$[\hat{a}, \hat{a}^+\hat{a}] = \hat{a}, \qquad [\hat{a}^+, \hat{a}^+\hat{a}] = -\hat{a}^+. \tag{П2.45}$$

Уравнения в форме Гейзенберга применимы как к эрмитовым, так и к неэрмитовым операторам. Поэтому уравнения для $\hat{a}_{\text{Г}}(t)$ и $\hat{a}^+_{\text{Г}}(t)$ принимают вид

$$\frac{d\hat{a}_{\text{Г}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{\text{Г}}, \hat{H}_{\text{Г}}] = -i\omega\hat{a}_{\text{Г}}; \qquad \frac{d\hat{a}^+_{\text{Г}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}^+_{\text{Г}}, \hat{H}_{\text{Г}}] = i\omega\hat{a}^+_{\text{Г}}. \tag{П2.46}$$

Решение уравнений (П2.46) имеет вид

$$\hat{a}_{\text{Г}}(t) = U^+(t, 0)\,\hat{a}_{\text{Ш}}U(t, 0) = \hat{a}_{\text{Ш}}e^{-i\omega t}; \tag{П2.47}$$

$$\hat{a}^+_{\text{Г}}(t) = U^+(t, 0)\,\hat{a}^+_{\text{Ш}}U(t, 0) = \hat{a}^+_{\text{Ш}}e^{i\omega t}.$$

При этом

$$U(t, 0) = e^{-i\omega t\,\hat{a}^+_{\text{Ш}}\hat{a}_{\text{Ш}}}e^{-i\omega t/2}. \tag{П2.48}$$

Здесь $\hat{a}_{\text{Ш}}$ и $\hat{a}^+_{\text{Ш}}$ — операторы уничтожения и рождения в представлении Шредингера.

Оператор $\hat{a}^+\hat{a}=N=N^+$ называется *оператором числа частиц.* Тогда соотношения (П2.45) примут вид

$$N\hat{a} = \hat{a}(N-1); \quad N\hat{a}^+ = \hat{a}^+(N+1), \tag{П2.49}$$

а оператор N и гамильтониан H связаны соотношением

$$N = \frac{1}{\hbar\omega}H - \frac{1}{2}. \tag{П2.50}$$

Приведем сводку важнейших соотношений:

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \\ = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{П2.51}$$

Рассмотрим последнее соотношение в (П2.51). Если n раз применить $\hat{a}^+$ к состоянию $|0\rangle$, то

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{П2.52}$$

Отметим, что выполняются следующие условия ортонормированности:

$$\langle n'|n''\rangle = \delta_{n'n''} \tag{П2.53}$$

и соотношение полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I. \tag{П2.54}$$

Собственные значения энергии равны

$$E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2), \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{П2.55}$$

Из (П2.55) следует, что в квантовой теории значения энергии дискретны. При больших n квантовые эффекты сглаживаются и квантовые соотношения переходят в классические.

Согласно (П2.53), (П2.54), собственные кет-векторы $\{|n\rangle\}$ образуют полную систему. Поэтому произвольный вектор состояния $|\psi\rangle$ в фиксированный момент времени можно разложить

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \tag{П2.56}$$

где коэффициенты разложения c_n являются c-числами. Пусть

$$c_n = \frac{x^n}{\sqrt{n!}}\, e^{-x^2/2}. \tag{П2.57}$$

Согласно (П2.52) имеем

$$|\psi\rangle = e^{-x^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n!}}\Big|n\Big\rangle = e^{-x^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\hat{a}^+)^n}{n!}\Big|0\Big\rangle = e^{-x^2/2}\exp\{x\hat{a}^+\}|0\rangle, \tag{П2.58}$$

где $|0\rangle$ — состояние вакуума.

Вектор состояния (П2.58) представляет собой волновой пакет с минимальной неопределенностью

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \hbar/2. \tag{П2.59}$$

Обозначим $\hat{a}^+\hat{a} = x^2$ и

$$H = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}) = \hbar\omega\,(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2). \tag{П2.60}$$

Решение уравнения Шредингера для (П2.60) имеет вид

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t(\hat{a}^+\hat{a}+1/2)}|\psi(0)\rangle. \tag{П2.61}$$

Пусть $|\psi(0)\rangle$ — волновой пакет с минимальной неопределенностью (П2.58). Тогда из (П2.61) следует

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t \hat{a}^+ \hat{a}} e^{-x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \qquad (П2.62)$$

Так как $\hat{a}^+\hat{a}$ — среднее число квантов в волновом пакете и $f(\hat{a}^+\hat{a})|n\rangle = f(n)|n\rangle$, то из (П2.62) следует

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-x^2/2} \exp(xe^{-i\omega t} a^+)|0\rangle. \qquad (П2.63)$$

Тогда для $|\psi(t)\rangle$ имеют место

$$\langle \hat{q} \rangle = x \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \cos \omega t, \qquad \langle \hat{q}^2 \rangle = \langle \hat{q} \rangle^2 + \frac{\hbar}{2\omega}, \qquad (П2.64)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = x \sqrt{2\hbar\omega} \sin \omega t, \qquad \langle \hat{p}^2 \rangle = \langle \hat{p} \rangle^2 + \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \frac{\hbar}{2}. \qquad (П2.65)$$

Из (П2.64), (П2.65) следует, что если в начальный момент времени волновой пакет для гармонического осциллятора обладал минимальной неопределенностью, то и для всех других моментов времени выполняется (П2.65), т. е. волновой пакет не расплывается в отличие от волнового пакета для свободной частицы (П2.13). Дополнительно отметим, что из (П2.64) следует, что центр волнового пакета совершает простые гармонические колебания как классический осциллятор; квадраты модулей волновых функций в координатном и импульсном представлениях — $|\langle \hat{q} | \psi(t) \rangle|^2$ и $|\langle \hat{p} | \psi(t) \rangle|^2$ — являются также гауссовскими распределениями вероятностей с центрами $\langle \hat{q} \rangle$ и $\langle \hat{p} \rangle$ соответственно.

Приведенные результаты показывают, что последовательность нормированных собственных векторов оператора (П2.39) можно задать в виде

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n \psi_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots,), \qquad (П2.66)$$

где в координатном представлении [377, с. 80]

$$\psi_0 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{\omega q^2}{2}\right\};$$

$$\psi_n(q) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{(2\omega)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \left(\omega q - \frac{d}{dq}\right)^n \exp\left[-\frac{\omega q^2}{2}\right], \qquad (П2.67)$$

или в компактном виде через полиномы n-степени Чебышева—Эрмита $H_n(\sqrt{\omega}q)$

$$\psi_n(q) = H_n(\xi) e^{-\omega\xi^2/2}. \qquad (П2.68)$$

Согласно изложенному функция $|\psi_n(q)|^2$ является плотностью функции рас-

пределения координаты в n-м состоянии осциллятора. Для классического осциллятора (П2.31) — соответствующая функция распределения координаты $F(q)=\delta(q-q(t))$. В [377] показано, что типичным пределом квантового состояния является классическое смешанное состояние, которое суть выпуклая комбинация решения уравнения классического осциллятора (П2.31) в виде $q(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ со случайными фазами φ. Для такого состояния плотность распределения координаты имеет вид [377, 401]

$$F(q)=\theta(A^2-q^2)/\pi\sqrt{A^2-q^2}.$$

Из приведенных результатов следует важное отличие функций $F(q)$ и $|\psi_n(q)|^2$: функция $F(q)=0$ при $|q|>A$, а функция $|\psi_n|^2$ не обращается в нуль. Это означает, что классическая частица всегда находится между точками $(-A, A)$. Область $(-A, A)$ является классически разрешенной. Квантовая частица может быть обнаружена в силу свойств $|\psi_n(q)|^2$ с конечной вероятностью в классически запрещенной области. Эта область для произвольного потенциала $V(q)$ определяется из условия, что полная энергия $E<V(q)$. Этому условию физически соответствуют отрицательные значения классической кинетической энергии.

В более общем случае для осцилляторов, волновая функция которых симметрична относительно попарных перестановок операторов a и a^+, существует правило коммутации

$$a_m a_n^+ - a_n^+ a_m = \delta_{mn} I. \tag{П2.69}$$

Такие частицы называют *бозонами*. Если волновая функция антисимметрична относительно попарных перестановок, то

$$a_m a_n^+ + a_n^+ a_m = \delta_{mn} I. \tag{П2.70}$$

Такие частицы называют *фермионами*. Если $\hat{f}(\hat{p}_k, \hat{q}_k)$ является целой функцией операторов $\hat{p}_k$, $\hat{q}_l$, то имеют место соотношения

$$[\hat{p}_k, \hat{f}] = -i\hbar \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{q}_k}; \qquad [\hat{q}_k, \hat{f}] = i\hbar \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{p}_k}. \tag{П2.71}$$

Допустим, что $\hat{H}(\hat{a}_k, \hat{a}^+{}_k)$ есть целая функция операторов $\hat{a}_k$, $\hat{a}^+{}_k$. Тогда из (П2.36) и (П2.71) следует

$$[\hat{a}_k, \hat{H}] = \partial \hat{H}/\partial \hat{a}_k^+. \tag{П2.72}$$

Таким образом, уравнения Гейзенберга для операторов уничтожения и рождения для бозонов (П2.69) можно записать в виде [87]

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_k}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{a}_k^+}. \tag{П2.73}$$

Введенные соотношения позволяют в ряде случаев ввести феноменологические модели, в которых релаксация может быть учтена с помощью дополнительного диссипативного члена $\eta_k \hat{a}_k$. В этом случае [87, 411] имеем из (П2.73) следующее уравнение:

$$\frac{d\hat{a}_k}{dt} + \eta_k \hat{a}_k = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{a}_k^+}. \tag{П2.74}$$

Термодинамический анализ классических систем приведен в [39]; термодинамический анализ квантовых систем с учетом диссипации рассмотрен в [397].

Пример 4. Рассмотрим в качестве динамической системы LC-контур в отсутствие потерь с последовательно включенным генератором напряжения $e(t)$ вида

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} e(t), \tag{П2.75}$$

где q — заряд; $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ — резонансная частота контура. Ток $p(t)$ в контуре равен $dq/dt = p(t)$. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0 q^2) - \frac{1}{L} e(t)\, q. \tag{П2.76}$$

В квантовой системе для рассматриваемого случая $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ и

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar e(t)}{L\sqrt{2\hbar\omega_0}} (\hat{a}^+ + \hat{a}). \tag{П2.77}$$

Состояние контура в момент времени t и его состояние в момент $t_0 = 0$ связаны соотношением

$$|\psi(t)\rangle = e^{A(t)} e^{-i\omega_0(\hat{a}^+\hat{a})t} e^{C(t)\hat{a}^+} e^{B(t)\hat{a}} |\psi(0)\rangle, \tag{П2.78}$$

где

$$A(t) = -\int_0^t dt' C^*(t') \int_0^t dt'' C(t''),$$

$$B(t) = -C^*(t), \quad C(t) = i(L\sqrt{2\hbar\omega_0})^{-1} \int_0^t e(t')\, e^{i\omega_0 t'}\, dt'. \tag{П2.79}$$

Если исходным состоянием контура является состояние вакуума $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, $\hat{a}|0\rangle = 0$, то имеем из (П2.78)

$$|\psi(t)\rangle = e^{A(t)} \exp\left[C(t)\, e^{-i\omega_0 t}\hat{a}^+\right] |0\rangle. \tag{П2.80}$$

Так как соотношение (П2.58) описывает волновой пакет с минимальной неопределенностью, то можно показать [408], что (П2.80) обладает таким же свойством:

$$\langle\hat{a}\rangle = \langle\psi(t)|\hat{a}|\psi(t)\rangle = z^*; \quad \langle\hat{a}^2\rangle = z^{*2}; \quad \langle\hat{a}^+\rangle = z; \quad \langle\hat{a}^{+2}\rangle = z^2;$$
$$\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle = |z|^2 = |C(t)|^2; \quad \langle\hat{a}\hat{a}^+\rangle = 1 + |z|^2; \tag{П2.81}$$
$$\langle\hat{p}\rangle = i\sqrt{\hbar\omega_0/2}\,(z - z^*); \quad \langle\hat{q}\rangle = \sqrt{\hbar/2\omega_0}\,(z + z^*);$$
$$\langle\hat{p}^2\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2}(2|z|^2 + 1 - z^2 - z^{*2}), \quad \langle\hat{q}^2\rangle = \frac{\hbar}{2\omega_0}(2|z|^2 + 1 + z^2 + z^{*2});$$
$$(\Delta\hat{p})^2 = \hbar\omega_0/2; \quad (\Delta\hat{q})^2 = \hbar/2\omega_0. \tag{П2.82}$$

Тогда $\Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \hbar/2$.

Уравнение (П2.82) представляет собой волновой пакет в переменных «заряд — ток» с минимальной неопределенностью; при этом соотношение (П2.82) выполняется в любой момент времени независимо от действующей на квантовый контур вынужденной силы $f(t) = -e(t)/L\sqrt{2\hbar\omega_0}$, т. е. состояние квантовой

системы инвариантно к внешнему возмущению. Отмеченный факт выполняется, когда напряжение генератора возбуждает контур, находящийся в вакуумном состоянии. Именно в этом случае состояние с минимальной неопределенностью возникает независимо от формы действующего внешнего возмущения $e(t)$.

Рассмотрим в связи с отмеченным свойства предполагаемого состояния вакуума. До включения генератора напряжения

$$\hat{H} = 1/2 \cdot (\hat{p}^2 + \omega_0^2 \hat{q}^2) = \hbar\,\omega_0 (\hat{a}^+ \hat{a} + 1/2). \qquad \text{(П2.83)}$$

Если $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, то из (П2.81) следует

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle 0 | \hat{q} | 0 \rangle = 0; \quad \langle \hat{p} \rangle = \langle 0 | \hat{p} | 0 \rangle = 0;$$
$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \hbar/2\omega_0; \quad \langle \hat{p}^2 \rangle = \hbar\omega_0/2; \quad \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = 0, \qquad \text{(П2.84)}$$
$$\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega_0/2; \quad (\Delta\hat{q})^2 = \hbar/2\omega_0; \quad (\Delta\hat{p})^2 = \hbar\omega_0/2 \text{ и } \quad \Delta\hat{p}\Delta\hat{q} = \hbar/2.$$

Из (П2.84) следует, что в состоянии вакуума средние заряда и тока равны нулю, а средние квадраты отличны от нуля. Так как соотношение $(\Delta\hat{q}\Delta\hat{p}) = \hbar/2$ есть прямое следствие коммутационного соотношения $[\hat{q}, \hat{p}] = \hbar/2$, то нулевые флуктуации величин $\hat{q}$ и $\hat{p}$ возникают как следствие квантования контура. В данном случае имеем непосредственный квантовый аналог условия инвариантности, полученного Б. Н. Петровым для классических динамических систем.

Пример 5. Рассмотрим кратко одну из моделей открытых квантовых систем [413]. Предположим, что при взаимодействии квантовой системы с окружающей средой средние значения импульса и координаты изменяются линейно, и будем искать нижние оценки для соответствующих дисперсий.

Обозначим через $\mathscr{L}_1$ гильбертово пространство состояний $|l\rangle \in \mathscr{L}_1$, заданной квантовой системы. Как и ранее, канонические координаты $\hat{q}$ и импульсы $\hat{p}$ удовлетворяют правилам коммутации $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar I$. Состояния $|\lambda\rangle$ в пространстве $\mathscr{L}_2$ внешней системы играют роль окружающей среды по отношению к введенной квантовой системе.

В пространствах $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ вводятся полные ортонормированные базисы $\{|n\rangle\} \in \mathscr{L}_1$ и $\{|\mu\rangle\} \in \mathscr{L}_2$. В расширенном пространстве $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$ операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ изображаются блочно-диагональными матрицами

$$\langle n\mu | \hat{q} | m\nu \rangle = \langle n | \hat{q} | m \rangle \delta_{\mu\nu}; \qquad \langle n\mu | \hat{p} | m\nu \rangle = \langle n | \hat{p} | m \rangle \delta_{\mu\nu}. \qquad \text{(П2.85)}$$

Предполагается, что исходные состояния рассматриваемых систем независимы. Это означает, что $|l\psi\rangle = |l\rangle\,|\psi\rangle$. В результате взаимодействия квантовой системы с окружающей средой получаем унитарное преобразование $|l'\psi'\rangle = U|l\psi\rangle$, которое в общем случае нарушает независимость исходных состояний, т. е. $|l'\psi'\rangle \neq |l\psi\rangle$. Это в свою очередь приводит к изменению средних значений $\langle l | \hat{q} | l \rangle \to \langle l'\psi' | \hat{q} | l'\psi' \rangle$; $\langle l | \hat{p} | l \rangle \to \langle l'\psi' | \hat{p} | l'\psi' \rangle$.

В силу принятого предположения о линейном характере подобных изменений можно написать

$$\langle l'\psi' | \hat{q} | l'\psi' \rangle = \langle l\psi | \hat{U}^+ \hat{q} \hat{U} | l\psi \rangle = g_1 \langle l | \hat{q} | l \rangle;$$
$$\langle l'\psi' | \hat{p} | l'\psi' \rangle = \langle l\psi | \hat{U}^+ \hat{p} \hat{U} | l\psi \rangle = g_2 \langle l | \hat{p} | l \rangle. \qquad \text{(П2.86)}$$

в (П2.86) g_i — коэффициенты пропорциональности для любого $|l\rangle \in \mathscr{L}_1$.

Операторы $\hat{P}=\hat{U}^+\hat{p}\hat{U}$, $\hat{Q}=\hat{U}^+\hat{q}\hat{U}$ в (П2.86) означают эволюцию $\hat{q}$ и $\hat{p}$ под влиянием взаимодействия в картине Гейзенберга, и в $\mathscr{L}$ по-прежнему выполняются соотношения $[\hat{P}, \hat{Q}]=i\hbar I$. Если представить операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ в виде

$$\hat{Q} = g_1\hat{q} + C_1; \qquad \hat{P} = g_2\hat{p} + C_2, \tag{П2.87}$$

то коммутатор

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = g_1g_2\ [\hat{q}, \hat{p}] + g_1[\hat{q}, C_2] + g_2[C_1, \hat{p}] + [C_1, C_2]. \tag{П2.88}$$

В силу эрмитового характера C_i имеем $\langle l\psi | C_i | l\psi\rangle = 0$ и $\langle n\psi | C_i | m\psi\rangle = 0$. Тогда $\langle l\psi | [\hat{q}, C_2] | l\psi\rangle = \langle l\psi | [C_1, \hat{p}] | l\psi\rangle = 0$ и $\langle l\psi | \hat{q}C_1 | l\psi\rangle = 0$.

В результате имеем

$$\langle [C_1, C_2]\rangle = \langle l\psi | [C_1, C_2] | l\psi\rangle = i\hbar(1 - g_1g_2). \tag{П2.89}$$

Аналогично

$$\langle C_1^2\rangle\ \langle C_2^2\rangle \geqslant \frac{\hbar^2}{4}(1 - g_1g_2)^2. \tag{П2.90}$$

Обозначим дисперсии канонических переменных системы после взаимодействия с окружающей средой через

$$\tilde{\sigma}_q^2 = g_1^2\sigma_q^2 + \langle C_1^2\rangle, \quad \tilde{\sigma}_p^2 = g_2^2\sigma_p^2 + \langle C_2^2\rangle, \tag{П2.91}$$

σ^2 — исходные дисперсии.

Рассмотрим минимизацию произведения $\tilde{\sigma}_p{}^2\tilde{\sigma}_q{}^2$ при фиксированном значении $\langle C_1{}^2\rangle\langle C_2{}^2\rangle$ по (П2.90). В результате имеем

$$\langle C_1^2\rangle_{\min} = \frac{\hbar}{2}\frac{g_1\sigma_q}{g_2\sigma_p}|1 - g_1g_2| \tag{П2.92}$$

и из (П2.91), (П2.92) следует [413]

$$\tilde{\sigma}_q\tilde{\sigma}_p \geqslant g_1g_2\sigma_p\sigma_q + \frac{\hbar}{2}|1 - g_1g_2|. \tag{П2.93}$$

Соотношение (П2.93) является обобщенным соотношением неопределенностей для открытой системы. Из (П2.93) следует, что при $g_1=g_2=g>1$ дисперсии возрастают, т. е.

$$\hat{\sigma}_q\hat{\sigma}_p \geqslant g^2\left(\sigma_p\sigma_q + \frac{\hbar}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}. \tag{П2.94}$$

Для случая, рассмотренного ранее, когда исходные дисперсии минимизируют произведение $\sigma_q\sigma_p=\hbar/2$ при $g<1$ (уменьшение средних значений) имеем соотношение неопределенностей Гейзенберга $\tilde{\sigma}_q\tilde{\sigma}_p \geqslant \hbar/2$. Если $g_1g_2=1$, $g_1\neq g_2$, то имеем чистый случай воздействия на осциллятор. В этом случае, как известно из предыдущего примера, произведение квантовых неопределенностей не возрастает. Из (П2.93) следует этот же результат при унитарном преобразовании $\hat{U}=\exp\{g_1(\hat{a}^+\hat{a}^+ - \hat{a}\hat{a})/2\}$ с операторами рождения и уничтожения. В результа-

те имеем параметрическое усиление колебаний осциллятора, не сопровождающееся квантовой необратимостью [408].

Пример 6. Рассмотрим, следуя [414, 415], динамическую систему из примера 2, описываемую уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} \tag{П2.95}$$

при условии

$$\psi(q, 0) = \mathrm{Ai}\,(Bq/\hbar^{2/3}), \tag{П2.96}$$

где B — постоянная, а Ai — функция Эйри [416, 417].

Решение (П2.95) с условием (П2.96) имеет вид [414]

$$\psi(q, t) = \mathrm{Ai}\left[\frac{B}{\hbar^{2/3}}\left(q - \frac{B^3 t^2}{4m^2}\right)\right] \exp\left\{\frac{iB^3 t}{2m\hbar}\left(q - \frac{B^3 t^2}{6m^2}\right)\right\}. \tag{П2.97}$$

В интегральном представлении функции Эйри [417] решение (П2.97) можно представить [414] в виде

$$\psi(q, t) = \frac{\hbar^{2/3}}{2\pi B}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(kq - \frac{\hbar k^2 t}{2m} + \frac{\hbar^2 k^3}{3B^3}\right)\right\} dk. \tag{П2.98}$$

Из (П2.97) следует, что $|\psi|^2$ в отличие от рассмотренного в примере 2 случая не расплывается, но равноускоренно движется в виде нерасплывающегося волнового пакета со скоростью $B^3t^2/2m^2$.

Такое на первый взгляд парадоксальное решение имеет глубокую связь с принципами симметрии волновых уравнений. В [415] эта связь была установлена следующим образом.

Уравнение Шредингера ($m=1$, $\hbar=1$)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{П2.99}$$

соответствует 7-мерная фактор-алгебра Ли с базисом из операторов ($u=\mathrm{Re}\psi$, $v=\mathrm{Im}\psi$):

$$Z_1 = \frac{d}{dx}; \quad Z_2 = \frac{d}{dt}; \quad Z_3 = x\frac{d}{dx} + 2t\frac{\partial}{dt};$$

$$Z_4 = 2t\frac{d}{dx} + xv\frac{d}{du} - xu\frac{d}{dv}; \quad Z_6 = u\frac{d}{du} + v\frac{d}{dv};$$

$$Z_7 = v\frac{d}{du} - u\frac{d}{dv}; \quad Z_5 = 4t^2\frac{d}{dt} + 4tx\frac{d}{dx} - (2tu - x^2 v)\frac{d}{du} -$$

$$- (x^2 u + 2tv)\frac{d}{dv}. \tag{П2.100}$$

Операторы (П2.100) получены факторизацией по идеалу, который образуется преобразованиями, переводящими любое решение уравнения (П2.99) ψ_1 в решение $\psi_1 + A\psi_2$. При этом ψ_2 есть любое решение (П2.99), A — произвольная постоянная.

В (П2.100) операторы Z_i порождают следующие конечные преобразования [415, с. 1549]: Z_1 и Z_2 — сдвиги по пространственной переменной и времени;

Z_3 — преобразование подобия в двумерном евклидовом пространстве-времени $x'=kx$, $t'=k^2t$, $\psi'=\psi$; Z_4 — галилеев перенос (при надлежащем преобразовании ψ) $x'=x+2vt$, $t'=t$, $\psi'=\psi\exp\{-i(xa+ta^2)\}$; Z_5 — преобразование инверсии $t'=t(1-4bt)^{-1}$, $x'=x(1-4bt)^{-1}$, $\psi'=\psi\sqrt{1-4bt}\exp\cdot\{-ix^2b/(1-4bt)\}$; Z_6 — преобразование подобия в пространстве решений $\psi'=k\psi$; Z_7—гиперболический поворот в пространстве $(\mathrm{Re}\psi, \mathrm{Im}\psi)$: $\psi'=e^{-i\alpha}\psi$.

Для сравнения приведем базис соответствующей алгебры Ли для простейшего уравнения $\ddot{x}=0$:

$$X_1=\frac{d}{dx};\quad Y_1=\frac{d}{dt};\quad X_2=x\frac{d}{dx};\quad Y_2=t\frac{d}{dt};\quad X_3=t\frac{d}{dx};$$

$$Y_3=x\frac{d}{dt};\quad X_4=x^2\frac{d}{dx}+tx\frac{d}{dt};\quad Y_4=tx\frac{d}{dx}+t^2\frac{d}{dt}. \qquad (\text{П2.101})$$

Здесь конечные преобразования X_i имеют следующие значения: X_1 — сдвиг по $x(x'=x+\alpha)$; X_2 — преобразование подобия $x'=kx$; X_3 — галилеев перенос $t'=t$, $x'=x+vt$; X_4 — преобразование инверсии $x'=x(1-\beta t)^{-1}$; $t'=t(1-\beta t)^{-1}$. Преобразования Y_i получаются из преобразований, порождаемых операторами X_i при замене $t\to x$. Нетрудно заметить, что порождаемые алгебрами группы и сами алгебры Ли (П2.100) и (П2.101) не совпадают.

Рассмотрим из (П2.100) комбинацию операторов Z_2 и Z_4 в виде

$$Z_2+bZ_4. \qquad (\text{П2.102})$$

Оператору (П2.102) соответствует [415] сопряженная система [418]

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{2bt}=-\frac{d\psi}{ibx\psi}. \qquad (\text{П2.103})$$

Первый интеграл первого равенства (П2.103) имеет вид $I_1=x-bt^2$. Второй интеграл $I_2=\psi\exp\{ibt(x-\frac{2}{3}bt^2)\}$. Следовательно, (Z_2+bZ_4)-инвариантное решение уравнения (П2.99) имеет вид

$$\psi=\exp\left\{-ibt\left(x-\frac{2}{3}bt^2\right)\right\}\Phi(x-bt^2). \qquad (\text{П2.104})$$

В (П2.104) $\Phi(\cdot)$ — пока неизвестная функция. Из (П2.99), (П2.104) следует уравнение для функции Φ вида

$$\ddot{\Phi}-b\xi\Phi=0;\qquad \xi=x-bt^2. \qquad (\text{П2.105})$$

Уравнение (П2.105) называется уравнением Эйри [417, 56]. Нетрудно заметить, что из (П2.104), (П2.105) следует (П2.97).

Приведем еще два примера подобных решений [415].

В двумерном пространстве x, y базис алгебры Ли (П2.100) пополнится операторами

$$\frac{d}{dy},\ y\frac{d}{dy}-x\frac{d}{dy};\qquad 2t\frac{d}{dy}+yv\frac{d}{du}-yu\frac{d}{dv}; \qquad (\text{П2.106})$$

оператор Z_5 перейдет в оператор вида

$$4t^2\frac{d}{dt}+4tx\frac{d}{dx}+4ty\frac{d}{dy}-[4tu-(x^2+y^2)v]\frac{d}{du}-[(x^2+y^2)u+4tv]\frac{d}{dv}.$$

Оператор $x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+2t\frac{d}{dt}$ порождает преобразование подобия; оператор $y\frac{d}{dx}-x\frac{d}{dy}$ порождает поворот; их комбинация порождает движение по спирали.

Их совместный инвариант имеет вид $\xi=(x^2+y^2)/t$. Если искать решение уравнения Шредингера в виде

$$\psi=\Phi(\xi), \tag{П2.107}$$

то для (П2.107) имеем уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}4\xi+(4+i\xi)\frac{d\Phi}{d\xi}=0. \tag{П2.108}$$

Следовательно,

$$\psi=\int_{-\infty}^{\xi}\frac{\exp\left(-\frac{1}{4}i\eta\right)d\eta}{\xi}. \tag{П2.109}$$

Решение (П2.109) имеет вид так называемой SiCi-спирали ($\mathrm{Re}\psi$ — интегральный синус, $\mathrm{Im}\psi$ — интегральный косинус).

Если сделать замену $x=(\rho_1-\rho)/\rho^{1/2}$ в радиальном уравнении с потенциалом отталкивания [56]

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}+\left[1-\frac{2\eta}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]u=0, \tag{П2.110}$$

то (П2.110) примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\left[\frac{\nu x}{\nu-x}-\frac{l(l+1)}{\nu(\nu-x)^2}\right]u=0, \tag{П2.111}$$

где $\rho=\sqrt{\varepsilon}r/a$, $\varepsilon=E/E_1$, $\eta=Z/\sqrt{\varepsilon}$, $\nu=\rho_1^{2/3}$, $a=\hbar^2/me^2=0{,}529\cdot10^{-8}$ см, $E=me^4/2\hbar^2=13{,}55$ МэВ; ρ_1—наибольший корень уравнения $\rho^2-2\eta\rho-l(l+1)=0$ и имеет вид $\rho=\eta\pm(\eta^2+l(l+1))^{1/2}$, $u(r)=rR(r)$.

При $\nu\to\infty$ уравнение (П2.111) переходит в уравнение типа (П2.105) $\ddot{u}(x)-xu(x)=0$, решением которого являются функции Эйри

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{x^{1/2}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)-I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right],\ \text{если } x>0;$$
$$\mathrm{Bi}(x)=\frac{Z^{1/2}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}Z^{3/2}\right)+I_{1/3}\left(\frac{2}{3}Z^{3/2}\right)\right],\ \text{если } x<0. \tag{П2.112}$$

Функции Эйри (П2.112) имеют при $x>0$ профиль затухающей экспоненты и при $x<0$ вид синуса. Таким решениям соответствует движение частицы из бесконечности к центру сил и обратно в бесконечность; точке поворота соответствует максимум функции, а решением для $R(r)$ является стоячая сферическая волна.

Таким образом, в потенциале отталкивания образуются стоячие волны, ко-

торые формируют так называемую сферическую оболочку вокруг центра с радиусом, превышающим в $2Z$ раз орбиту Бора для атома водорода [415, с. 1551].

Приведенные примеры позволяют максимально близко подойти к изложению еще одного квантового объекта — когерентных состояний, нашедших широкое применение в квантовой теории. Эти состояния обнаружены как в нерелятивистских, так и в релятивистских динамических системах. Поэтому предварительно рассмотрим традиционные модели релятивистской квантовой теории.

П2.3. Волновые уравнения релятивистской квантовой теории для частиц со спином $s=0$ и $s=1/2$. В данном разделе кратко рассмотрим две традиционные модели релятивистской квантовой теории: 1) уравнение ФКГ для частицы со спином $s=0$; 2) уравнение Дирака для частицы со спином $s=1/2$.

П2.3.1. Спин частицы и квантовая статистика. Предварительно дадим основные определения.

Спин частицы. Каждый электрон в атоме согласно гипотезе Уленбека и Гаудсмита обладает механическим моментом $h/2\pi=\hbar$, с которым связан магнитный момент, по величине равный $eh/4\pi mc=e\hbar/2mc$.

Отметим, что отношение магнитного момента к механическому моменту, равное $e/2mc$, называется гиромагнитным отношением.

Собственные магнитные моменты электронов, взаимодействуя с магнитным полем, созданным движением электронов в атоме, приводят к смещению и расщеплению энергетических уровней системы электронов в атоме, что позволяет объяснить в конечном счете наблюдаемые спектры многоэлектронных химических элементов.

Гипотеза Уленбека и Гаудсмита была подтверждена в опытах К. Штерна и И. Герлаха. Эти авторы рассматривали движение атомов серебра в сильном неоднородном магнитном поле; при этом пучок атомов серебра разделялся на два пучка. Движение каждого из этих пучков можно было объяснить, предположив, что валентные электроны в одном пучке имеют магнитный момент $e\hbar/2mc$, ось которого совпадает с направлением силовых линий магнитного поля, а в другом пучке валентные электроны обладали таким же магнитным моментом, но ось которого была направлена прямо в противоположном направлении. Таким образом, опыты К. Штерна и И. Герлаха не только впервые подтвердили существование спина у электрона, но и дали возможность непосредственно измерить его величину.

Любопытно отметить историю становления этого понятия. В [44] Дирак отметил следующее: «Когда Шредингер получил это уравнение (речь идет об уравнении Фока — Клейна — Гордона (ФКГ) — примеч. авт.) первое, что он сделал, конечно, было применение его к задаче об электроне в атоме водорода. Он вычислил уровни энергии водорода и получил неверный результат. Причина, из-за которой он пришел к неверному результату, заключалась в том, что его уравнение не учитывало спина электрона.

Но в то время о спине электрона и понятия не было. Некоторые физики думали об этом. В частности Крониг думал об этом и сообщил о своей идее Паули. Крониг работал тогда в «школе» Паули. Паули сказал: «О, нет, спин электрона абсолютно невозможен». Паули часто вначале неверно оценивал новую идею. И вот, бедный Крониг был полностью подавлен авторитетным мнением Паули.

Независимо идея о спине электрона пришла к Гаудсмиту и Уленбеку, работавшим тогда в Лейдене. Они написали об этом небольшую статью и показали

ее своему профессору — Эренфесту. Эренфесту идея очень понравилась. Он воспринял ее очень горячо, посоветовал Гаудсмиту и Уленбеку поехать к Лоренцу в Харлем, чтобы обсудить ее с ним. Так они поехали в Харлем и поговорили с Лоренцем, и Лоренц сказал: «Нет, это невозможно. Я сам работал над идеей о том, что у электрона есть спин, и я обнаружил, что при этом поверхность электрона должна была бы двигаться со скоростью больше скорости света, а потому и вся идея абсолютно невозможна». Лоренц ошибся. Он чересчур серьезно относился к классической модели электрона.

Гаудсмит и Уленбек были абсолютно обескуражены критикой Лоренца. Они вернулись к Эренфесту и попросили его не публиковать их статьи. Эренфест ответил: уже слишком поздно, я уже отправил ее в журнал. Таким образом, идея о спине электрона оказалась опубликованной. Итак, энтузиазму Эренфеста и его напористости мы в действительности обязаны тем, что статья увидела свет.

Шредингер ничего не знал об этом. Он обнаружил, что его волновое уравнение приводило к результатам, не согласующимся с опытом, и был очень разочарован этим. На некоторое время он даже оставил работу.

Однако несколькими месяцами позже он вновь вернулся к ней и тут заметил, что если бы он поубавил свои претензии и просто записал свое уравнение в нерелятивистской форме, то, применив его к конкретным задачам, он пришел бы к результатам, совпадающим с наблюдаемыми всюду, кроме тонкой структуры водородного спектра, которая зависит от релятивистских поправок».

Для того чтобы объяснить результаты экспериментов К. Штерна и И. Герлаха, необходимо принять, что электрон обладает собственным механическим моментом с квантовым числом $l=1/2$ и, соответственно, $m=+1/2$ и $m=-1/2$. В связи с этим, согласно Паули, можем ввести спиновые операторы S_x, S_y, S_z и S^2, совершенно аналогичные введенным ранее операторам момента импульса M_x, M_y, M_z и M^2. Спиновые операторы должны удовлетворять тем же соотношениям, что и операторы момента импульса (см. работу Я. И. Френкеля [106]).

Таким образом, в соответствии с полученными ранее результатами [377] получим, что для S^2 существует только одно собственное значение $1/2(1+1/2)\hbar^2$, а для S_z имеются только два собственных значения $\frac{\hbar}{2}$ и $-\frac{\hbar}{2}$ соответственно. Для общей спиновой функции используют квантовое число S и для собственных значений S_z имеем $S\hbar$, так что для электрона S имеет значения $\pm 1/2$.

Если обозначить через α спиновые собственные функции, соответствующие $S=+1/2$ и $S=-1/2$, то можем написать для спиновых собственных функций следующие уравнения:

$$S^2\alpha = \frac{3}{3}\hbar^2\alpha; \qquad S^2\beta = \frac{3}{4}\hbar^2\beta;$$

$$S_z\alpha = \frac{1}{2}\hbar\alpha; \qquad S_z\beta = -\frac{1}{2}\hbar\beta. \tag{П2.113}$$

Спином, равным 1/2, помимо электрона обладают протоны и нейтроны. Все эти частицы могут, таким образом, иметь в магнитном поле только два положения вектора спина: вдоль и напротив направления силовых линий этого поля.

Частицы со спином 1 могут занимать три положения в магнитном поле (для этих частиц вектор спина имеет направление вдоль силовых линий этого

поля, против и перпендикулярно силовым линиям магнитного поля). Спином 1 обладают фотон, ядра атома дейтерия, азота и др.

Необходимо теперь обратить внимание на следующее. Полный момент импульса электрона, движущегося в атоме, должен, очевидно, представлять векторную сумму орбитального момента количества движения электрона и собственного механического момента количества движения электрона (т. е. спина).

То же самое относится к полному магнитному моменту электрона. Необходимо подчеркнуть, что, согласно Гааз [420], «...векторный остов атома должен быть построен так, чтобы результирующий вектор тоже удовлетворял квантовым условиям».

Как уже отмечалось, протоны, нейтроны и электроны обладают спином, равным 1/2, в то время как фотоны имеют спин, равный 1. Сложная частица, образованная из нечетного числа частиц, имеющих полуцелый спин, также будет обладать полуцелым спином.

Если сложная частица образована из четного числа частиц, имеющих полуцелый спин, то она будет обладать целым спином. Если сложная частица образована из произвольного числа частиц, имеющих целый спин, то она будет иметь также целый спин.

Волновая функция Шредингера обладает существенно различными свойствами в зависимости от того, описывает ли она систему частиц, каждая из которых обладает полуцелым спином, или систему частиц, каждая из которых имеет целый спин. Свойства эти следующие [88, 138]: 1) если каждая из двух идентичных частиц, входящих в состав квантовомеханической системы, обладает полуцелым спином (например, если каждая из этих частиц представляет собой молекулу, состоящую из нечетного числа нейтронов, протонов и электронов), то при взаимном обмене в $\psi\ (q, t)$ координат этих двух частиц функция $\psi\ (q, t)$ меняет знак, оставаясь в остальном неизменной; 2) если каждая из двух идентичных частиц, входящих в состав квантовомеханической системы, обладает целым спином (например, если каждая из этих двух частиц представляет, как и выше, молекулу, но состоящую из четного числа нейтронов, протонов и электронов), то при взаимном обмене в $\psi(q, t)$ координат этих двух частиц функция $\psi(q, t)$ остается неизменной не только по величине, но и по знаку.

Заметим, что принцип Паули является частным случаем этих положений (антисимметрия волновой функции для системы электронов).

Квантовая статистика. В отличие от классической статистики Максвелла — Больцмана в квантовой статистике исходят из постулата о неразличимости тождественных частиц [421].

Представим себе систему, состоящую из N неразличимых частиц. Допустим, что эти частицы обладают полуцелым спином (частицы этого типа называются *фермионами*). Волновая функция для этой системы, как показано выше, должна быть антисимметричной. Системы этого типа подчиняются статистике Ферми — Дирака.

В том случае, когда система состоит из n неразличимых частиц, обладающих целом спином (такие частицы называют *бозонами*), волновая функция, как это было показано выше, должна быть симметричной.

Довольно сложные расчеты приводят к следующему распределению в случае статистики Ферми — Дирака:

$$n_k = 1 \Big/ \left(\frac{1}{A} e^{E_k/T} + 1 \right), \qquad (П2.114)$$

аналогично в случае статистики Бозе — Эйнштейна

$$n_k = 1 \Big/ \left(\frac{1}{A} e^{E_k/T} - 1 \right). \qquad (П2.115)$$

Здесь n_k — число частиц, находящихся в k-м энергетическом состоянии E. Заметим, что постоянные A в случае статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака различны; они зависят от общего числа частиц и температуры.

Более подробно вопросы квантовой статистики рассмотрены в [388, 389].

П2.32. Волновое квантовое уравнение ФКГ для частицы со спином $s=0$ во внешнем электромагнитном поле. Обсуждаемое уравнение ФКГ имеет вид [56, 419, 422]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \frac{2ie}{\hbar c}\left(\frac{\varphi^0}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + A\,\mathrm{grad}\,\psi\right) - \frac{1}{\hbar^2}\left[m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}(A^2 - \varphi^{0^2})\right]\psi = 0, \qquad (П2.116)$$

где $A = (A_1, A_2, A_3)$ — векторный потенциал внешнего электромагнитного поля; φ^0 — скалярный потенциал внешнего электромагнитного поля; e — заряд частицы (по поводу обозначений см. гл. 3).

Здесь умышленно приведены традиционные обозначения и форма записи [422]; в гл. 4 при изложении квантового постулата приведены и другие формы записи для (П2.116).

Уравнение (П2.116) было первым релятивистски-инвариантным уравнением в квантовой механике.

По поводу уравнения (П2.116) П. Дирак в [44] отметил: «Согласно Эйнштейну теория должна быть полностью симметрична по отношению ко времени и трем пространственным координатам. Но вы видите, что здесь (в уравнении Шредингера — прим. авт.) нет такой симметрии. В уравнении в форме Гейзенберга стоит $\partial/\partial t$ без соответствующих $\partial/\partial x_1$, $\partial/\partial x_2$, $\partial/\partial x_3$. В уравнении Шредингера опять-таки есть $\partial/\partial t$, но нет соответствующих операторов дифференцирования по пространственным координатам. Таким образом, перед нами встала проблема такой модификации теории, которая бы сделала теорию релятивистской.

Большинство физиков пыталось решить эту проблему путем возвращения к уравнению (П2.116), обобщенному уравнению де Бройля. Это — релятивистское уравнение. Впервые оно было предложено Шредингером, но он не опубликовал его, потому что вытекающие из этого уравнения результаты не согласовывались с данными эксперимента о спектре водорода. Независимо оно было переоткрыто Клейном и Гордоном, они и опубликовали его. Их не смутило расхождение с опытом. Так это уравнение стало известно как уравнение Клейна — Гордона. Конечно, его следовало бы назвать уравнением Шредингера, но у Шредингера не хватило мужества опубликовать его».

П2.3.3. Уравнение Дирака для частицы со спином $s=1/2$ во внешнем электромагнитном поле. В данном разделе, как и в п. П2.3.2, будем использовать не общепринятую форму [44], а эквивалентную форму, которая будет использована при изложении квантового постулата. Эта форма уравнений Дирака имеет вид [69, 68, 423]

$$(P_0 - mc)\psi_1 - (P_1 - iP_2)\psi_0 - P_3\psi_3 = 0;$$
$$(P_0 - mc)\psi_2 - (P_1 + iP_2)\psi_3 + P_3\psi_0 = 0;$$

$$(P_0+mc)\psi_3-(P_1-iP_2)\psi_2-P_3\psi_1=0;$$
$$(P_0+mc)\psi_0-(P_1+iP_2)\psi_1+P_3\psi_2=0,$$

(П2.117)

где

$$P_j=\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-\frac{e}{c}A_j\right);\quad j=1,\ 2,\ 3;\qquad A_0=\frac{\hbar}{ic}\left(\frac{\partial}{\partial t}+e\varphi^0\right).$$

Система уравнений Дирака (П2.117) является релятивистски инвариантной со следующими законами преобразования компонент ψ_k [68], представленных в главе 4. Видно, что преобразования компонент ψ_k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 0$) существенно отличаются от соответствующих формул преобразований для компонент векторных и тензорных объектов [44, 56, 68]. Таким образом, из требований релятивистской инвариантности и едином математическом объекте в смысле Вундгейлера с равноправными компонентами (фундаментальными функциями ψ_k) следует, что имеем дело с новым (по сравнению с векторами и тензорами) математическим объектом, который носит название *спинора* [55, 63, 68, 117], а соответствующее поле (П2.117) называется *спинорным*.

Решение уравнений Дирака и связанные с ним объяснения эффектов тонкой структуры хорошо известны [44, 56, 388, 389, 419, 423, 424 и др.]. Поэтому здесь приведем несколько особенностей уравнений Дирака [7], которые будут использованы при описании квантового постулата. Форма уравнений Дирака, которая следует из (П2.117) после соответствующих преобразований с помощью матриц типа матриц Паули, приведена в п. П2.4.

Общее решение уравнений Дирака для свободных полей. В теории линейных уравнений в частных производных известен следующий метод [425]. Пусть дана однородная система линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными) с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}u_j=0\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{П2.118}$$

где u_j — искомые функции любого числа независимых переменных $x_1,\ \ldots,\ x_m$; e_{ij} — операторы дифференцирования по этим переменным любого порядка и структуры.

Требуется выразить u_j через n функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$, каждая из которых определяется независимо от другой из своего дифференциального уравнения (связь между функциями φ_i сохраняется в граничных условиях).

Полагая в (П2.118) для $i=2,\ 3,\ \ldots,\ n$

$$u_j^{(1)}=k_j^{(1)}\varphi_1\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{П2.119}$$

неизвестные операторы дифференцирования $k_j^{(1)}$ определим как решения линейной системы $(n-1)$ алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}k_j^{(1)}=0\qquad (i=2,3,\ldots,n).\tag{П2.120}$$

Из этой системы определяем

$$k_j^{(1)} = E_{1j} C_1, \tag{П2.121}$$

где E_{ij} $(i=1, 2, ..., n, j=1, 2, ..., n)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента e_{ij} определителя-оператора

$$E = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix}. \tag{П2.122}$$

В формуле (П2.121) через C_1 обозначен оператор, который можно считать 1, что сводится к замене $C_1\varphi_1$ на φ_1, т. е.

$$u_j^{(1)} = E_{1j}\varphi_1. \tag{П2.123}$$

Складывая все $u_j^{(s)}$ $(s=1, 2, ..., n)$, получаем

$$u_j = \sum_{s=1}^{n} E_{sj}\varphi_s = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \dots e_{1(j-1)} & \varphi_1 \dots e_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} \dots e_{n(j-1)} & \varphi_n \dots e_{nn} \end{vmatrix}, \tag{П2.124}$$

причем все φ_s $(s=1, 2, ..., n)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$E\varphi_s = 0. \tag{П2.125}$$

Применяя этот метод к уравнениям Дирака (П2.117) при $A_i=0$, легко получить, что функции ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_0 должны представлять собой некоторые линейные комбинации производных четырех линейно независимых решений следующего линейного волнового уравнения четвертого порядка:

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\left(\Box\varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi\right) = 0, \tag{П2.126}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера.

Другими словами, функции φ_j должны удовлетворять уравнению, в левой части которого оператор уравнения ФКГ применяется дважды.

Отсюда следует также, что из четырех линейно независимых решений ФКГ можно образовать четыре линейно независимые комбинации их производных, которые будут решениями уравнений Дирака.

Действительно, согласно соотношениям (П2.117), (П2.122), (П2.125) нетрудно получить следующие соотношения для компонент фундаментальных функций ψ_k через решения φ_j соответствующих уравнений ФКГ:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \overline{\nabla}\{(+p_0 + mc)\varphi_2 + (p_1 + ip_2)\varphi_3 - p_3\varphi_0\}; \\ \psi_2 &= \overline{\nabla}\{-(p_0 + mc)\varphi_1 - p_3\varphi_3 - (p_1 - ip_2)\varphi_0\}; \\ \psi_3 &= \overline{\nabla}\{-(p_0 - mc)\varphi_0 - (p_1 + ip_2)\varphi_1 + p_3\varphi_2\}; \\ \psi_0 &= \overline{\nabla}\{(p_0 - mc)\varphi_3 + p_3\varphi_1 + (p_1 + ip_2)\varphi_2\}, \end{aligned} \tag{П2.127}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, φ_0 — линейно независимые решения уравнения (П2.125). В нашем случае уравнение (П2.125) принимает вид

$$\overline{\nabla}\,\overline{\nabla}\,\varphi_j = 0, \tag{П2.128}$$

где оператор уравнений ФКГ вида

$$\overline{\boxed{\nabla}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 + m^2c^2; \quad p_j = \hbar \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$p_0 = \frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t}. \qquad \text{(П2.129)}$$

Формулы (П2.127), (П2.128) дают своеобразное представление компонент ψ_k спинора через производные четырех линейно-независимых скаляров φ_j, каждый из которых удовлетворяет уравнению ФКГ (П2.128).

Рассмотрим другие формы уравнений Дирака. По аналогии с уравнениями Дирака (П2.117) можно написать другие релятивистски инвариантные квантовые уравнения спинорного поля, форма которых приведена в табл. П2.1. Преобразования компонент спинора ψ_k, оставляющих релятивистски инвариантными перечисленные квантовые уравнения, приведены в той же табл. П2.1. Как будет показано при изложении квантового постулата, эти формы, как и форма уравнений Дирака, удовлетворяют законам сохранения плотности вероятности, энергии и градиентной инвариантности. Подробно для уравнения Дирака перечисленные свойства исследованы де Бройлем [68].

Общее решение любой из перечисленных форм для свободных полей также может быть представлено в виде, аналогичном (П2.127). В табл. П2.2 приведены зависимости ψ_k от φ_j для систем, представленных в табл. П2.1.

Нетрудно убедиться, что формулы для тонкой структуры водородоподобного атома могут быть получены для любой из приведенных систем аналогично уравнениям Дирака.

Следует подчеркнуть, что формы, представленные в табл. П2.1, отражают требование о равноправности компонент фундаментальных функций ψ_k.

В заключение отметим следующее. В уравнениях Дирака выделена преимущественная ось *oz* [68, 423, 427], т. е. квантовая система движется относительно оси *oz*. Так Л. де Бройли в [68, с. 11] отмечает: «Уравнения Дирака приписывают особенную роль оси *oz* и волновые функции, так же как и в теории Паули, дадут ответ на вопросы, в которых играет роль ось *oz*». Это нашло свое отражение в распределении комбинаций операторов вида $(p_0 \pm mc)$, $(p_1 \pm \pm ip_2)$, p_3. Изложенный выше подход, основанный на требовании о единстве математического объекта, равноправности его компонент и координат пространственно-временного континуума, позволяет непосредственно написать системы квантовых уравнений относительно других направлений пространственно-временного континуума, аналогичные изложенным в настоящем разделе. Так, например, уравнения Дирака для случая, когда система движется в направлении оси *oy*, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(p_0 - mc)\psi_1 - (p_1 - ip_3)\psi_0 - p_2\psi_3 = 0;\\
&(p_0 - mc)\psi_2 - (p_1 + ip_3)\psi_3 + p_2\psi_0 = 0;\\
&(p_0 + mc)\psi_3 - (p_1 - ip_3)\psi_2 - p_2\psi_1 = 0;\\
&(p_0 + mc)\psi_0 - (p_1 + ip_3)\psi_1 + p_2\psi_2 = 0.
\end{aligned} \qquad \text{(П2.130)}$$

Аналогично для случая, когда система движется в направлении оси *ox*, имеем

$$\begin{aligned}
&(p_0 - mc)\psi_1 - (p_2 - ip_3)\psi_0 - p_1\psi_3 = 0;\\
&(p_0 - mc)\psi_2 - (p_2 + ip_3)\psi_3 + p_1\psi_0 = 0;
\end{aligned}$$

Таблица П2.1

№ п/п	Квантовые уравнения	Преобразование компонент $\psi_к$		
		Поворот вокруг оси OZ	Поворот вокруг оси OY	Простое преобразование Лоренца
1	$(p_0+mc)\psi_1+(p_1+ip_2)\psi_3+p_3\psi_0=0$	$\psi_1'=\psi_1\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_1'=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}-\psi_2\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_1'=\psi_1\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_0\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_2-(p_1-ip_2)\psi_0+p_3\psi_3=0$	$\psi_2'=\psi_2\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_2'=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}+\psi_1\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_2'=\psi_2\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_3\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_3+(p_1-ip_2)\psi_1+p_3\psi_2=0$	$\psi_3'=\psi_3\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_3'=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}-\psi_0\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_3'=\psi_3\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_0-(p_1+ip_2)\psi_2+p_3\psi_1=0$	$\psi_0'=\psi_0\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_0'=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}+\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_0'=\psi_0\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
2	$(p_0-mc)\psi_1-(p_1+ip_2)\psi_2-p_3\psi_3=0$	$\psi_1'=\psi_1\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_1'=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}-\psi_0\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_1'=\psi_1\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_3\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_2-(p_1-ip_2)\psi_1-p_3\psi_0=0$	$\psi_2'=\psi_2\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_2'=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}-\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_2'=\psi_2\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_0\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_3+(p_1+ip_2)\psi_0-p_3\psi_1=0$	$\psi_3'=\psi_3\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_3'=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}+\psi_2\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_3'=\psi_3\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_0+(p_1-ip_2)\psi_3-p_3\psi_2=0$	$\psi_0'=\psi_0\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_0'=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}+\psi_1\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_0'=\psi_0\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
3	$(p_0-mc)\psi_1-(p_1-ip_2)\psi_3-p_3\psi_2=0$	$\psi_1'=\psi_1\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_1'=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}+\psi_0\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_1'=\psi_1\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_2-(p_1+ip_2)\psi_0-p_3\psi_1=0$	$\psi_2'=\psi_2\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_2'=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}+\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_2'=\psi_2\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_3-(p_1-ip_2)\psi_1+p_3\psi_0=0$	$\psi_3'=\psi_3\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_3'=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}-\psi_2\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_3'=\psi_3\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_0\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_0-(p_1-ip_2)\psi_2+p_3\psi_3=0$	$\psi_0'=\psi_0\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_0'=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}-\psi_1\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_0'=\psi_0\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_3\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
4	$(p_0-mc)\psi_1-(p_1+ip_2)\psi_0+p_3\psi_2=0$	$\psi_1'=\psi_1\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_1'=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}+\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_1'=\psi_1\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_2+(p_1+ip_2)\psi_3+p_3\psi_1=0$	$\psi_2'=\psi_2\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_2'=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}-\psi_0\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_2'=\psi_2\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_3+(p_1-ip_2)\psi_2+p_3\psi_0=0$	$\psi_3'=\psi_3\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_3'=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}-\psi_1\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_3'=\psi_3\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_0\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_0-(p_1-ip_2)\psi_1+p_3\psi_3=0$	$\psi_0'=\psi_0\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_0'=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}+\psi_2\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_0'=\psi_0\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_3\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
5	$(p_0-mc)\psi_1+(p_1+ip_2)\psi_2-p_3\psi_0=0$	$\psi_1'=\psi_1\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_1'=\psi_1\cos\frac{\theta}{2}-\psi_3\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_1'=\psi_1\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_0\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_2+(p_1-ip_2)\psi_1+p_3\psi_3=0$	$\psi_2'=\psi_2\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_2'=\psi_2\cos\frac{\theta}{2}-\psi_0\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_2'=\psi_2\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_3\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0-mc)\psi_3+(p_1-ip_2)\psi_0+p_3\psi_2=0$	$\psi_3'=\psi_3\exp\left\{\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_3'=\psi_3\cos\frac{\theta}{2}+\psi_1\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_3'=\psi_3\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}+\psi_2\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$
	$(p_0+mc)\psi_0+(p_1+ip_2)\psi_3-p_3\psi_1=0$	$\psi_0'=\psi_0\exp\left\{-\frac{i\alpha}{2}\right\}$	$\psi_0'=\psi_0\cos\frac{\theta}{2}+\psi_2\sin\frac{\theta}{2}$	$\psi_0'=\psi_0\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}-\psi_1\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}$

$$(p_0+mc)\psi_3-(p_2-ip_3)\psi_2-p_1\psi_1=0;$$
$$(p_0+mc)\psi_0-(p_2+ip_3)\psi_1+p_1\psi_2=0. \qquad (\text{П2.131})$$

Для полученных систем нетрудно выписать преобразования компонент ψ_k и общие решения для свободных частиц через оператор ФКГ подобно результатам, полученным в табл. П2.1 и табл. П2.2. Так, для системы (П2.130) имеем

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \overline{\wedge} \{(+p_0+mc)\,\varphi_2+(p_1-ip_3)\,\varphi_3-p_2\varphi_0\};\\
\psi_2 &= \overline{\wedge} \{-(+p_0+mc)\,\varphi_1-(p_1+ip_3)\,\varphi_0-p_2\varphi_3\};\\
\psi_3 &= \overline{\wedge} \{-(+p_0-mc)\,\varphi_0-(p_1-ip_3)\,\varphi_1+p_2\varphi_2\};\\
\psi_0 &= \overline{\wedge} \{-(+p_0-mc)\,\varphi_3+(p_1+ip_3)\,\varphi_2+p_2\varphi_1\};
\end{aligned} \qquad (\text{П2.132})$$

соответственно для системы (П2.131)

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \overline{\wedge} \{(+p_0+mc)\,\varphi_2+(p_2-ip_3)\,\varphi_3-p_1\varphi_0\};\\
\psi_2 &= \overline{\wedge} \{-(p_0+mc)\,\varphi_1-(p_2+ip_3)\,\varphi_0-p_1\varphi_3\};\\
\psi_3 &= \overline{\wedge} \{-(p_0-mc)\,\varphi_0-(p_2-ip_3)\,\varphi_1+p_1\varphi_2\};\\
\psi_0 &= \overline{\wedge} \{(p_0-mc)\,\varphi_3+(p_2+ip_3)\,\varphi_2+p_1\varphi_1\}.
\end{aligned} \qquad (\text{П2.133})$$

Аналогично табл. П2.1 можно выписать соответствующие законы преобразования компонент для систем (П2.130) и (П2.131).

Таким образом, приведенные математические объекты полностью обладают свойствами, присущими модели Дирака.

О ковариантности уравнений Дирака и симметричные типы уравнений для частиц со спином $s=1/2$. Общее требование релятивистской ковариантности уравнений Дирака сам автор провел следующим образом [44, 68, 402].

Рассматривалась исходная система координат ($oxyz$), которую будем обозначать через S, и система координат ($o'x'y'z'$) (система S'), которая движется равномерно и прямолинейно вдоль оси oz' относительно системы координат S.

Дирак совершает переход от системы координат S к системе координат S' следующим образом. Вначале совершается поворот системы S вокруг оси oz на определенный угол α (см. гл. 4, табл. 4.2). Эту промежуточную систему координат будем обозначать S_α. Показывается, что при переходе от S к S_α уравнения остаются ковариантными, причем функции ψ_k ($k=1, 2, 3, 0$) преобразуются при этом по особому закону, не имеющему ничего общего с преобразованиями векторных или тензорных величин. Далее совершается поворот системы S_α на угол β вокруг оси ox. Полученную таким образом вторую промежуточную систему координат будем обозначать через $S_{\alpha\beta}$. Далее показывается, что уравнения также остаются ковариантными при переходе к системе координат $S_{\alpha\beta}$. При этом четыре функции ψ_k подвергаются новому преобразованию, также ничего не имеющего общего с преобразованиями векторных или тензорных величин и отличного от предыдущего преобразования (см. гл. 4, табл. 4.2).

И, наконец, совершается преобразование к системе координат S', движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к системам координат S, S_α

Таблица П2.2

Компоненты	Общий вид решений системы квантовых уравнений	
	Система 1 в табл. П2.1	Система 2 в табл. П2.1
$\psi_1 =$	$\boxtimes \left\{ -(p_0 - mc)\varphi_2 + p_3\varphi_3 - (p_1 + ip_2)\varphi_0 \right\}$	$\boxtimes \left\{ -(p_0 + mc)\varphi_0 - p_3\varphi_2 + (p_1 + ip_2)\varphi_3 \right\}$
$\psi_2 =$	$\boxtimes \left\{ (p_0 - mc)\varphi_1 + (p_1 - ip_2)\varphi_3 - p_3\varphi_0 \right\}$	$\boxtimes \left\{ (p_0 - mc)\varphi_3 - (p_1 - ip_2)\varphi_0 + p_3\varphi_1 \right\}$
$\psi_3 =$	$\boxtimes \left\{ (p_0 + mc)\varphi_0 + (p_1 - ip_2)\varphi_2 - p_3\varphi_1 \right\}$	$\boxtimes \left\{ -(p_0 - mc)\varphi_2 - (p_1 + ip_2)\varphi_1 - p_3\varphi_0 \right\}$
$\psi_0 =$	$\boxtimes \left\{ -(p_0 + mc)\varphi_3 + p_3\varphi_2 + (p_1 + ip_2)\varphi_1 \right\}$	$\boxtimes \left\{ (p_0 + mc)\varphi_1 + (p_1 - ip_2)\varphi_2 + p_3\varphi_3 \right\}$

и $S_{\alpha\beta}$. Причем ось oz' этой системы совпадает с соответствующей осью координат $S_{\alpha\beta}$.

Дирак показывает, что если функции ψ преобразуются по определенному указанному выше закону, то в системе координат S' уравнения будут сохранять тот же вид, который они имели в системах координат S, S_α и $S_{\alpha\beta}$. Другими словами, уравнения Дирака являются общековариантными.

П. Дирак [44], а позже в более общей форме Дж. Нейман [402] показали также, что каждое из введенных преобразований может рассматриваться как элемент некоторой группы. Таким образом, был открыт новый в смысле Вундгейлера математический объект, изучение которого привело Ван дер Вардена к созданию спинорного исчисления. Впрочем вне связи с квантовой механикой Э. Картан еще в 1913 г. разработал основы спинорного исчисления [55].

Обратим теперь внимание на следующее существенное обстоятельство. Переход от системы координат S к системе координат S' производится в следующей последовательности: $S \to S_\alpha \to S_{\alpha\beta} \to S'$. Изменение указанной последовательности недопустимо ввиду некоммутативности введенных преобразований. Если бы, например, совершить сначала переход к системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно вдоль оси oz системы S (причем оси этой системы координат остаются все время параллельными осям системы S), а затем со-

для свободных частиц со спином $s=1/2$

Система 3 в табл. П2.1	Система 4 в табл. П2.1	Система 5 в табл. П2.1
$\boxtimes\{-(p_0+mc)\varphi_0+ + p_3\varphi_3-(p_1+ip_2)\varphi_2\}$	$\boxtimes\{(p_0+mc)\varphi_3- - p_3\varphi_0-(p_1+ip_2)\varphi_2\}$	$\boxtimes\{(p_0+mc)\varphi_3-p_3\varphi_2- -(p_1+ip_2)\varphi_0\}$
$\boxtimes\{(p_0-mc)\varphi_3- - p_3\varphi_0+(p_1+ip_2)\varphi_1\}$	$\boxtimes\{(p_0-mc)\varphi_0- - p_3\varphi_3+(p_1+ip_2)\varphi_1\}$	$\boxtimes\{(p_0-mc)\varphi_0+p_3\varphi_1- - (p_1-ip_2)\varphi_3\}$
$\boxtimes\{-(p_0-mc)\varphi_2- - p_3\varphi_1-(p_1-ip_2)\varphi_0\}$	$\boxtimes\{-(p_0+mc)\varphi_1+ + p_3\varphi_2-(p_1-ip_2)\varphi_0\}$	$\boxtimes\{-(p_0+mc)\varphi_1- - p_3\varphi_0+(p_1-ip_2)\varphi_2\}$
$\boxtimes\{(p_0+mc)\varphi_1+ + p_3\varphi_2+(p_1-ip_2)\varphi_3\}$	$\boxtimes\{-(p_0-mc)\varphi_2+ + p_3\varphi_1+(p_1-ip_2)\varphi_3\}$	$\boxtimes\{-(p_0-mc)\varphi_2+ + p_3\varphi_3+(p_1+ip_2)\varphi_1\}$

вершить два указанных выше поворота, то пришли бы к системе координат, не имеющей ничего общего с системой координат S'. Таким образом, матрицы операторов преобразований к системам координат S_α, $S_{\alpha\beta}$ и S' оказываются некоммутативными.

Вместе с тем операторы импульсов p_1, p_2, p_3, p_0 входят в уравнение Дирака неравноправно. Так, операторы p_1 и p_2 входят в виде комплекса $(p_1 \pm ip_2)$, в то время как оператор p_3 входит самостоятельно, а оператор p_0 также входит в виде комплекса $(p_0 \pm mc)$. Эта неравноправность операторов как будто бы противоречит равноправности всех направлений в пространстве и противоречит вытекающей из теории относительности симметрии между пространственными координатами и координатой времени.

Тем не менее остается фактом, что уравнения Дирака остаются инвариантными относительно групп преобразований S_α, $S_\alpha S_{\alpha\beta}$ и $S_\alpha S_{\alpha\beta} S'$. Причем направление оси oz' в системе координат S' может иметь любой угол по сравнению с начальной системой координат S. Поэтому Л. де Бройли совершенно прав, когда сделал в [68, с. 111] утверждение: «Комбинируя три типа преобразований 1, 2 и 3, можно получить преобразование Лоренца наиболее общего типа». Вместе с тем в [68, с. 229] Луи де Бройли отмечает: «Тем не менее совершенно невозможно претендовать на то, чтобы теория Дирака в ее нынешнем состоя-

нии целиком согласовывалась с концепциями относительности. Одной из ведущих идей теории относительности является то, что она всегда заставляет пространственные и временные координаты входить в уравнение симметрично. Но в теории Дирака эта симметрия переменных *xyzt* не осуществляется».

Таким образом, уравнения Дирака производят впечатление таинственного и загадочного объекта.

Невольно возникает вопрос: не существует ли аналогичная уравнениям Дирака система уравнений, в которую операторы p_i входили бы равноправно, была бы релятивистски-инвариантной и удовлетворяла квантовому постулату?

Если бы эта система уравнений приводила к тем же результатам для спектра атома водорода (тонкая структура), что и уравнения Дирака, а также к другим физическим эффектам (существование позитрона и др.), то такая система уравнений могла бы быть конкурентоспособной по отношению к уравнениям Дирака. Уравнения эти имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(p_0-ip_3)\psi_1-(p_1-ip_2)\psi_0-mc\psi_3=0;\\
&(p_0-ip_3)\psi_2-(p_1+ip_2)\psi_3+mc\psi_0=0;\\
&(p_0+ip_3)\psi_3-(p_1-ip_2)\psi_2-mc\psi_1=0;\\
&(p_0+ip_3)\psi_0-(p_1+ip_2)\psi_1+mc\psi_2=0;
\end{aligned} \qquad (\text{П2.134})$$

$$\begin{aligned}
&(p_0-ip_2)\psi_1-(p_1-ip_3)\psi_0-mc\psi_3=0;\\
&(p_0-ip_2)\psi_2-(p_1+ip_3)\psi_3+mc\psi_0=0;\\
&(p_0+ip_2)\psi_3-(p_1-ip_3)\psi_2-mc\psi_1=0;\\
&(p_0+ip_2)\psi_0-(p_1+ip_3)\psi_1+mc\psi_2=0,
\end{aligned} \qquad (\text{П2.135})$$

где $p_j=\hbar\dfrac{\partial}{\partial x^j}-\dfrac{ie}{c}A_j$; $p_0=\dfrac{\hbar}{ic}\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{ie}{c}A_0$.

Нетрудно показать, что такие системы релятивистски-инвариантны и что они приводят к тем же собственным значениям, что и уравнения Дирака при рассмотрении задачи о спектре атома водорода. Возможно, однако, что в некоторых других задачах между решениями уравнений Дирака и предложенными уравнениями возникнут существенные различия.

Здесь ограничимся приведенными замечаниями, так как рассмотрение упомянутых вопросов выходит за рамки настоящей работы. Обоснование приведенных уравнений дано в гл. 4 на основе квантового постулата [7].

П2.4. Элементы релятивистской квантовой теории поля. В современной физике изучаются различного рода поля, с помощью которых описываются взаимодействия между различными типами материальных частиц. Особенно глубоко и подробно изучено электромагнитное поле. Значительно менее подробно изучены поля ядерных и гравитационных сил.

В квантовой теории поля показывается, что каждому полю соответствуют частицы с определенной массой покоя. Так, электромагнитному полю соответствуют фотоны, масса покоя которых равна нулю. Гравитационному полю соответствуют так называемые гравитоны, масса покоя которых также равна нулю. Что же касается поля ядерных сил, то ему соответствуют частицы, получившие название мезонов, масса покоя которых отлична от нуля.

Квантовая теория поля приобрела в современной физике большое значение, так как она дает возможность объяснить целый ряд явлений, для которых не существовало ранее адекватной физической интерпретации. Так, квантовая

электродинамика дает объяснение таким явлениям как аннигиляция электронно-позитронных пар или рождение новых пар, лэмбовский сдвиг энергетических уровней электронов в атомах и т. д.

В современной квантовой теории поля существует два традиционных направления. Первое направление строится по аналогии с квантовой механикой отдельных частиц, т. е. на основе гамильтонова (или лагранжевого) формализма. Второе направление носит более формальный характер, причем здесь имеется два подхода. Первый подход основан на введении системы аксиом, которым должны подчиняться операторы поля, а второй подход основан на введении так называемой S-матрицы (матрицы рассеяния). Здесь ограничимся изложением квантовой теории поля в ее гамильтоновой форме.

Начнем с рассмотрения свободных полей, т. е. полей в отсутствии внешних воздействий. Свободные поля могут быть описаны с помощью системы волновых функций $\psi_k = \psi_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, где $x_0 = ict$; x_1, x_2, x_3 — пространственные прямоугольные координаты.

Для получения уравнений поля наиболее удобно воспользоваться принципом Гамильтона — Остроградского

$$\delta \int \mathscr{L} dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = 0, \tag{П2.136}$$

здесь предполагается, что лагранжиан $\mathscr{L}$ зависит только от волновых функций ψ_k и их производных по координатам $\partial\psi_k/\partial x_r$ $(r=0, 1, 2, 3)$. Естественно, лагранжиан должен быть инвариантен относительно преобразования Лоренца. Если это условие выполнено, то полученные с помощью вариационного принципа (П2.136) уравнения движения поля также будут инвариантны относительно преобразования группы Лоренца. Эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\sum_{k=0,1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial\psi_r/\partial x_k)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_r} = 0. \tag{П2.137}$$

Заметим, что лагранжиан обладает так называемой градиентной инвариантностью. Это значит, что если функция $\mathscr{L}$ подвергнута следующему преобразованию:

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \sum_{k=0,1,2,3} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}, \tag{П2.138}$$

где f_k — компоненты произвольного 4-вектора, зависящего только от координат, то уравнение движения поля не изменится.

С помощью лагранжиана $\mathscr{L}$ могут быть получены компоненты тензора энергии-импульса поля при помощи следующих формул:

$$T_{ik} = \sum_{k=0,1,2,3} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\psi_r/\partial x_k)} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} - \mathscr{L}\delta_{ik}. \tag{П2.139}$$

На физическом смысле тензора энергии-импульса остановимся несколько ниже. Нетрудно убедиться, что тензор энергии-импульса, вычисленный по формуле (П2.139), удовлетворяет следующим уравнениям сохранения:

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{П2.140}$$

если учесть уравнения движения поля (П2.137). Введенный (П2.140) тензор энергии-импульса не симметричен, поэтому, вообще говоря, его нельзя рассматривать как тензор плотности потока вектора энергии-импульса. Однако Белифанте [427] показал, что тензору энергии-импульса можно придать симметричный вид. Тензор энергии-импульса, согласно [427], записывается следующим образом:

$$T_{ik} = \sum_r \left(U_i^{*(r)} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_k^{*(r)}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_k^{(r)}} U_i^{(r)} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_i^{(r)}} U_i^{(r)} \right) - \mathscr{L}\delta_{ik}. \qquad (П2.141)$$

В этом случае компоненты T_{ik} для $i=1, 2, 3$ представляют собой поток i-й компоненты импульса через площадку, перпендикулярную оси, а T_{0k} представляет собой поток энергии через ту же площадку. В рассматриваемом случае уравнение (П2.141) выражает закон сохранения энергии-импульса для рассматриваемого поля.

Наряду с тензором энергии-импульса вводится антисимметричный тензор момента количества движения [428]

$$M_{ij,k} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik} + \sum_r \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_r / \partial x_k} S_{ij,\mathrm{op}} \psi_r. \qquad (П2.142)$$

Тензор момента количества движения также удовлетворяет уравнению сохранения вида

$$\sum_k \frac{\partial M_{ij,k}}{\partial x_k} = 0. \qquad (П2.143)$$

При наличии внешних электромагнитных полей рассматриваемое поле описывается с помощью комплексно-сопряженных функций ψ_k и ψ_k^*. При этом вместо оператора $\partial/\partial x_k$ вводится два комплексно-сопряженных оператора

$$D_k = \partial/\partial x_k - iA_k; \qquad D_k^* = \partial/\partial x_k + iA_k. \qquad (П2.144)$$

Вектор тока в этом случае вводится по следующей формуле:

$$s_k = \varepsilon i \sum_r \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial \psi_r / \partial x_k)} \psi_r - \psi_r^* \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\partial \psi_r^* / \partial x_k)} \right], \qquad (П2.145)$$

где ε — постоянная, зависящая от знака заряда. Вектор тока удовлетворяет уравнению сохранения

$$\sum_k \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \qquad (П2.146)$$

Пример 1. Рассмотрим однокомпонентное поле, описываемое лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_l} - \varkappa^2 \psi^* \psi, \qquad (П2.147)$$

где $\varkappa = mc/\hbar$; m — масса покоя. Если теперь воспользоваться вариационным принципом

$$\delta \int \mathscr{L} dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = 0, \qquad (П2.148)$$

то получим следующее уравнение поля:

$$\Box \psi - \varkappa \psi = 0, \tag{П2.149}$$

где $\Box$ — оператор

$$\Box = \sum_{i=0,1,2,3} (\partial^2/\partial x^{i2}). \tag{П2.150}$$

По приведенной выше формуле (П2.145) вектор тока имеет вид

$$s_k = \varepsilon i \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \psi^* \right), \tag{П2.151}$$

где ε — заряд частицы в единицах $(\hbar c)^{1/2}$. Этот вектор тока удовлетворяет уравнению сохранения (П2.146)

$$\partial s_k / \partial x_k = 0. \tag{П2.152}$$

Воспользовавшись лагранжианом (П2.147) и выражением для тензора энергии-импульса (П2.139), получим

$$T_{ik} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_l} - \mathscr{L} \delta_{ik}. \tag{П2.153}$$

В рассматриваемом случае тензор энергии-импульса (П2.153) симметричен. Нетрудно также убедиться, что T_{ik} удовлетворяет закону сохранения

$$\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{П2.154}$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что плотность энергии $W = -T_{00}$ положительно определенная. Она выражается следующим образом:

$$W = -T_{00} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \operatorname{grad} \psi^* \operatorname{grad} \psi + \varkappa^2 \psi^* \psi =$$

$$= \frac{\partial \psi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \operatorname{grad} \psi^* \operatorname{grad} \psi + \varkappa^2 \psi^* \psi. \tag{П2.155}$$

Во многих случаях бывает удобным вместо одного уравнения второго порядка ввести систему уравнений первого порядка

$$\psi_k = \partial \psi / \partial x_k, \qquad \partial \psi_k / \partial x_k = \varkappa^2 \psi. \tag{П2.156}$$

Эта система может быть получена из лагранжиана

$$\mathscr{L} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \psi_i + \psi_i^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \psi_i^* \psi_i + \varkappa^2 \psi^* \psi. \tag{П2.157}$$

Пример 2. Рассмотрим для свободного поля уравнения Дирака (П2.117) в традиционной форме [44, 389]

$$\gamma_k (\partial \psi / \partial x_k) + \varkappa \psi = 0, \tag{П2.158}$$

где ψ — четырехкомпонентная функция; γ_k — четырехрядные матрицы γ_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{2} (\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i) = \delta_{ik}. \tag{П2.159}$$

Как известно, функция ψ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Box \psi - \varkappa^2 \psi = 0. \tag{П2.160}$$

Вводятся дополнительно сопряженные функции ψ^+, удовлетворяющие уравнению

$$(\partial\psi^+/\partial x_k)\,\gamma_k - \varkappa\psi^+ = 0. \tag{П2.161}$$

Волновые уравнения в виде (П2.158) можно получить из следующего лагранжиана [89, 427]:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\psi^+\gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_k}\,\gamma_k\psi\right) + \varkappa\psi^*\psi. \tag{П2.162}$$

Теперь имеем возможность написать следующие уравнения для вектора тока:

$$s_k = \varepsilon_i\psi^+\gamma_k\psi, \tag{П2.163}$$

а для тензора энергии-импульса ($\mathscr{L}=0$):

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(\psi^+\gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_i}\,\gamma_k\psi\right). \tag{П2.164}$$

Тензор (П2.164) не симметричен. Однако можно ввести симметричный тензор

$$\theta_{ik} = {}^1/_2(T_{ik}+T_{ki}), \tag{П2.165}$$

удовлетворяющий уравнению сохранения. Плотность энергии имеет следующее выражение:

$$W = -T_{00} = \frac{1}{2i}\left(-\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x_0} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x_0}\,\psi\right). \tag{П2.166}$$

Заметим, что энергия здесь не является положительно определенной. Таким образом, теория Дирака допускает существование частиц с отрицательной энергией. Этот вопрос много обсуждался в литературе. Возможность существования частиц с отрицательной энергией послужила основанием для предсказания существования позитрона.

Перейдем теперь к гамильтоновой форме описания классических волновых полей. Для этой цели введем поле, канонически сопряженное с полем, описываемом функциями ψ_k. Это поле вводится с помощью формулы:

$$\pi_j = \partial\mathscr{L}/\partial(\partial\psi_j/\partial t). \tag{П2.167}$$

Функции π_j называют также обобщенными импульсами рассматриваемого поля.

По аналогии с классической механикой образуем гамильтониан поля

$$\mathscr{H} = \int H dx_1 dx_2 dx_3 dx_0;$$

$$H = \sum_j \pi_j\dot{\psi}_j - \mathscr{L}. \tag{П2.168}$$

Здесь H — плотность гамильтониана поля.

Исключая ψ_j из (П2.167), плотность гамильтониана поля можно представить как функцию от ψ_j, $\operatorname{grad}\psi_j$ и π_j:

$$H = H(\psi_1, \operatorname{grad}\psi_1, \pi_1; \psi_2, \operatorname{grad}\psi_2, \pi_2; \ldots). \tag{П2.169}$$

В квантовой теории, как известно [377], канонически сопряженным переменным q_i и p_i, т. е. координатам и импульсам механической системы, сопо-

ставляются некоторые эрмитовы операторы, удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_{i'}] = 0; \qquad [\hat{p}_i, \hat{p}_{i'}] = 0; \qquad [\hat{p}_i, \hat{q}_{i'}] = \hbar\delta_{ii'}/i. \tag{П2.170}$$

В соответствии с этим в квантовой теории поля канонически сопряженным переменным поля, т. е. функция ψ_j и π_j, сопоставляются некоторые эрмитовы операторы, удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$[\psi_j, \psi_{j'}] = 0; \qquad [\pi_j, \pi_{j'}] = 0; \qquad [\psi_j, \pi_{j'}] = \hbar\delta_{jj'}/i. \tag{П2.171}$$

Поскольку плотность гамильтониана H и полный гамильтониан поля $\mathscr{H}$ зависят от канонически сопряженных поля ψ_j и π_j, представляется возможным плотности гамильтониана и полному гамильтониану также сопоставить некоторые эрмитовые операторы. В квантовой теории поля, таким образом, вводимые операторы зависят от координат. Зависимость этих операторов от времени устанавливается при рассмотрении вопроса о релятивистской инвариантности перестановочных соотношений (П2.171) [427].

Конкретный вид операторов, сопоставляемый перестановочным переменным ψ_i и π_i, для некоторых типов полей будет рассмотрен ниже.

По аналогии с квантовой механикой системы материальных частиц имеют место следующие соотношения:

$$\dot{\psi}_j = \frac{i}{\hbar}[H, \psi_j]; \qquad \dot{\pi}_j = \frac{i}{\hbar}[H, \pi_j]. \tag{П2.172}$$

Ниже будет показано как из квантовых уравнений (П2.172) могут быть найдены собственные значения H и других переменных поля.

Уже указывалось (и это следует подчеркнуть еще раз), что всякая функция Лагранжа, инвариантная относительно группы Лоренца, автоматически приводит как к классическим, так и квантовым уравнениям поля, также инвариантным относительно группы преобразований Лоренца.

Пример 3. Рассмотрим квантование волнового поля, удовлетворяющего уравнению ФКГ, т. е. полю с одной волновой функцией. Для рассматриваемого поля выше были вычислены тензор энергии-импульса и вектор плотности тока. В соответствии с приведенным выше формализмом вычислим функцию π, канонически сопряженную с функцией ψ, т. е. плотность импульса поля и плотность гамильтониана H. Проведя соответствующие выкладки, получим

$$\pi = \partial\mathscr{L}/\partial(\partial\psi/\partial t) = \dot{\psi}, \tag{П2.173}$$

$$H = {}^1/_2\{\pi^2 + c^2|\operatorname{grad}\psi|^2 + c^2\mu^2\psi^2\}. \tag{П2.174}$$

В соответствии с (П2.172) эрмитовы операторы $\psi = \psi^*$, $\pi = \pi^*$ должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям:

$$[\psi, \psi'] = [\pi, \pi'] = 0; \qquad [\pi, \psi'] = \frac{\hbar}{i}\delta(x - x').$$

В соответствии с (П2.172) получим

$$\dot{\psi} = \frac{i}{\hbar}[H, \psi] = \pi, \qquad \dot{\pi} = \frac{i}{\hbar}[H, \pi] = c^2\{\Delta\psi - \mu^2\psi\}. \tag{П2.175}$$

Исключая из (П2.175) π, получим

$$\ddot{\psi} = \dot{\pi} = c^2\{\Delta\psi - \mu^2\psi\}. \tag{П2.176}$$

Операторы ψ и π можно представить в виде следующего пространственного разложения Фурье:

$$\psi(x) = V^{-1/2} \sum_k q_k e^{ikx}; \qquad \pi(x) = V^{-1/2} \sum_k p_k e^{-ikx}, \tag{П2.177}$$

причем эрмитовы операторы p_k и q_k должны удовлетворять перестановочным соотношениям

$$\hat{q}_{-k} = \hat{q}_k^*, \qquad \hat{p}_{-k} = \hat{p}_k^*; \tag{П2.178}$$

$$[\hat{q}_k, \hat{q}_{k'}] = [\hat{p}_k, \hat{p}_{k'}] = 0; \qquad [\hat{p}_k, \hat{q}_{k'}] = \hbar\delta_{kk'}/i. \tag{П2.179}$$

Если операторные ряды Фурье (П2.177) подставить в оператор гамильтониана (П.169), то получим

$$H(x) = \frac{1}{2V} \sum_k \sum_{k'} \{p_k p_{k'} e^{-i(k+k')x} + c^2(-kk' + \mu^2) q_k q_{k'} e^{i(k+k')x}\}; \tag{П2.180}$$

$$\mathcal{H} = \int_V H dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 = \frac{1}{2} \sum_k \{p_k p_k^* + \omega_k^2 q_k^* q_k\}, \tag{П2.181}$$

где

$$\omega_k = c\sqrt{\mu^2 + k^2} \qquad (> 0). \tag{П2.182}$$

Введем теперь вспомогательные матрицы

$$a_k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}; \qquad a_k^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \end{pmatrix}. \tag{П2.183}$$

Элементы этих матриц можно записать следующим образом:

$$(a_k)_{N_k', N_k''} = (a_k^*)_{N_k'', N_k'} = \sqrt{N_k''}\, \delta_{N_k', N_k''-1}. \tag{П2.184}$$

Нетрудно проверить, что элементы матриц (П2.183) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^*, a_{k'}^*] = 0; \qquad [a_k, a_{k'}^*] = \delta_{kk'}. \tag{П2.185}$$

С помощью введенных матриц операторы q_k и p_k можно представить в следующем виде:

$$q_k = \sqrt{\hbar/2\omega_k}\,(a_k + a_{-k}^*); \qquad p_k = \sqrt{\hbar\omega_k/2}\,(a_k^* - a_{-k}). \tag{П2.186}$$

Теперь нетрудно проверить, что перестановочные соотношения (П2.178), (П2.179) автоматически удовлетворяются. Подставив (П2.186) в (П2.180), получим в результате

$$H = \frac{\hbar}{2} \sum_k \omega_k (a_k^* a_k + a_k a_k^*). \tag{П2.187}$$

Матрицу-оператор (П2.187) можно, пользуясь методом Гейзенберга — Паули,

привести к диагональному виду. После чего получим собственные значения матрицы H, т. е. собственные значения энергии квантов рассматриваемого поля в следующем виде:

$$H_{N_1,N_2,\ldots} = \frac{\hbar}{2}\sum_k \omega_k (2N_k + 1). \qquad (П2.188)$$

Следует остановиться несколько подробнее на выражении (П2.188). Значение энергии при $N_k = 0$

$$H_0 = \frac{\hbar}{2}\sum_k \omega_k. \qquad (П2.189)$$

Легко видеть, что H_0 принимает бесконечное значение, т. е. оно лишено физического смысла.

Исходя из интуитивных представлений [427—429], запишем энергию поля в виде

$$H_{N_1,N_2\ldots} - H_0 = \sum_k N_k \omega_k. \qquad (П2.190)$$

Из приведенного соотношения (П2.190) можно сделать следующий вывод: стационарное состояние поля, с одной стороны, имеет ту же энергию в объеме V, что и N_1 частиц с энергией $\hbar\omega_1$, N_2 частиц с энергией $\hbar\omega_2$ в том же объеме и т. д. С другой стороны, согласно релятивистской квантовой механики частиц $\hbar\omega_k$ равна энергии частиц, имеющих массу $m = \hbar\omega/c$ и импульс $p = \hbar k$. При этом справедливо релятивистское соотношение

$$\hbar\omega_k = hc\sqrt{\mu^2 + k^2} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}. \qquad (П2.191)$$

Из изложенного следует, что квантование рассматриваемого поля ψ приводит к корпускулярным системам частиц, причем целое число N_k указывает, сколько имеется частиц с импульсом $\hbar k$.

Далее, так как собственные значения энергии системы частиц учитываются при суммировании по одному разу, то при статистическом рассмотрении каждому такому состоянию надо приписать вес 1. Такой подход соответствует статистике Бозе — Эйнштейна.

Рассматриваемое поле является частным случаем так называемых мезонных полей. Заметим, что мезоны с целочисленным спином, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна, называются, как отмечалось, бозонами, а соответствующие поля — бозонными полями. Рассмотренное скалярное поле является простейшим случаем такого рода полей. Более общие бозонные поля носят векторный характер.

Следует также отметить, что частицы с целочисленным спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна вследствие симметрии перестановочных соотношений (П2.178), (П2.179). Наоборот, частицы с полуцелыми спином подчиняются статистике Ферми — Дирака вследствие того, что им соответствуют следующие антисимметричные перестановочные соотношения:

$$[\psi_j, \pi_{j'}]_+ = i\hbar\delta^3(r - r')\,\delta_{jj'}; \qquad [\psi_j, \psi_{j'}]_+ = [\pi_j, \pi_{j'}]_+ = 0, \qquad (П2.192)$$

где введено обозначение $[A, B]_+ = AB + BA$.

Если символом f_i обозначить плотность распределения частиц в фазовом пространстве, то можно написать [427—429]

$$f_i = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 \cdot 1 \Big/ \left(\frac{1}{A} e^{W_i/kT} \pm 1\right), \qquad \text{(П2.193)}$$

W_i — энергия i-й частицы; k — постоянная Больцмана; T — температура; A — постоянная; m — масса частицы.

В (П2.193) знак «+» соответствует статистике Ферми — Дирака, а знак «—» — статистике Бозе — Эйнштейна. При достаточно высоких температурах выражение (П2.193) переходит в классическую формулу для плотности Больцмана — Гиббса. С понижением температуры квантовые эффекты становятся все более и более существенными.

В случае, если имеем дело с системой взаимодействующих полей, лагранжиан такой системы может быть представлен в виде суммы лагранжианов отдельных полей и лагранжиана взаимодействия этих полей. В частности, для двух полей имеем

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_{12}, \qquad \text{(П2.194)}$$

здесь $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — лагранжианы первого и второго поля; $\mathscr{L}_{12}$ — лагранжиан взаимодействия этих полей.

Изложенный выше формализм полностью сохраняется применительно к общему лагранжиану $\mathscr{L}$ взаимодействующих полей.

Перейдем теперь к краткому изложению *квантовой электродинамики*. Ограничимся рассмотрением здесь только свободных полей. Как известно, такие поля описываются следующей системой уравнений [426, 427]:

$$\Box A_\mu = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \qquad \text{(П2.195)}$$

где A_μ — компоненты 4-мерного вектора потенциала, удовлетворяющие условию Лоренца

$$\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0. \qquad \text{(П2.196)}$$

Векторы напряженности электрического и магнитного полей **E** и **H** следующим образом выражаются через компоненты A_μ:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi. \qquad \text{(П2.197)}$$

Здесь «вектор» A образуется с помощью трех пространственных компонент четырехмерного вектор-потенциала A_1, A_2, A_3, а «скалярный» потенциал φ следующим образом связан с временной компонентой вектор-потенциала $i\varphi = A_0$.

Как известно, 4-мерный вектор-потенциал обладает градиентной инвариантностью

$$A \to A' = A - \nabla X; \qquad \varphi \to \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}. \qquad \text{(П2.198)}$$

Причем в силу условия Лоренца (П2.196) для функции X выполняется условие $\Box X = 0$.

Нетрудно убедиться, что преобразование (П2.198) не изменяет $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$. Плотность лагранжиана электромагнитного поля имеет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{8\pi}\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2. \qquad \text{(П2.199)}$$

В соответствии с изложенным выше общим формализмом (П2.167) обобщенные импульсы π_μ, канонически сопряженные с A_μ, имеют следующее значение:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{ic\partial\,(\partial A_\mu/\partial x_0)} = -\frac{1}{4\pi ic}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}. \qquad (П2.200)$$

Теперь можно записать гамильтониан плотности

$$H = \pi_\mu A_\mu - \mathscr{L} = \frac{1}{8\pi}\left[(4\pi)^2\sum_\mu c^2\pi_\mu + \sum_{k,\mu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\sum_\mu\left[-\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}\right)^2 + \sum_k\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_k}\right)^2\right]\cdot\ (k = 1, 2, 3). \qquad (П2.201)$$

В соответствии с общими положениями, изложенными выше, при переходе к квантовой электродинамике компоненты 4-вектор потенциала A_μ должны рассматриваться как операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[A_\mu(r, t), \pi_\nu(r', t)] = \frac{1}{4\pi c^2}\left[A_\mu(r, t), \frac{\partial A_\nu(r', t)}{\partial t}\right] = i\hbar\delta_{\mu\nu}\delta^3(r - r'); \qquad (П2.202)$$

$$[A_\mu(r, t), A_\nu(r', t)] = [\pi_\mu(r, t), \pi_\nu(r', t)] = 0.$$

Как отмечалось, кванты электромагнитного поля, т. е. фотоны, подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна и, следовательно, не подчиняются принципу запрета Паули. Электромагнитное поле, таким образом, является бозонным полем.

Учитывая выражение (П2.201) для плотности гамильтониана, можно записать оператор энергии электромагнитного поля

$$H = \lim_{\alpha\to\alpha_0} H_\alpha = \lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{1}{8\pi}\int\int f_\alpha(r, r')\left[-\frac{\partial A_\mu(r)}{\partial x_0}\frac{\partial A_\mu(r')}{\partial x_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_\mu(r)}{\partial x_k}\frac{\partial A_\mu(r')}{\partial x_k'}\right] dV dV', \qquad (П2.203)$$

Учитывая зависимость операторов поля от координат, можно представить эти операторы в виде рядов Фурье (с операторными коэффициентами), которые являются квантовыми аналогами решений волновых уравнений (П2.195)

$$A_{\mu,k_\lambda} = V^{-1/2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}}\, e^{(\mu)}_{k_\lambda} e^{i(kr-\omega t)}, \qquad (П2.204)$$

где $e^{(\mu)}_{k_\lambda}$ — вектор поляризации; k — волновой вектор. Если ввести обозначения $k \equiv k_\mu = (k, i\omega/c) = (k, ik_{(0)})$; $x \equiv x_\mu = (r, ict)$, то $kx = k_\mu x_\mu = kr - \omega t$ и выражение (П2.204) можно записать в виде

$$A_{\mu,k_\lambda}(x) = V^{-1/2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2c^2}{\omega}}\, e^{(\mu)}_{k_\lambda} e^{ikx}. \qquad (П2.205)$$

После подстановки (П2.205) в (П2.195) получим дисперсионное соотношение

$$k^2 = 0. \tag{П2.206}$$

Из (П2.206) следует $|k| = \omega/c$. Далее в качестве ортов системы координат выберем векторы поляризации, т. е. положим

$$e^{(\mu)}_{k\lambda} = \delta_{\mu\lambda}. \tag{П2.207}$$

Направим ось x_3 вдоль k, что же касается осей x_1, x_2, то их направим перпендикулярно к k и друг к другу. В этом случае $\lambda = 1,2$ будут соответствовать поперечной и $\lambda = 3$ продольной поляризациям. При $\lambda = 0$ будем иметь дело с «временной», т. е. «скалярной» поляризацией

Теперь имеем возможность следующим образом записать условия поперечности, продольности и ортогональности:

$$e^{(\mu)}_{k\lambda} k_\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = 1, 2; \\ |k|, & \text{если } \lambda = 3; \\ \dfrac{i\omega}{c}, & \text{если } \lambda = 0; \end{cases} \tag{П2.208}$$

$$e^{(\mu)}_{k\lambda} e^{(\mu)}_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad e^{(\mu)}_{k\lambda} e^{(\nu)}_{k\lambda} = \delta_{\mu\nu}. \tag{П2.209}$$

Выражение ортогональности (П2.209) можно также записать в виде

$$(e_{k\lambda}, e_{k\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (e^{(\mu)}_k, e^{(\nu)}_k) = \delta_{\mu\nu}. \tag{П2.210}$$

Операторы A_μ внутри куба объема V могут быть представлены следующими рядами Фурье по функциям (П2.205) с операторными коэффициентами $a_{k\lambda}$ и $a^*_{k\lambda}$:

$$A_\mu = \sum_{k,\lambda} (a_{k\lambda} A_{\mu, k\lambda} + a^*_{k\lambda} A^*_{\mu, k\lambda}). \tag{П2.211}$$

Очевидно, суммирование по λ является суммированием по состояниям поляризации. Учитывая (П2.205), получим

$$A_\mu = V^{-1/2} \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_{(0)}}}\, e^{(\mu)}_{k\lambda} (a_{k\lambda} e^{ikx} + a^*_{k\lambda} e^{-ikx}). \tag{П2.212}$$

Из (П2.212) и (П2.202) получим следующие выражения для перестановочных соотношений:

$$[a_{k\lambda}, a^*_{k'\lambda'}] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}; \qquad [a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}] = [a^*_{k\lambda}, a^*_{k'\lambda'}] = 0. \tag{П2.213}$$

Из соотношений (П2.213) следует $a_{k_l} = a^+_{k_l}$ $(l = 1, 2, 3)$, $a_{k_0} = i a^+_{k_0}$, $a^*_{k_0} = i a_{k_0}$, где a_{k_l} и $a^+_{k_l}$ $(l = 0, 1, 2, 3)$ — эрмитово-сопряженные операторы. При этом первое из перестановочных соотношений (П2.213) примет вид

$$[a_{k_l}, a^+_{k_l}] = 1 \qquad (l = 0, 1, 2, 3). \tag{П2.214}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы: а) собственные значения операторов числа частиц $N_{k_l} = a^+_{k_l} a_{k_l}$ $(l = 0, 1, 2, 3)$ равны 0, 1, 2, ...; б) опе-

раторы a_{k_l} и $a^+_{k_l}$ ($l=0, 1, 2, 3$) являются соответственно операторами поглощения и рождения поперечных, продольных и скалярных фотонов.

Теперь имеем

$$a^+_{k_l}\Phi_n(\ldots, n_{k_l}, \ldots) = \sqrt{n_{kl}+1}\,\Phi_{n+1}(\ldots, n_{kl}+1, \ldots);$$

$$a_{k_l}\Phi_n(\ldots, n_{kl}, \ldots) = \sqrt{n_{kl}}\,\Phi_{n-1}(\ldots, n_{kl}-1, \ldots) \qquad (l=0, 1, 2, 3), \tag{П2.215}$$

где $\Phi_n(n_\alpha, \ldots, n_{\alpha'}, \ldots) = (n_\alpha! \ldots n_{\alpha'}! \ldots)^{-1/2} (a^+_\alpha)^{n_\alpha} \ldots (a^+_{\alpha'})^{n_{\alpha'}} \ldots \Phi_\nu$; Φ_ν — вектор, удовлетворяющий условию $a_{kl}\Phi_\nu = 0$ ($l=0, 1, 2, 3$).

Если условие Лоренца (П2.196), накладываемое в классической теории на 4-вектор потенциал переписать в операторном виде, то нетрудно показать, что это приводит к противоречию в теории. Поэтому в некоторых вариантах квантовой электродинамики ограничиваются требованием, чтобы для любого состояния Φ в среднем выполнялось условие

$$\left(\Phi, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\Phi\right) \equiv \left\langle \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right\rangle = 0. \tag{П2.216}$$

В этом случае можно показать, что имеет место соотношение

$$(\Phi, [a_{k_s} a^+_{k_s} - a^+_{k_0} a_{k_0}]\,\Phi) = 0. \tag{П2.217}$$

Если теперь воспользоваться перестановочными соотношениями (П2.214), то условие (П2.217) запишется в следующем виде:

$$\langle a^+_{k_s} a_{k_s}\rangle - \langle a^+_{k_0} a_{k_0}\rangle = +1;$$

$$\langle a^+_{k_s} a_{k_s}\rangle - \langle a^+_{k_0} a_{k_0}\rangle = -1. \tag{П2.218}$$

Из полученных соотношений можно сделать важные выводы, в частности, что в действительности не могут реализоваться такие состояния, в которых одновременно равны нулю числа продольных и скалярных фотонов с одним и тем же волновым числом k. В действительности могут существовать только такие состояния, для которых абсолютное значение разности числа скалярных и числа продольных фотонов с одним и тем же волновым числом k равно единице.

Подставим теперь (П2.212) в выражение для плотности оператора энергии; в результате получим

$$H = \frac{\hbar}{2}\sum_{k,\lambda} \omega_k (a^*_{k_\lambda} a_{k_\lambda} + a_{k_\lambda} a^*_{k_\lambda}); \tag{П2.219}$$

аналогично для плотности оператора импульса

$$G = \frac{\hbar}{2}\sum_{k,\lambda} k (a^*_{k_\lambda} a_{k_\lambda} + a_{k_\lambda} a^*_{k_\lambda}). \tag{П2.220}$$

Учитывая (П2.217) и (П2.219), получим выражение для собственных значений

оператора энергии

$$E = \hbar \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} \omega_k n_{k\lambda}. \qquad (П2.221)$$

Аналогично можно получить собственные значения для оператора импульса поля (П2.220). В этом собственно и заключается квантование электромагнитного поля внутри рассматриваемого объема V.

В несколько иной ситуации [427, 428], которая здесь не будет рассматриваться, приходим к следующему выражению для собственных значений оператора энергии:

$$E = \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} \hbar\omega_k \left(n_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) + \sum_k \sum_{\lambda=3}^{4} \frac{\hbar}{2} \omega_k, \qquad (П2.222)$$

где $\sum_k \sum_{\lambda=1}^{4} \frac{\hbar}{2} \omega_k$ — энергия электромагнитного вакуума.

Анализ выражений для собственных значений операторов энергии и импульса электромагнитного поля позволяет сделать следующие выводы: энергия и импульс поля определяются только поперечными фотонами ($\lambda = 1, 2$) и энергия поля принимает минимальное значение, когда поперечные фотоны отсутствуют.

Не будем здесь останавливаться на трудностях квантовой электродинамики (например, на бесконечном значении минимальной энергии, т. е. вакуума) и на способах устранения этих трудностей [426, 427].

Заметим, что принятое выше разделение фотонов на поперечные и продольные не является релятивистски-инвариантным. Последовательную релятивистски-инвариантную теорию можно найти в работе [426, 427].

Здесь нет возможности более подробно останавливаться на квантовой теории поля вообще и на квантовой электродинамике в частности. Подробное и детальное изложение можно найти в [426—430].

П2.5. Когерентные состояния квантовых систем. Состояния (П2.58) с минимальной неопределенностью называются *когерентными* [398, 401, 408, 409, 431—436]. Математически когерентные состояния были введены для квантовых систем с квадратичными гамильтонианами (т. е. для систем, представленных в виде конечного или бесконечного набора гармонических осцилляторов). Когерентные состояния для таких квадратичных систем согласно [431] определялись как собственные состояния неэрмитовых бозонных операторов уничтожения и минимизируют согласно данному определению произведение неопределенности координаты и импульса гауссовскими волновыми пакетами, вид которых сохраняется с течением времени. Важное для дальнейшего построения теории определение когерентных состояний для произвольных квантовых в виде собственных функций интегралов движения можно найти в [398]. В этом случае строятся операторы уничтожения — интегралы движения на основе оператора эволюции рассматриваемой системы. Обобщенные когерентные состояния на группах Ли были рассмотрены [436]. Здесь в отличие от фоковских состояний, получающихся действием на вакуум операторами рождения частиц, когерентные состояния образуются применением к вакуумному состоянию операто-

ров представления некоторой группы, алгебра Ли которой порождена операторами рождения и уничтожения.

В данном разделе приведены некоторые основные определения и результаты теории когерентных состояний, следуя [398, 401, 408, 409, 431—443]. Основное внимание уделяется связи теории когерентных состояний с динамическими симметриями [398].

Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ характеризуется комплексным числом $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, а его разложение по n-квантовым состояниям имеет вид, аналогичный (П2.58), т. е.

$$|\alpha\rangle = e^{(-1/2)|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \qquad (П2.223)$$

Если, например, гармонический осциллятор колеблется в состоянии с относительно точно определенной фазой, то ему должно соответствовать большое квантовое число n, которое в общем случае точно не определено ($\Delta n \Delta\varphi \geqslant 1/2$). Состояния с минимальной неопределенностью фазы рассмотрены в [444] и обсуждаются ниже. Когерентное состояние (П2.223) для $|\alpha\rangle$ описывает, как следует из приведенных примеров, нерасплывающийся волновой пакет для осциллятора; величина $|\alpha|$ задает амплитуду колебаний, а φ—фазу колебаний.

Необычным свойством этой системы является неортогональность когерентных состояний; система когерентных состояний является, кроме того, сверхполной (т. е. содержит больше состояний, чем это необходимо для разложения произвольного состояния) [398, 431, 432, 436]. При исследовании подобных систем применение стандартных методов часто оказывается недостаточным [398, 408, 409, 436].

Из приведенных примеров в п. П2.2 следует, что когерентные состояния обладают рядом замечательных свойств. Например, разлагая поле по этим состояниям, можно перейти к классическому пределу, оставаясь в квантовой области. Эта возможность связана, как было показано в примере 4 п. П2.2, с тем, что когерентные состояния минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга, т. е. они являются квантовыми состояниями, свойства которых максимально близки к классическим.

Особенно отчетливо особенности когерентных состояний проявляются при их описании на языке теории групп [398, 436, 437]. Отметим предварительно некоторые из этих особенностей. Допустим, что $T(g)$, $g \in G$ — операторы представления группы G; $|0\rangle$ — вакуумное состояние. Тогда согласно данному определению когерентное состояние можно определить как $|g\rangle = T(g)|0\rangle$. Применение когерентных состояний особенно удобно при описании динамики квантовых систем, когда гамильтониан является элементом алгебры Ли представления $T(g)$ (т. е. $H = T(h)$, h — элемент алгебры Ли группы G). В этом случае эволюция когерентного состояния записывается в виде $\exp\{-iHt\}|g\rangle = T(e^{-iht}g)|0\rangle$, где e^{-iht} $(-\infty < t < \infty)$—элементы однопараметрической подгруппы G_0. Таким образом, в этом случае закон умножения в группе G определяет динамику системы, а его определение сводится к построению орбиты подгруппы G_0 в группе G. Это особенно отчетливо видно при описании динамики квантованного осциллятора, рассмотренного в п. П2.2. Здесь динамика сводится к эволюции комплексного параметра $z = 1/\sqrt{2}\omega \cdot (\omega\hat{q} + i\hat{p})$ когерентного состояния по окружности (классическая траектория) по формуле $z(t) =$

$=z(0)e^{-i\omega t}$. Следовательно, согласно [437] можно разделить задачи динамики и квантования: описание эволюции квантованной системы сводится к описанию эволюции классической системы по определенной орбите в группе G; квантование сводится к построению определенного представления группы, где параметры классической системы отождествляются с определенными параметрами группы G.

Следует отметить, что система когерентных состояний была по существу введена и использована еще в 1926 г. Э. Шредингером для описания нерасплывающихся волновых пакетов осцилляторов, а понятие когерентного состояния в сформулированном виде (П2.223) было введено в 1963 г. К. Глаубером [431].

По определению [431] когерентное состояние $|\alpha\rangle$ обычно определяют как собственное состояние бозонного оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{П2.224}$$

Из (П2.224) следует, что при любом комплексном α такое состояние существует и его разложение по n-квантовым состояниям

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^n|0\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \tag{П2.225}$$

имеет вид (П2.223). Таким образом, действительно обычное когерентное состояние характеризуется комплексным числом α.

Пример 1. Рассмотрим связь когерентных состояний с группой Гейзенберга — Вейля. Операторы уничтожения a и рождения a^+, координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$ и единичный оператор I удовлетворяют перестановочным соотношениям Гейзенберга

$$[a, a^+] = I; \qquad [a^+, I] = [a, I] = 0; \qquad a^+ = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}; \tag{П2.226}$$

$$a = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}.$$

Соотношения (П2.226) образуют, как известно, алгебру Гейзенберга — Вейля или алгебру Ли W_1. Пусть t — вещественное, а α — комплексное число. Общий элемент алгебры Гейзенберга — Вейля имеет вид

$$tI + i(\bar{\alpha}a - \alpha a^+). \tag{П2.227}$$

Из (П2.227) следует, что операторы

$$T(t, \alpha) = e^{it}D(\alpha), \quad D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha}a} \tag{П2.228}$$

образуют группу. Если для двух операторов A и B выполняется условие

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \tag{П2.229}$$

то выполняются следующие тождества [408]:

$$e^A e^B = e^{(1/2)[A, B]} e^{A+B}, \tag{П2.230}$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{(-1/2)[A, B]} = e^B e^A e^{(1/2)[A, B]}. \tag{П2.231}$$

Соотношения (П2.230), (П2.231) являются частным случаем теоремы Бекера — Хаусдорфа из теории групп. Из (П2.228), (П2.230), (П2.231) следует

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})}D(\alpha+\beta). \tag{П2.232}$$

Таким образом, получили трехпараметрическую группу Ли W_1 — группу Гейзенберга — Вейля, впервые исследованную Вейлем [64].

Рассмотрим кратко метод построения системы когерентных состояний, связанной с полученной группой W_1. Допустим, что в гильбертовом пространстве выбран фиксированный вектор $|\psi_0\rangle$. Элемент g группы W_1 определяется действительным числом t и комплексным α: $g=(t, \alpha)$, а операторы $T(g)=T(t, \alpha)$ действуют в этом же пространстве и образуют унитарное неприводимое представление группы W_1. Действуя на вектор $|\psi_0\rangle$ операторами $T(g)$, получаем множество состояний $\{|\alpha\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|\psi_0\rangle, \qquad (\text{П2.233})$$

которое и определяет множество когерентных состояний. Если в качестве $|\psi_0\rangle$ выбрать вакуумный вектор $|0\rangle$, $a|0\rangle=0$, то из (П2.233) следует обычная система когерентных состояний. В связи с этим система состояний (П2.233) названа в [436] *обобщенными когерентными состояниями.*

Пример 2. Пусть $|\psi_0\rangle = |0\rangle$. Используя (П2.230), запишем оператор $D(\alpha)$ в нормальном виде:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a} = e^{-(1/2)|\alpha|^2} e^{\alpha a^+} e^{-\bar{\alpha} a}. \qquad (\text{П2.234})$$

Из (П2.234) и (П2.233) следует

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} e^{\alpha a^+}|0\rangle \qquad (\text{П2.235})$$

и получаем разложение типа (П2.58), (П2.233).

Преобразование операторов алгебры W_1 под действием группы W_1 приводит к следующим соотношениям:

$$T(t, \alpha) a T^+(t, \alpha) = D(\alpha) a D^+(\alpha) = a - \alpha I; \qquad (\text{П2.236})$$

$$T(t, \alpha) a^+ T^+(t, \alpha) = D(\alpha) a^+ D^+(\alpha) = a^+ - \bar{\alpha} I. \qquad (\text{П2.237})$$

Применяя соотношение (П2.236) к когерентному состоянию $|\alpha\rangle$, получим (П2.224). Следовательно, определение когерентных состояний с помощью (П2.224) и (П2.233) эквивалентны в данном случае.

В табл. П2.3 перечислены основные свойства [436] полученных когерентных состояний.

В более общем случае когерентные состояния могут быть определены на группе G в виде матричного элемента $T_0^0(gg_0^{-1})$ [437]:

$$|g_0\rangle = t(gg_0^{-1}) = T_0^0(gg_0^{-1}), \quad \langle g_0| = t(g_0 g^{-1}), \; g, g_0 \in G, \qquad (\text{П2.237})$$

где $T(G)$ — неприводимое унитарное, квадратично-интегрируемое представление группы G, а в качестве пространства представления выбраны линейные комбинации матричных элементов первой строки матриц $T_k{}^i(g)$, $i, k=0, 1, 2, \ldots$, представления $T(G)$. В (П2.237) элемент $g_0 \in G$ играет роль «номера» когерентного состояния, элемент $g \in G$ играет роль аргумента соответствующей функции на группе G [437].

Согласно [437], основные свойства введенных когерентных состояний по аналогии с табл. П2.3 могут быть выражены следующими соотношениями:

$$\int t(g_0 g^{-1})\, t(g g_1^{-1})\, dg = t(g_0 g_1^{-1}); \qquad \int t(g_0 g^{-1})\, \varphi(g)\, dg = \varphi(g_0), \qquad (\text{П2.238})$$

где $\varphi(g)=|g\rangle$ — функция линейных комбинаций элементов первой строки матрицы $T_k{}^i(g)$; dg — правоинвариантная мера Хаара; $\int dg = l$; l — размерность пространства представления (формальная размерность пространства представления [445]). Формулы (П2.238) являются следствием свойства орто-

Таблица П2.3

Основные математические соотношения	Характеристика когерентного состояния
$T(t,\alpha)\|\beta\rangle = e^{i\varphi}\|\beta+\alpha\rangle$, $\varphi = t + \mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})$	Оператор представления $T(g)=T(t,\alpha)$ переводит одно когерентное состояние в другое; система когерентных состояний полна
$\langle\alpha\|\beta\rangle = e^{i\varphi}\langle\psi_0\|D(\beta-\alpha)\|\psi_0\rangle$, $\varphi = \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta)$; $\varphi = 2A(0,\alpha,\beta)$; при $\|\psi_0\rangle = \|0\rangle$ (обычные КС) $\langle\alpha\|\beta\rangle = \exp[-\frac{1}{2}(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\alpha\bar{\beta})]$, $\|\langle\alpha\|\beta\rangle\|^2 = \exp(-\|\alpha-\beta\|^2)$	Система когерентных состояний неортогональна. Фаза φ равна удвоенной площади треугольника с вершинами $(0,\alpha,\beta)$
а) для обычных КС $\int\|\alpha\rangle\langle\alpha\|d\mu(\alpha) = \hat{I}$, $d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi}d^2\alpha$; б) для обобщенных КС $\hat{A} = \int d^2\alpha\|\alpha\rangle\langle\alpha\|$, $\hat{A} = c\hat{I}$, $c = \int\|\langle\alpha\|\beta\rangle\|^2 d^2\alpha = \int e^{-\|\alpha-\beta\|^2}d^2\alpha = \pi$	Разложение единицы
$\|\alpha\rangle \equiv \|p,q\rangle$; $\int\frac{dp\,dq}{2\pi\hbar}\|p,q\rangle\langle p,q\| = \hat{I}$	Разложение единицы в переменных (p,q)
а) для обобщенных КС $(\Delta p)_\alpha(\Delta q)_\alpha = (\Delta p_0)(\Delta q_0)$; б) для обычных КС $(\Delta p)_\alpha(\Delta q)_\alpha = \frac{\hbar}{2}$	Когерентные состояния обладают минимальной неопределенностью
$\|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha)\psi(\bar{\alpha})\|\alpha\rangle$, $\psi(\bar{\alpha}) = \langle\alpha\|\psi\rangle$; $\langle\psi_1\|\psi_2\rangle = \int\bar{\psi}_1(\bar{\alpha})\psi_2(\bar{\alpha})d\mu(\alpha)$	Разложение произвольного состояния $\|\psi\rangle$ по когерентным состояниям; $\psi(\bar{\alpha})$ – символ вектора $\|\psi\rangle$
$\psi(\bar{\alpha}) = e^{-(1/2)\|\alpha\|^2}\tilde{\psi}(\bar{\alpha})$; $\langle\psi_1\|\psi_2\rangle = \int\tilde{\bar{\psi}}_1(\bar{\alpha})\tilde{\psi}_2(\bar{\alpha})e^{-\|\alpha\|^2}d\mu(\alpha)$ при ортонормированном базисе $\|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^n\|0\rangle$, $\tilde{\psi}(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^n}{\sqrt{n!}}$	Представление Фока–Баргмана гильбертова пространства для простых когерентных состояний; $\tilde{\psi}(\bar{\alpha})$ – целая функция переменной $\bar{\alpha}$

гональности [445]

$$\int T_i^k(g^{-1})\,T_s^j(g)\,dg=\delta_s^k\delta_i^j;\qquad T_0^0(g_0g^{-1})=\sum_j T_j^0(g_0)\,T_0^j(g^{-1}).$$

Из (П2.238) следует

$$\int \langle g_0|g_1\rangle\langle g_1|\varphi\rangle\,dg_1=\langle g_0|\varphi\rangle. \tag{П2.239}$$

Таким образом, интегральный оператор с ядром $|g_1\rangle\langle g_1|$ играет роль единичного оператора, а формулу (П2.239) называют [437] *обобщенным соотношением полноты.*

Рассмотрим кратко применение введенных понятий к исследованию динамического поведения квантового осциллятора (см. ранее в примерах 3 и 4 п. П2.2)

Пример 3. Допустим, что, как и ранее, гамильтониан системы имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left[p^2+\frac{\omega^2q^2}{2}\right].$$

Аналогично имеем выражения для операторов рождения и уничтожения

$$a=(2\hbar)^{-1/2}(\lambda q+i\lambda^{-1}p);\qquad \lambda=\sqrt{m\omega};$$

$$a^+=(2\hbar)^{-1/2}(\lambda q-i\lambda^{-1}p);\qquad [a,a^+]=1;\qquad a|0\rangle=0.$$

Волновая функция в координатном q-представлении

$$\psi(x)=(m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp[-(\lambda x)^2/2\hbar]. \tag{П2.240}$$

В состоянии (П2.240) имеем минимальную согласно примеру 3 п. П2.2 неопределенность $\Delta p\Delta q=\hbar/2$. Согласно (П2.224) когерентное состояние определяется как собственное состояние оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle. \tag{П2.241}$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка (П2.241) дает явный вид нормированного когерентного состояния

$$|\alpha\rangle=\left(\frac{\lambda}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left\{-\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}q-\alpha\right)^2+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right\}. \tag{П2.242}$$

Состояние (П2.242) согласно правилу (П2.233) может быть получено из основного состояния (П2.240) с помощью оператора сдвига $D(\alpha)$:

$$D(\alpha)=\exp\{\alpha a^+-\alpha^*a\}. \tag{П2.243}$$

Оператор сдвига $D(\alpha)$ по (П2.243) унитарен и обладает свойствами [436]

$$D^+(\alpha)=D^{-1}(\alpha)=D(-\alpha);\qquad D(\alpha)=e^{-|\alpha|^2/2}\,e^{\alpha a^+}e^{-\alpha^*a}. \tag{П2.244}$$

Этот оператор, кроме того, сдвигает операторы a и a^+ на комплексные числа

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)=a+\alpha;\qquad D^{-1}(\alpha)a^+D(\alpha)=a^++a^*. \tag{П2.245}$$

Для операторов сдвига $D(\alpha)$ закон умножения принимает следующий вид:

$$D(\alpha)D(\beta)=D(\alpha+\beta)\exp\{1/2(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)\}. \tag{П2.246}$$

Из (П2.243) когерентное состояние α получается следующим образом:

$$|\alpha\rangle=D(\alpha)|0\rangle. \tag{П2.247}$$

Однако когерентное состояние $|\alpha\rangle$ можно найти в виде разложения по нормированным стационарным состояниям осциллятора (фоковским состояниям) $|n\rangle$, удовлетворяющим условию $a^+a\,|\,n\rangle = n\,|\,n\rangle$:

$$|\,\alpha\,\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|\,n\,\rangle. \qquad (П2.248)$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний (П2.242) имеет вид

$$\langle\,\beta\,|\,\alpha\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle\,\beta\,|\,x\,\rangle\langle\,x\,|\,\alpha\,\rangle = \exp\{-|\,\alpha\,|^2/2 - |\,\beta\,|^2/2 + \alpha\beta^*\}. \qquad (П2.249)$$

Таким образом, действительно получили, что когерентные свойства неортогональны (см. табл. П2.3, ...). Модуль скалярного произведения двух когерентных состояний равен (см. табл. П2.3, п. 2)

$$|\,\langle\,\beta\,|\,\alpha\,\rangle\,|^2 = \exp\{-|\,\alpha - \beta\,|^2\}. \qquad (П2.25)$$

Величина (П2.250) мала, если $|\alpha - \beta|^2 \gg 1$. Это означает, что комплексные числа лежат далеко друг от друга. Аналогично величина $d^2\alpha$ связана с элементом фазового объема

$$\pi^{-1}d^2\alpha \equiv \pi^{-1}d\,(\mathrm{Re}\,\alpha)\,d\,(\mathrm{Im}\,\alpha) = dpdx/2\pi\hbar. \qquad (П2.251)$$

Когерентные состояния образуют полную систему функций (см. табл. П2.3, п. 1)

$$\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int \langle\,\alpha\,|\,x\,\rangle\langle\,\alpha\,|\,x'\,\rangle\,d^2\alpha = \delta(x - x'). \qquad (П2.252)$$

При этом любое состояние $|f\,\rangle$ можно разложить согласно (П2.252) по когерентным состояниям (см. табл. П2.3, п. 6):

$$|\,f\,\rangle = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int |\,\alpha\,\rangle\langle\,\alpha\,|\,f\,\rangle\,d^2\alpha. \qquad (П2.253)$$

Однако когерентные состояния не являются линейно независимыми, т. е. одно когерентное состояние $|\alpha\,\rangle$ может быть выражено через другие состояния:

$$|\,\alpha\,\rangle = \pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int |\,\beta\,\rangle \exp\left\{\beta^*\alpha - \frac{|\,\alpha\,|^2}{2} - \frac{|\,\beta\,|^2}{2}\right\} d^2\beta. \qquad (П2.254)$$

Следовательно, когерентные состояния образуют переполненную систему функций и разложение по ним произвольного состояния не является однозначным [436].

В свою очередь любой оператор A может быть также разложен по когерентным состояниям

$$A = \pi^{-2}\int |\,\alpha\,\rangle\,\tilde{A}\,(\alpha^*, \beta)\,\langle\,\beta\,|\exp\left\{-\frac{|\,\alpha\,|^2}{2} - \frac{|\,\beta\,|^2}{2}\right\} d^2\alpha d^2\beta, \qquad (П2.255)$$

где $\tilde{A}\,(\alpha^*, \beta) = \langle\,\alpha\,|\,A\,|\,\beta\,\rangle$.

Аналогично можно ввести (кроме обычных когерентных состояний) четные и нечетные когерентные состояния [398].

Если рассматриваемый квантовый осциллятор (при $m=1$) находится под воздействием внешнего возмущения, то эволюция системы во времени определяется уравнением Шредингера (см. примеры 3 и 4 в п. П2.2)

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = (\mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1) | \psi(t) \rangle; \tag{П2.256}$$

$$\mathscr{H}_0 = \hbar\omega (a^+ a + 1/2), \quad \mathscr{H}_1 = -f(t) q = -f(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a + a^+). \tag{П2.257}$$

Слагаемое $\mathscr{H}_0$ в уравнении Шредингера (П2.257) можно исключить, переходя к представлению взаимодействия

$$| \psi(t) \rangle = e^{-(i/\hbar)\mathscr{H}_0(t)} | \tilde{\psi}(t) \rangle. \tag{П2.258}$$

В результате получим

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \tilde{\psi} \rangle = \tilde{\mathscr{H}}_1 | \tilde{\psi}(t) \rangle; \tag{П2.259}$$

$$\tilde{\mathscr{H}}_1(t) = e^{i\mathscr{H}_0 t/\hbar} \mathscr{H}_1 e^{-i\mathscr{H}_0 t/\hbar} = -f(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a e^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}). \tag{П2.260}$$

Уравнение (П2.259) можно преобразовать к более удобному виду

$$\frac{d}{dt} | \tilde{\psi}(t) \rangle = (\beta(t) a^+ - \bar{\beta}(t) a) | \tilde{\psi}(t) \rangle; \tag{П2.261}$$

$$\beta(t) = \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}} f(t) e^{i\omega t}. \tag{П2.262}$$

Гамильтониан $\tilde{\mathscr{H}}_1$ выражается линейно через операторы алгебры Ли W_1, а поэтому оператор эволюции $\tilde{S}(t)$: $| \tilde{\psi}(t) \rangle = \tilde{S}(t) | \tilde{\psi}(0) \rangle$ является оператором представления группы W_1, т. е.

$$S(t) = T(g(t)) = e^{-i\varphi(t)} D(\gamma(t)). \tag{П2.263}$$

Таким образом, из (П2.262) следует сразу, что если начальное состояние являлось когерентным, то оно останется когерентным в любой момент времени, т. е. с минимальной неопределенностью и инвариантно по отношению к внешнему возмущению. Следовательно, принцип инвариантности, отмеченный в примере 4 п. П2.2, является следствием наличия когерентного состояния системы.

Таким образом, существует решение $|\tilde{\psi}(t)|$ в виде

$$| \tilde{\psi}(t) \rangle = e^{-i\varphi(t)} | \alpha(t) \rangle. \tag{П2.264}$$

Дифференцирование соотношения (П2.264) по t с использованием уравнения (П2.261) приводит к следующему уравнению [436]:

$$\dot{\alpha} = \beta; \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \beta(t')\, dt'. \tag{П2.265}$$

При $\Delta t \to 0$ из (П2.261) получим

$$| \tilde{\psi}(t + \Delta t) \rangle = D(\beta(t)\, \Delta t) | \tilde{\psi}(t) \rangle. \tag{П2.266}$$

Подставив в (П2.266) уравнение (П2.264) и учитывая, что оператор представления $T(g)=T(t, \alpha)$ переводит одно когерентное состояние в другое (см. табл. П2.3, п. 1), получим в результате

$$\dot{\varphi} = \operatorname{Im}(\bar{\beta}\alpha) = \operatorname{Im}(\dot{\bar{\alpha}}\alpha). \tag{П2.267}$$

Уравнения (П2.265) являются классическими уравнениями движения для осциллятора под действием внешней силы. Из (П2.267) следует, что величина $\varphi(t)$ равна удвоенной площади, описываемой радиус-вектором при движении точки по фазовой плоскости, т. е.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\hbar}\int_{q_0}^{q_t} pdq \tag{П2.268}$$

и, следовательно, имеет простой квазиклассический смысл [436].

Таким образом, данный пример показывает, что состояние системы остается когерентным в любой момент времени t и инвариантно по отношению к внешнему возмущению. Классический вид уравнений (П2.265), (П2.266) показывает следующее: чтобы переход из одного состояния в другое квантовой системы был инвариантным по отношению к внешнему возмущению $f(t)$, необходимо иметь как минимум два канала: по управлению и возмущению. Следовательно, принцип двухканальности Петрова, полученный для классических систем, выполняется и для квантовых систем.

Аналогичный результат имеет место для нестационарных систем. Рассмотрим кратко отмеченные факты на примере нестационарного квантового осциллятора [398].

Пример 4. Рассмотрим нестационарную квантовую систему, описываемую гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{p^2}{2m_k} + \frac{1}{2}\, m_k\Omega_k^2(t)\, q_k^2\right], \tag{П2.269}$$

где $\Omega_k(t)$ — произвольные непрерывные функции времени. Пусть $m_k=1$. Волновое уравнение имеет вид

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[p_k^2 + \Omega_k^2(t)\, q_k^2\right]\right\}\psi = 0. \tag{П2.270}$$

Используем метод интегралов движения при построении когерентных состояний [398]. В этом случае операторы (интегралы движения) должны удовлетворять только условию, что полная производная во времени от них равна нулю, т. е. квантовомеханическое среднее от таких операторов не зависит от времени и эквивалентно коммутативности с оператором $i\partial/\partial t - \mathscr{H}$. Так, операторы

$$A_k(t) = i2^{-1/2}\left[\varepsilon_k(t)\, p_k - \dot{\varepsilon}_k(t)\, q_k\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{П2.271}$$

где функции $\varepsilon_k(t)$ — определенные решения уравнений

$$\ddot{\varepsilon}_k + \Omega_k^2(t)\,\varepsilon_k = 0; \qquad \varepsilon_k = |\varepsilon_k| \exp\left\{i\int_0^t \frac{d\tau}{|\varepsilon_k|^2}\right\}, \tag{П2.272}$$

коммутируют с оператором $i\partial/\partial t - \mathscr{H}$ и, следовательно, являются интегралами

движения. При этом имеют место следующие соотношения коммутации:

$$[A_k, A_l^+] = \delta_{kl}; \qquad [A_k, A_l] = [A_k^+, A_l^+] = 0. \tag{П2.273}$$

Уравнения (П2.272) эквивалентны уравнениям [398]

$$\frac{d^2}{dt^2} |\varepsilon_k| + \Omega_k^2(t) |\varepsilon_k| - \frac{1}{|\varepsilon_k|^3} = 0. \tag{П2.273'}$$

Когерентные состояния определяются свойствами операторов A_k, A_k^+, поэтому определим унитарный оператор

$$D(\alpha) = \prod_{k=1}^{N} \exp\{\alpha_k A_k^+ - \alpha_k^* A_k\}; \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \tag{П2.273''}$$

где α_k — произвольное комплексное число. Построим нормированное состояние

$$|0, t\rangle = \sum_{k=1}^{N} \pi^{-1/4} \varepsilon_k^{-1/2} \exp\left\{ i \frac{\dot{\varepsilon}_k(t)\, q_k^2}{2\varepsilon_k(t)} \right\}; \qquad A_k(0, t) = 0. \tag{П2.274}$$

Тогда, действуя на вакуумное состояние (П2.274) унитарным оператором сдвига (П2.273''), получим выражение для волновой функции когерентного состояния

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{k=1}^{N} \pi^{-1/4} \varepsilon_k^{-1/2} \exp\left\{ \frac{i\dot{\varepsilon}_k}{2\varepsilon_k} \left(q_k - i \frac{\sqrt{2}\alpha_k}{\dot{\varepsilon}_k} \right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_k^*}{\dot{\varepsilon}_k} \alpha_k^2 + |\alpha_k|^2 \right) \right\}. \tag{П2.275}$$

Само когерентное состояние определяется из соотношений вида

$$A_k |\alpha, t\rangle = \alpha_k |\alpha, t\rangle; \tag{П2.276}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \prod_{k=1}^{N} dx_k \pi^{-1/2} |\varepsilon_k|^{-1} \exp\left\{ \frac{i\dot{\varepsilon}_k}{2\varepsilon_k} \left(q_k - i \frac{\sqrt{2}\alpha_k}{\dot{\varepsilon}_k} \right)^2 - \right.$$
$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_k^*}{\dot{\varepsilon}_k} \alpha_k^2 + |\alpha_k|^2 \right) - \frac{i\dot{\varepsilon}_k^*}{2\varepsilon_k^*} \left(q_k + i \frac{\sqrt{2}\beta_k^*}{\dot{\varepsilon}_k^*} \right) -$$
$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_k}{\dot{\varepsilon}_k^*} \beta_k^{*2} + |\beta_k|^2 \right) \right\} = \prod_{k=1}^{N} \exp\left\{ \beta_k^* \alpha_k - \frac{1}{2} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \right\} \tag{П2.277}$$

и выполняется соответствующее соотношение полноты.

Когерентные состояния $|\alpha, t\rangle$ являются производящими функциями для собственных состояний самосопряженных операторов $I_k = A_k A_k^+$:

$$|\alpha, t\rangle = \exp\left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} \right\} \sum_{n_1, \ldots, n_N = 0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \ldots \alpha_N^{n_N}}{(n_1! \ldots n_N!)^{1/2}} |n, t\rangle. \tag{П2.278}$$

Сами функции $|n, t\rangle$ удовлетворяют условиям

$$I_k|n, t\rangle = n_k|n, t\rangle; \qquad \langle m, t|n, t\rangle = \delta_{mn}. \tag{П2.279}$$

В выражениях (П2.278), (П2.279) принято $|\alpha|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2$, $n = (n_1, \ldots, n_N)$.

Собственные состояния $|n, t\rangle$ строятся на основе линейных интегралов движения A_k в следующем виде:

$$|n, t\rangle = \prod_{k=1}^{N} |n_k, t\rangle = \prod_{k=1}^{N} \frac{(A_k^+)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0, t\rangle. \tag{П2.280}$$

Разложение в ряд когерентного состояния $|\alpha, t\rangle$ по переменным α_k:

$$|n, t\rangle = \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_k^*}{2\varepsilon_k}\right)^{n_k/2} (n_k!\, \varepsilon_k \pi^{1/2})^{-1/2} \exp\left(\frac{i\dot{\varepsilon}_k}{2\varepsilon_k} q_k^2\right) H_{n_k}\left(\frac{q_k}{|\varepsilon_k|}\right). \tag{П2.281}$$

Таким образом, когерентное состояние $|\alpha, t\rangle$ и собственные функции $|n, t\rangle$ оператора I_k для N-мерного нестационарного осциллятора получаются как произведение соответствующих состояний для одномерного осциллятора. Нетрудно заметить, что когерентные состояния одномерного нестационарного осциллятора являются решениями гауссовского вида, т. е. экспонентой от квадратичной формы. Следовательно, когерентные состояния для квантового нестационарного осциллятора описывают максимально классическое состояние в том же смысле, что и когерентные состояния стационарного гармонического квантового осциллятора. Следовательно, если начальное состояние нестационарного осциллятора было когерентным (с минимальной неопределенностью), то в процессе эволюции параметрические возмущения не разрушают этого состояния. Следовательно, когерентные состояния нестационарного квантового осциллятора также инвариантны к параметрическим возмущениям. Здесь также прослеживается аналогия с эффектом двукратной параметрической инвариантности динамических систем, открытый Б. Н. Петровым и В. Ю. Рутковским. Рассмотрим здесь этот аналог подробнее на примере одномерного квантового осциллятора. Применение нестационарного осциллятора к квантовым неразрушающим измерениям можно найти в [354].

Пример 5. Для одномерного нестационарного квантового осциллятора из (П2.269) имеем

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2(t)}{2} \hat{q}^2$$

и уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle.$$

Учитывая, что операторы координаты и импульса выражаются через бозонные операторы рождения и уничтожения, имеем

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{4}(1 - \omega^2(t))(a^2 + a^{+2}) + \frac{\hbar}{4}(\omega^2(t) + 1)(aa^+ + a^+a). \tag{П2.282}$$

Предварительно обсудим математический прием. Алгебра Ли группы SU (1,1)

может быть образована тремя генераторами K_1, K_2, K_0. Перестановочные соотношения для них имеют вид

$$[K_1, K_2] = -iK_0; \quad [K_2, K_0] = iK_1; \quad [K_0, K_1] = iK_2. \tag{П2.283}$$

Можно перейти к новым генераторам

$$K_\pm = K_1 \pm iK_2. \tag{П2.284}$$

Тогда перестановочные соотношения (П2.283) примут с учетом (П2.284) следующий вид:

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm; \quad [K_-, K_+] = 2K_0. \tag{П2.285}$$

Тогда оператор

$$\hat{C}_2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = K_0^2 - \frac{1}{2}[K_+K_- + K_-K_+] \tag{П2.286}$$

является инвариантным оператором и носит название *оператора Казимира*, т. е. оператор (П2.286) коммутирует со всеми операторами K_i. По теореме Шура такой оператор для неприводимого представления кратен единичному оператору

$$\hat{C}_2 = k(k-1)\hat{I}. \tag{П2.287}$$

В силу приведенных результатов гамильтониан (П2.282) можно записать теперь в виде

$$\mathscr{H}(t) = \hbar(AK_+ + \bar{A}K_- + BK_0); \tag{П2.288}$$

$$K_+ = \frac{1}{2}(a^+)^2; \quad K_- = \frac{1}{2}a^2; \quad K_0 = \frac{1}{4}(aa^+ + a^+a)$$

или

$$\mathscr{H}(t) = \hbar\Omega_0(t)K_0 - \hbar\Omega_1(t)K_1; \quad \Omega_0(t) = 1 + \omega^2(t); \quad \Omega_1 = 1 - \omega^2(t), \tag{П2.289}$$

где K_0, K_1 — генераторы представления дискретной группы серии SU (1,1), а ее индексы k из (П2.287) имеют вид $k=1/4$ и $k=3/4$.

Решение уравнения Шредингера

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\varphi(t)}|\zeta(t)\rangle; \quad |\zeta| < 1, \tag{П2.290}$$

где $|\zeta\rangle$ — когерентное состояние с $k=1/4$ или $k=3/4$. Подставляя (П2.290) в уравнение Шредингера, получим

$$\dot{\zeta} = A + \bar{A}\zeta^2 + B\zeta; \quad \dot{\varphi} = k(A\bar{\zeta} + \bar{A}\zeta + B). \tag{П2.291}$$

Таким образом, уравнения (П2.291) описывают движение классической системы (осциллятора) на фазовой плоскости. При этом плоскость ζ является в этом случае плоскостью Лобачевского [118] и представляет фазовую плоскость для данной системы. Квантовое когерентное состояние $|\zeta(t)\rangle$ сохраняет свойства когерентности в любой момент t (т. е. инвариантно по отношению к параметрическому возмущению) и при этом в точности следует классическому движению. Таким образом, для выполнения условий инвариантности квантовой динамической системы по отношению к внешним и параметрическим возмущениям необходимо применить принцип двукратной параметрической инвариантности [446]. Это возможно в силу того, что когерентные состояния позволяют

свести исследование динамического поведения квантовой системы к исследованию соответствующей классической системы, к которой этот принцип применим. Так как когерентные состояния — это состояния с минимальной неопределенностью, то управление по импульсу (по возмущению) или по координате (по отклонению) будет осуществляться для таких состояний с минимальной неопределенностью. Именно поэтому эффект инвариантности может быть достигнут на когерентных состояниях.

Для квантовых систем это подтверждается еще и тем, что любое состояние $|\psi(t)\rangle$ в силу указанных в табл. П2.3 свойств может быть разложено по когерентным состояниям.

Отсюда следует, что принцип инвариантности приобретает характер всеобщности и для квантовых систем. С этой точки зрения можно построить единую теорию моделей динамических систем. Кратко остановимся теперь на вопросе применения когерентных состояний в задачах оценки устойчивости квантовых систем [436]. Другие примеры оценки устойчивости и чувствительности квантовых динамических систем приведены в [447—449] с позиции теории случайных процессов и теории нелинейных динамических систем.

Пример 6. Допустим, что зависимость $\omega(t)$ является периодической от времени, т. е. $\omega(t+\tau)=\omega(t)$. В этом случае существует решение уравнения Шредингера с определенной квазиэнергией. По определению [450—452], *квазиэнергией* называется такая функция, для которой выполняется условие

$$\psi_k(t+T) = e^{-tF_kT}\psi_k(t). \qquad (\text{П2.292})$$

Если выделить гармонический множитель, то ее можно записать [450] в виде

$$\psi_k(t) = e^{-iF_kT}\varphi_k(t),$$

где $\varphi_k(t+T)=\varphi_k(t)$. Сама функция ψ_i может быть разложена в ряд Фурье

$$\psi_i = \sum_{n=-\infty,k=0}^{n=\infty,k=\infty} c_{ink}\varphi_k(x)\,e^{-i(F_k+n\omega)t}; \qquad \omega = 2\pi/T.$$

В [450—452] приведены уравнения для определения коэффициентов c_{ink} и квазиэнергии F_k. Таким образом, существуют состояния в решении уравнений Шредингера, для которых имеет место соотношение [436]

$$|\psi_\varepsilon(t+T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T}|\psi(t)\rangle. \qquad (\text{П2.293})$$

Проанализируем спектр квазиэнергии. Для этого рассмотрим оператор эволюции системы $U(t,t_0)$: $U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle=|\psi(t)\rangle$. С его помощью можно образовать унитарный оператор

$$S(t_0)=U(t_0+T,t_0). \qquad (\text{П2.294})$$

В силу свойства унитарности оператор (П2.294) можно представить в виде

$$S = e^{-\frac{i}{\hbar}T\widetilde{H}}, \qquad (\text{П2.295})$$

где $\widetilde{H}$ — эрмитов оператор. Спектр оператора (П2.295) совпадает со спектром квазиэнергии [436]. Оператор S — оператор конечного преобразования, а эрмитов оператор $\widetilde{H}$ принадлежит представлению алгебры Ли той же группы. Сле-

довательно, оператор $\widetilde{H}$ можно представить в следующем виде [436]:

$$\widetilde{H} = \hbar(\Omega_0 K_0 - \Omega_1 K_1 - \Omega_2 K_2). \qquad (П2.296)$$

Таким образом, в зависимости от вида вектора $\Omega = (\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)$ могут осуществляться различные случаи динамического поведения квантовой системы и аналогичной ей классической системы. В (П2.296) сохранены обозначения предыдущего примера 5. Допустим, что

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 > 0, \ \Omega_0 > 0. \qquad (П2.297)$$

Оператор $\widetilde{H}$ с помощью унитарного преобразования $\widetilde{H} \to \widetilde{H}' = U\widetilde{H}U^+$ можно представить в виде

$$\widetilde{H}' = \hbar\Omega K_0. \qquad (П2.298)$$

В уравнении (П2.298) спектр квазиэнергии дискретен, ограничен снизу и имеет вид

$$\varepsilon_n = \hbar\Omega\,(k + n). \qquad (П2.299)$$

В этом случае состояние такого гамильтониана является когерентным состоянием. Если в (П2.297) выполняется условие $\Omega^2 > 0$, но $\Omega_0 < 0$, то имеем $\widetilde{H}' = -\hbar\Omega K_0$; спектр квазиэнергии в этом случае также дискретен, но ограничен уже сверху [436]:

$$\varepsilon_n = -\hbar\Omega\,(k + n), \qquad (П2.300)$$

а состояние такого гамильтониана также является когерентным состоянием.

Пусть теперь $\Omega^2 = -\lambda^2 < 0$. Тогда оператор $\widetilde{H}$ можно привести к виду

$$\widetilde{H}' = -\hbar\lambda K_1. \qquad (П2.301)$$

В этом случае спектр квазиэнергии непрерывен и заполняет всю ось $-\infty < \varepsilon < +\infty$. В классическом случае это соответствует неустойчивому движению.

Рассмотрим еще несколько практически интересных случаев. Если $\Omega^2 = 0$, $\Omega_0 > 0$, то

$$\widetilde{H}' = \hbar\Omega_0\,(K_0 - K_1). \qquad (П2.302)$$

Здесь спектр квазиэнергии непрерывен и заполняет полуось $0 < \varepsilon < \infty$. Если $\Omega^2 = 0$, $\Omega_0 < 0$, то

$$\widetilde{H}' = -\hbar\Omega_0\,(K_0 - K_1). \qquad (П2.303)$$

Здесь (П2.303) отличается от (П2.302) знаком и, следовательно, спектр квазиэнергии также непрерывен, но заполняет ось $-\infty < \varepsilon < 0$. Рассмотренные случаи (П2.302), (П2.303) отвечают границам зоны неустойчивости для классического осциллятора [436].

Рассмотренные динамические системы допускают термодинамический анализ устойчивости [38, 39].

Следует отметить, что в интересных частных случаях — свободное движение ($H = 1/2\ p^2$), перевернутый маятник ($H = 1/2\ (p^2 - q^2)$), рассмотренный в классической постановке П. С. Капицей и В. А. Челомеем,— спектр гамильтониана также не дискретен. Тем не менее в этих задачах существуют и вакуумные, и когерентные состояния.

Так, например, в случае перевернутого маятника можно получить эффект Капицы — Челомея [453, 454]. В классическом случае [453, 454] для неустойчивого перевернутого маятника П. С. Капица [453], а затем В. А. Челомей [454] показали, что подбором соответствующих параметрических возмущений $\omega(t)$ можно перевести маятник из неустойчивого состояния в устойчивое. В случае соответствующего квантового осциллятора, применяя изложенный метод, нетрудно показать, что такой эффект достигается за счет принципа двукратной инвариантности: выбирая когерентным начальное состояние (управление по возмущению) такого осциллятора, получим все эволюционные состояния когерентными в силу полученных результатов в примерах 2, 3, что является первым каналом управления по внешнему возмущению; вторым каналом управления является параметрическое возмущение, по отношению к которому, как было показано в примерах 4 и 5, когерентное состояние также является инвариантным. Выписывая классические уравнения движения такого осциллятора, получаем условия Капицы — Челомея. Таким образом, получили аналог классического осциллятора Капицы — Челомея с эффектом двукратной параметрической инвариантности. Примеры подобного рода имеют особое значение в задачах управления квантовыми релятивистскими системами, в которых необходимо осуществлять управление неустойчивыми состояниями типа удержания плазмы и др.

Отметим теперь некоторые особенности построения когерентных состояний для квантовых релятивистских систем [438, 441].

Пример 7. В рамках квазипотенциального подхода [438] рассмотрим две одномерные модели релятивистского осциллятора в квантовой теории поля. Предварительно дадим основные определения и постановку задачи, а затем приведем основные результаты и выводы.

Для волновой функции одномерное квазипотенциальное уравнение в p-представлении (см. пример 3, п. П2.2) в случае равных масс можно записать в следующем виде:

$$(E_p - E_q)\,\psi_q(p) = \frac{1}{2\pi}\int \widetilde{V}(p, k; E_q)\,\psi_q(k)\,d\Omega_k. \qquad (\text{П2.304})$$

В (П2.304) введены следующие обозначения: $d\Omega_k = dk/\sqrt{1+k^2/m^2c^2}$ — инвариантный элемент интегрирования в p-представлении; $E_q = c\sqrt{m^2c^2+q^2}$; $\widetilde{V}(\bullet)$ — квазипотенциал, вид которого определяется для каждой конкретной задачи.

С помощью разложения по матричным элементам представлений группы движений Лобачевского [118] в виде [438]

$$\xi(p, x) = \left(\frac{E_p - mc}{mc^2}\right)^{-\frac{i}{\hbar}mcx} \equiv e^{i\frac{mc}{\hbar}x\chi},$$

$E_p = mc^2\mathrm{ch}\chi$; $p = mc\mathrm{sh}\chi$; $\chi = \ln[(E_p+pc)/mc^2]$ — *быстрота* [107, 455], динамическая переменная, канонически-сопряженная релятивистскому относительному расстоянию, осуществляется переход к релятивистскому конфигурационному x-представлению

$$\psi_q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\Omega_p \xi(p, x)\,\psi_q(p). \qquad (\text{П2.305})$$

Для локального квазипотенциала $\widetilde{V}=V[(p-k)^2;\ E_q]$ можно записать следующее уравнение [438, 455]:

$$[H_0(x)+V(x)-E_q]\psi_q(x)=0, \qquad (\text{П2.306})$$

где свободный гамильтониан $H_0(x)=mc^2\mathrm{ch}\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dx}\right)$ и функция $\xi(p,\ x)$ являются собственной функцией $H_0(x)$, т. е. $H_0(x)\xi(p,\ x)=E_p\xi(p,\ x)$. При этом оператор импульса свободной частицы $\hat{p}_x=-mc\,\mathrm{sh}\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dx}\right)$ и H_0 удовлетворяют соотношениям коммутации с релятивистской координатой x следующего вида [438]:

$$[x,\hat{p}_x]=\frac{i\hbar}{mc^2}H_0(x); \qquad [x,H_0(x)]=\frac{i\hbar}{x}\hat{p}_x. \qquad (\text{П2.307})$$

Следуя [438], рассмотрим два случая: 1) потенциал взаимодействия $V(x)$ в (П2.306) имеет вид

$$V(x)=\frac{m\omega^2}{2}x^{(2)}\exp\left\{\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dx}\right\},\ x^{(2)}=x\left(x+\frac{i\hbar}{mc}\right); \qquad (\text{П2.308})$$

2) квазипотенциал $\widetilde{V}$ является дифференциальным оператором, зависящим от быстроты $k_p=2mc\,\mathrm{sh}(\chi_p/2)$, и имеет вид

$$V(k_p)=-\frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dk_p^2}=-\frac{\hbar^2\omega^2}{2mc^2}\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\chi_p/2)}\left(\frac{d^2}{d\chi_p^2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{\chi_p}{2}\,\frac{d}{d\chi_p}\right), \qquad (\text{П2.309})$$

где величина k_p при $c\to\infty$ совпадает с нерелятивистским импульсом, а энергия движения $\mathscr{E}_p=E_p-mc^2$ имеет в терминах k_p нерелятивистский вид $\mathscr{E}_p=k_p^2/2m$.

В первом случае (П2.308) для оператора релятивистской координаты x имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[x,H(x)]=\frac{i\hbar}{m}\left(\hat{p}_x-\frac{1}{c}V(x)\right); \qquad \left[x,\hat{p}_x-\frac{1}{c}V(x)\right]=\frac{i\hbar}{mc^2}H(x);$$
$$[[x,H(x)],H(x)]=\hbar^2\omega^2x. \qquad (\text{П2.310})$$

В (П2.310) в соответствии с (П2.307) имеем $H(x)=\hat{p}_x-\frac{1}{c}V(x)$, который, согласно [438], назван оператором обобщенного импульса; в (П2.310) двойной коммутатор совпадает с рассмотренным в примере 3, п. П2.2, уравнением движения нерелятивистского осциллятора в представлении Шредингера $V(x)\to m\omega^2x^2/2$.

Уравнение (П2.306) для (П2.308) принимает в p-представлении следующий вид [438]:

$$\left[\mathrm{ch}\,\chi-\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2e^{-\chi}\left(\frac{d^2}{d\chi^2}-\frac{d}{d\chi}\right)-\mathrm{ch}\,\chi\right]\psi_q(x)=0,$$

которое заменой переменной $\zeta=[2mc^2/\hbar\omega]e^{\chi}(0\leqslant\zeta<\infty)$ сводится к уравнению

Уиттекера

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2}-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{\zeta}+\frac{1/4-\mu^2}{\zeta^2}\right]\psi_q(\zeta)=0, \qquad (П2.311)$$

где параметры $\lambda=\dfrac{mc^2}{\hbar\omega}\operatorname{ch}\chi$; $\mu=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}$.

Уравнение (П2.311) дальнейшей заменой переменной $\tau=\sqrt{\zeta}$ переписывается в виде

$$\left[\tau^2-\frac{d^2}{d\tau^2}+\frac{g}{\tau^2}\right]U_q(\tau)=4\lambda U_q(\tau). \qquad (П2.312)$$

В (П2.312) сделана замена переменных $\psi_q(\zeta)=\sqrt{\tau}U_q(\tau)$, $g=4\mu^2-1/4=3/4+4(mc^2/\hbar\omega)^2$. В этом случае исследование (П2.312) возможно методом решения уравнения для сингулярного квантового осциллятора [398]. Вводятся операторы рождения и уничтожения

$$a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau-\frac{d}{d\tau}\right); \qquad a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tau+\frac{d}{d\tau}\right), \qquad (П2.313)$$

которые действуют на функцию $U_q(\tau)$ и $[a, a^+]=1$. Если ввести величину

$$H(\tau)=H^0(\tau)+\frac{\hbar\omega g}{4\tau^2}=\frac{\hbar\omega}{2}\left\{a^+a+\frac{1}{2}+\frac{g}{2\tau^2}\right\}, \qquad (П2.314)$$

то, используя $[a, a^+]=1$, можно показать справедливость следующих соотношений:

$$[A, H]=\hbar\omega A; \qquad [A^+, H]=-\hbar\omega A^+; \qquad [A, A^+]=\frac{1}{mc^2}H; \qquad (П2.315)$$

$$A(\tau)=\frac{i}{2\Lambda}\left(a^2-\frac{g}{2\tau^2}\right); \qquad A^+(\tau)=-\frac{i}{2\Lambda}\left\{(a^+)^2-\frac{g}{2\tau^2}\right\};$$

$$\Lambda=\sqrt{\frac{2mc^2}{\hbar\omega}};$$

$$[a^n, H^0(\tau)]=\frac{\hbar\omega}{2}na^n; \qquad [(a^+)^n, H^0(\tau)]=-\frac{\hbar\omega}{2}n(a^+)^n.$$

Операторы $A(\tau)$ и $A^+(\tau)$ являются интегралами движения (инвариантами) для $H(\tau)$ по (П2.314). Когерентное состояние $|\gamma\rangle$ для релятивистского квантового осциллятора с потенциалом (П2.308) определяется из соотношения типа (П2.224)

$$A|\gamma\rangle=\gamma|\gamma\rangle$$

и имеет вид

$$|\gamma\rangle=c\sqrt{\frac{mc}{\hbar}}N_\gamma\left(-\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\right)^{\mu/2}\exp\left(i\Lambda\gamma-\frac{\zeta}{2}\right)\sqrt{\zeta}J_{2\mu}(2\sqrt{i\Lambda\zeta}), \qquad (П2.316)$$

где $N_\gamma=\{I_{2\mu}(2\Lambda|\gamma|)\}^{-1/2}$. Операторы A и A^+ в x-представлении имеют вид

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x+\frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}H(x)\right\}, \qquad (П2.317)$$

$$A^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}H(x)\right\}.$$

Из (П2.317), (П2.316) и (П2.305) следует после соответствующих преобразований [438] x-представление собственных функций $|\gamma\rangle$ оператора A в виде

$$|\gamma\rangle_x = \sqrt{\frac{mc}{\pi\hbar}}\,\frac{(2\Lambda|\gamma|)^n}{\Gamma(2\mu+1)}\,e^{-i\Lambda|\gamma|}2^{i\tilde{x}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tilde{x}\right)\times$$
$$\times\,\Phi\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tilde{x},\ 2\mu+1;\ 2i\Lambda\gamma\right), \qquad (П2.318)$$

где $\Phi(a, b; \zeta)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; $\tilde{x} = (mc/\hbar)x$ — безразмерная величина, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$; $(\mathrm{Re}z>0)$ — гамма-функции.

Операторы A и A^+ при $c\to\infty$ переходят в соответствующие операторы для нерелятивистского осциллятора, а состояния $|\gamma\rangle$ в этом случае совпадают с когерентными состояниями для нерелятивистского линейного осциллятора типа, рассмотренного в примере 3, п. П2.2 [438].

С помощью операторов A и A^+ можно построить соответствующую динамическую группу симметрии рассматриваемого релятивистского осциллятора (П2.306). Для этого вводятся [438] операторы

$$M_+ = \Lambda A^+; \qquad M_- = -\Lambda A^+; \qquad M_3 = H/\hbar\omega, \qquad (П2.319)$$

которые согласно (П2.315) образуют алгебру Ли

$$[M_+, M_-] = 2M_3; \qquad [M_3, M_\pm] = \pm M_\pm. \qquad (П2.320)$$

Из (П2.320) следует, что операторы $M_\pm$, M_3 являются генераторами группы SU (1,1) и оператор Казимира

$$M^2 = M_3^2 + {}^1/_2\,(M_+M_- + M_-M_+) \qquad (П2.321)$$

кратен единичному

$$M^2 = (mc^2/\hbar\omega)\,I = (\mu^2 - {}^1/_4)\,I \qquad (П2.322)$$

как в x-, так и p-представлениях [438].

Для оператора $H=\hbar\omega M_3$ можно получить соответствующий спектр и, так же как и для нерелятивистского осциллятора, динамической группой симметрии релятивистского линейного осциллятора является группа SU(1,1).

Для рассматриваемого случая собственные значения оператора $M_3 = H/\hbar\omega$ равны $-s_1+n = (\mu+{}^1/_2)+n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ и ограничены только снизу.

Во втором случае (П2.309) для линейного осциллятора постулируется следующее уравнение в p-представлении [438]:

$$\left(\frac{k_p^2}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dk_p^2} - \frac{k_q^2}{2m}\right)\psi_q(k_p) = 0, \qquad (П2.323)$$

решения которого выражаются через полиномы Эрмита в виде

$$\psi_n(k_p) = \frac{c_0}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left[-\frac{k_p^2}{2m\hbar\omega}\right] H_n\left(\frac{k_p}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right), \qquad \text{(П2.324)}$$

$$\mathscr{E}_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad (n=0,1,2,\ldots); \qquad c_0 = \left(\frac{\hbar}{\pi m\omega}\right)^{1/4}.$$

Функции (П2.324) удовлетворяют условиям ортогональности и полноты.

Квазипотенциал (П2.309), уравнение (П2.323) и решение (П2.324) переходят в нерелятивистском пределе соответственно в потенциал, уравнение Шредингера и его решение для нерелятивистского линейного осциллятора [438].

Для определения когерентных состояний вводятся операторы рождения и уничтожения

$$a = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\frac{k_p}{m\hbar\omega} + \frac{d}{dk_p}\right); \qquad a^+ = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\frac{k_p}{m\hbar'\omega} - \frac{d}{dk_p}\right);$$

$$[a, a^+] = 1. \qquad \text{(П2.325)}$$

Соотношения (П2.325) в терминах быстроты χ имеют следующий вид:

$$a = \Lambda \operatorname{sh}\frac{\chi}{2} + \frac{1}{\Lambda \operatorname{ch}(\chi/2)}\frac{d}{d\chi}; \qquad a^+ = \Lambda \operatorname{sh}\frac{\chi}{2} - \frac{1}{\Lambda \operatorname{ch}(\chi/2)}\frac{d}{d\chi}. \qquad \text{(П2.326)}$$

При $c\to\infty$ соотношения (П2.325), (П2.326) переходят в операторы рождения и уничтожения линейного нерелятивистского осциллятора.

Когерентные состояния для рассматриваемого случая строятся стандартным путем как собственные функции оператора a, т. е. $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, где α — произвольное комплексное число. Используя оператор Вейля $D(\alpha) = \exp\{\alpha a^+ - \alpha^* a\}$ в p-представлении, получим

$$\langle k_p|\alpha\rangle \equiv \psi(\chi;\alpha) = c_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + |\alpha|^2) - \frac{k_p^2}{2m\hbar\omega} + \alpha\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\,k_p\right\} \qquad \text{(П2.327)}$$

и в x-представлении

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi(x;\alpha) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha^2 + |\alpha|^2) - 2\alpha\Lambda \operatorname{sh}\frac{i}{2}\frac{d}{d\tilde{x}}\right\}\psi_0(x). \qquad \text{(П2.328)}$$

Если подействовать конечно-разностным оператором $\operatorname{sh}(id/2d\tilde{x})$ в (П2.328), то получим

$$\psi(x;\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_0 mc \exp\left\{\frac{1}{2}(\Lambda^2 - \alpha^2 - |\alpha|^2)\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha\Lambda)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \times$$

$$\times (-1)^n c_n^k K_{i\tilde{x}+K-n/2}\left(\frac{\Lambda^2}{2}\right), \qquad \text{(П2.329)}$$

где $K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\operatorname{ch} t + \nu t}\,dt$ — функция Макдональда. Когерентные состояния (П2.327), (П2.328) неортогональны и образуют переполненную систему функций. При $c\to\infty$ функции (П2.327), (П2.328) переходят соответственно в p- и x-пред-

ставлениях в когерентные состояния нерелятивистского линейного осциллятора [438]

$$\lim_{c\to\infty}\psi(\chi;\alpha)=\tilde{\psi}(p;\tilde{\alpha})=\frac{1}{(\pi m\hbar\omega)^{1/4}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2+|\tilde{\alpha}|^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{p^2}{2m\hbar\omega}+\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\tilde{\alpha}_p\right\}; \qquad (П2.330)$$

$$\lim_{c\to\infty}\psi(x;\alpha)=\tilde{\psi}(x;\tilde{\alpha})=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/4}\exp\left\{\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2-|\tilde{\alpha}|^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\tilde{\alpha}x\right\};$$

$$\tilde{\alpha}=\lim_{c\to\infty}\alpha=\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}-i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x.$$

Для осциллятора (П2.323) динамической группой симметрии также является группа SU (1,1). Полный гамильтониан

$$H=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}+mc^2/\hbar\omega\right), \qquad (П2.331)$$

а операторы a, a^+ определяются по (П2.325). Соответствующие операторы $M_\pm$, M_3, удовлетворяющие (П2.321), выражаются через операторы a, a^+ в виде $M_+=1/2(a^+)^2$; $M_-=-1/2a^2$; $M_3=1/2(a^+a+1/2)=(H-mc^2)/2\hbar\omega$. Инвариантный оператор Казимира $M^2=s(s+1)=-3/16$.

Для собственных значений оператора M_3, ограниченных снизу, имеем два представления: 1) $-s_1+n=1/4+n$; $H=mc^2+\hbar\omega(2n+1/2)$; 2) $-s_2+n=3/4+n$; $H=mc^2+\hbar\omega(2n+1+1/2)$.

В заключение рассмотрим уравнение для релятивистского гармонического осциллятора [455]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dr^2}+m\frac{\omega^2}{4}r^2-mc^2\chi_q^2\right)\varphi_{q_0}(r)=0.$$

Вводя обозначения операторов

$$\hat{q}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}r; \qquad \hat{\pi}=-i\frac{\partial}{\partial\hat{q}}=c\sqrt{\frac{2m}{\hbar\omega}}\hat{\chi}=-i\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dr};$$

$$[\hat{\pi},\hat{q}]=-i$$

и операторы рождения и уничтожения

$$a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(q-i\pi); \qquad a=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+i\pi); \qquad [a^+,a]=1,$$

для исходного уравнения получим эквивалентную запись

$$\hat{\varkappa}^2\varphi_{q_0}=\frac{1}{2}(\hat{\pi}^2+\hat{q}^2)\varphi_{q_0}=\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)\chi_q^2\varphi_{q_0}=\hat{\varkappa}_q^2\varphi_{q_0}; \qquad \hat{\varkappa}^2=aa^+-1/2.$$

Все возбужденные состояния осциллятора могут быть получены из исходного состояния $\hat{\varkappa}^2\varphi_0^{(0)}=(\varkappa_q^{(0)})^2\varphi_0^{(0)}$; $a\varphi_0^{(0)}=0$ путем n-кратного действия оператора

рождения a^+, т. е.

$$\varphi_0^{(n)}(q) = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\ \varphi_0^{(0)}(q) = \frac{q\exp(-q^2/2)}{2\sqrt{2n!/\pi}\Gamma(n+3/2)}\ \Phi\left(-n, \frac{3}{2}, q^2\right).$$

Энергетический спектр

$$\mathscr{E}_n = 2mc^2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\hbar\omega}{mc^2}\left(2n+\frac{3}{2}\right)}\right)$$

переходит при $c\to\infty$ в спектр состояний нерелятивистского изотропного осциллятора

$$\mathscr{E}_n - 2mc^2 \to \hbar\omega\,(2n+3/2).$$

При этом произведение средних квадратичных отклонений релятивистского относительного расстояния σ_r^2 и быстроты σ_χ^2 в основном состоянии

$$\sigma_r^2\sigma_\chi^2 = 3/4\ \frac{\hbar^2}{mc^2},$$

т. е. имеем минимальное соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Пример 8. В данном примере, следуя [441], приведем конкретный вид когерентных состояний для уравнения ФКГ и уравнения Дирака, рассмотренных в п. П2.3 и П2.5.

Если ввести координаты нулевой плоскости u^μ ($\mu=0, 1, 2, 3$) через координаты пространства — времени Минковского x^μ в виде

$$u^0 = (x^0 - x^3)/\sqrt{2};\qquad u^1 = x^1;\qquad u^2 = x^2;\qquad u^3 = (x^0+x^3)/\sqrt{2},\tag{П2.332}$$

то уравнение ФКГ можно записать в терминах координат (П2.332) в виде

$$i\hbar\partial_0\psi = H_1\psi;\qquad H_1 = \frac{e}{c}A_0 + \frac{1}{2}\mathscr{P}_3^{-1}\left(\mathscr{P}_1^2 + \mathscr{P}_2^2 + m^2c^2 + i\frac{e\hbar}{c}F_{03}\right);\tag{П2.333}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha;\qquad \mathscr{P}_\alpha = i\hbar\partial_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha;\qquad \partial_\alpha = \partial/\partial u^\alpha.$$

Поскольку уравнение (П2.333) является уравнением первого порядка по переменной u^0, то для него можно ввести оператор эволюции $U(u^0, u'^0)$, а с его помощью построить интегралы движения, т. е. операторы вида

$$I(u^0) = U(u^0, 0)\,I\,U^{-1}(u^0, 0).\tag{П2.334}$$

Для построения когерентных состояний в качестве (П2.334) необходимо взять операторы уничтожения вида $a_n = \alpha(\partial_n + \gamma u^n)$, где α, γ — размерные постоянные, т. е. интегралы движения в этом случае — операторы $a(u^0)$.

В качестве потенциалов внешнего электромагнитного поля можно выбрать потенциалы достаточно общего вида [441]

$$A_0 = 0;\qquad A_1 = \frac{c\hbar}{e}f_1(u^0) + \frac{H}{2}u^0;$$

$$A_2 = -\frac{c\hbar}{e}f_2(u^0) - \frac{H}{2}u^0,\qquad A_3 = \frac{c\hbar}{e}f_0(u^0).\tag{П2.335}$$

В (П2.335) функции $f_i(u^0)$ ($i=1, 2, 3$) — произвольные функции от «времени»

u^0 и составляют комбинацию произвольных электрических и постоянных магнитных H составляющих, направленных вдоль оси $x^3=z$ и поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси z. При $f_0=0$ имеем так называемую конфигурацию Редмонда. Уравнение (П2.333) имеет в качестве интеграла движения для (П2.335) оператор $i\partial_3$. Тогда решение (П2.333) будет собственной функцией ψ этого оператора

$$i\partial_3\psi = k_3\psi; \qquad \psi = \exp\{-ik_3u^3\}\,\varphi(u^0, u^1, u^2). \tag{П2.336}$$

Если ввести бозевские операторы рождения и уничтожения вида

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\left[\partial_1 + \frac{\gamma}{2}u^1 + i\varepsilon\left(\partial_2 + \frac{\gamma}{2}u^2\right)\right];$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\left[\partial_1 + \frac{\gamma}{2}u^1 - i\varepsilon\left(\partial_2 + \frac{\gamma}{2}u^2\right)\right], \tag{П2.337}$$

принять их в качестве начальных операторов для операторов уничтожения — интегралов движения $A(t)$, $B(t)$ по (П2.334) вида

$$A(t) = \exp\{i\gamma t\} + \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\,Q(t); \qquad B(t) = b; \tag{П2.338}$$

$$Q(t) = \int_0^t d\tau e^{i\gamma\tau}\,[i\varepsilon f_2(\tau) - f_1(\tau)]; \qquad t = t(u^0) = \int q\,du^0; \qquad q = (k_3 - f_0)^{-1}$$

и потребовать, чтобы функция ψ была собственной для операторов (П2.338) с собственными значениями $\alpha/\sqrt{2\gamma}$ и $\beta/\sqrt{2\gamma}$ соответственно, т. е. $A(t)\,\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma}}\,\psi$, $B(t)\,\psi = \frac{\beta}{\sqrt{2\gamma}}\,\psi$, то в результате получим когерентное состояние по переменным u^1, u^2 — волновую функцию вида [441]

$$\psi(u^0, u^1, u^2, u^3) = N\sqrt{q}e^D, \tag{П2.339}$$

где

$$D = \frac{1}{2}\gamma^{-1}\alpha\beta\{1 - \exp(-i\gamma t)\} - \frac{i}{2}(\gamma + k_0^2)\,t - \gamma\,[(u^1)^2 + (u^2)^2] - iK_3u^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\mu u^1 - i\varepsilon\nu u^2) + 2\beta Q(t)\exp(-i\gamma t) + 2\alpha Q^*(t) - 2\gamma\int QQ^*dt -$$

$$- 2i\int (f_1^2 + f_2^2)\,dt; \qquad \nu = \mu - 2\beta; \qquad \mu = (\alpha - \gamma Q)\exp(-i\gamma t) + \beta;$$

$$N = \left[\frac{8\pi}{\gamma}\hbar\exp\left\{\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\alpha\beta)}{2\gamma}\right\}\right]^{1/2}; \quad \gamma = \frac{|e|H}{mc}; \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} e.$$

С помощью (П2.339) можно вычислить средние значения координат u^1, u^2 в виде

$$\langle u^1\rangle + i\varepsilon\langle u^2\rangle = \frac{1}{\gamma}\,(\alpha - \gamma Q(t))\,e^{-i\gamma t} + \beta^*. \tag{П2.340}$$

Уравнения (П2.340) совпадают с решением классических уравнений движения.

В частном случае при $f_i=0$ получим волновую функцию (когерентное состояние) в однородном магнитном поле; здесь $|\alpha|=\gamma R$ и R — радиус классической траектории, $\arg\alpha$ определяет начальную фазу, а $\mathrm{Re}\beta$, $\mathrm{Im}\beta$ задают центр окружности, которая и определяет классическую траекторию. В свою очередь, функции (П2.339) сохраняют минимальным соотношение неопределенностей Гейзенберга для координат u^1, u^2 и импульсов $\hat{p}_{u^1}=-i\hbar\partial_{u^1}$, $\hat{p}_{u^2}=-i\hbar\partial_{u^2}$ по всем u^0. Согласно [441], решения уравнения Дирака ψ_1 в рассматриваемом поле (П2.335) можно выразить через соответствующие решения уравнения ФКГ (П2.333) в виде

$$\psi_1={}^1/_2\gamma^3\gamma^0\psi, \qquad \text{(П2.341)}$$

где γ^3, γ^0 — соответствующие матрицы Дирака [44].

В явном виде решение (П2.341) записывается следующим образом:

$$\psi_1=N_0q\begin{pmatrix}k_0+\sqrt{2}q^{-1}-\sigma_3(\sigma F)\\(k_0-\sqrt{2}q^{-1})\sigma_3-(\sigma F)\end{pmatrix}\exp\left\{i\frac{\varepsilon\gamma}{2}\sigma_3 t+D\right\}v; \qquad \text{(П2.342)}$$

$$N_0=\left[\frac{\hbar k_3}{2(v^+v)}\right]^{1/2}N; \qquad F=e_1[i\mu-\varepsilon\gamma(u^2+iu^1\varepsilon)-f_1]+$$
$$+e_2[\varepsilon\nu-i\gamma(u^2+i\varepsilon u^1)+f_2].$$

В (П2.342) обозначено e_1, e_2 — единичные орты вдоль осей u^1, u^2 соответственно; v — произвольный постоянный двухкомпонентный спинор; σ, σ_3 — соответствующие матрицы Паули [44], все остальные обозначения сохранены как и для (П2.333).

В частном случае при $\gamma\to 0$, $f_0\to 0$ решение (П2.341), (П2.342) дает решение Волкова для электрона в поле плоской волны [441], которое не является когерентным состоянием.

В заключение отметим, что рассмотренные когерентные состояния относятся по классификации [436] к классу выделенных и являются наиболее близкими к классическим системам (см. [436, с. 1694—1695]). Дополнительные к рассмотренным примеры можно найти в [394—398, 401, 408, 409, 431—444].

П2.6. Представление Вигнера в квантовой теории. Рассмотренные в предыдущих разделах возможные модели квантовой теории оперируют различными операторами по тем или иным правилам. Для коммутирующих переменных в операторных выражениях безразличен порядок применения операторов.

Ситуация резко меняется, когда в операторные выражения входят некоммутирующие переменные. Так, например, в рассмотренных операторах $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{B}\hat{A}$ и $(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A})/2$ для некоммутирующих переменных получим три различные ситуации. Таким образом, понятие функции от нескольких некоммутирующих переменных необходимо доопределить правилом упорядочения действия операторов. В квантовой теории нашли наиболее широкое распространение три принципа упорядочения [432, 433, 430]: 1) нормальное упорядочение; 2) антинормальное упорядочение; 3) вигнеровское упорядочение. При нормальном упорядочении операторов, которое обозначается в литературе символом $\mathcal{N}$ или заключением операторного выражения в двоеточие, последние представляются через операторы рождения и уничтожения и разлагаются в ряд Тейлора с перестановкой всех операторов уничтожения правее операторов порождения.

Пример 1. Так, согласно введенному правилу имеем [408, 409, 430]:

а) $\mathcal{N}\exp\{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (|z|^{2n}\hat{a}^{+n}\hat{a}) = \exp(z\hat{a}^+)\exp(-z^*\hat{a})$;

б) $\mathcal{N}\exp\{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}\} = \exp\left(\frac{|z|^2}{2}\right)\exp(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})$;

в) $\mathcal{N}\exp(-a^+a) = \hat{P}_0$ — проектор на вакуумное состояние.

Антинормальное упорядочение обозначается через A и противоположно к $\mathcal{N}$ по порядку применения операторов.

Остановимся подробнее на вигнеровском упорядочении операторов [138] и соответствующей форме представления динамики в квантовой теории [430].

П2.6.1. Вигнеровское упорядочение операторов. Для вигнеровского упорядочения операторов [138] вводится обозначение W. Оно определяется по отношению к функциям, выраженным через набор операторов с числовыми коммутаторами (например, через рассмотренные канонические операторы и импульсы) и заключается в симметричном по отношению к перестановкам любой пары операторов в определении их произведения [430]. Например, для оператора $W\hat{q}^2\hat{p} = (\hat{q}^2\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}^2)/3$.

В общем случае упорядочение любой функции осуществляется с помощью соотношения [430]

$$\mathrm{Prin} f(\hat{A}, \hat{B}) = \int\int f(a, b)\,\mathrm{Prin}\delta(\hat{A} - a, \hat{B} - b)\,dadb, \qquad (\text{П2.343})$$

где $\hat{A} = (\hat{a} + \hat{a}^+)/\sqrt{2}$, $\hat{B} = -i(\hat{a} - \hat{a}^+)/\sqrt{2}$, $[\hat{A}, \hat{B}] = i$, $a, b \in (-\infty, \infty)$. Для δ-функции имеем

$$W\delta(\hat{A} - a, \hat{B} - b) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \exp[ix_1(\hat{A} - a) + ix_2(\hat{B} - b)]\,dx_1dx_2. \qquad (\text{П2.344})$$

Из приведенных соотношений в примере 1 и фурье-образа δ-функции следует непосредственно связь между нормальным и вигнеровским упорядочением следующего вида [430, с. 38]:

$$\mathcal{N}\delta(\hat{A} - a, \hat{B} - b) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\right)\right] W\delta(\hat{A} - a, \hat{B} - b). \qquad (\text{П2.345})$$

Важным следствием приведенных способов упорядочения операторов является возможность экономного способа вычисления следа операторных соотношений. В этом случае имеют место следующие зависимости:

$$\mathrm{Tr}\,\mathcal{N} f(\hat{a}^+, \hat{a})\,Ag(\hat{a}, \hat{a}^+) = \frac{1}{\pi}\int\int f(\alpha^*, \alpha)\,g(\alpha, \alpha^*)\,d^2\alpha;$$
$$\mathrm{Tr}\,Wf(\hat{q}, \hat{p})\,Wg(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\int f(q, p)\,g(q, p)\,dpdq. \qquad (\text{П2.346})$$

Из (П2.346) следует, что использование операций упорядочения операторных выражений сводит вычисление следа Tr к классической операции интегрирования.

Пример 2. Рассмотрим связь введенных нормальных $\mathcal{N}$ и антинормальных A упорядочений с когерентными состояниями. Как показано в п. П2.5, когерентные состояния описывают чистые состояния, у которых волновые функции имеют вид $U(z)\psi_0$, ψ_0 описывает вакуумное состояние осциллятора, $U(z)$ описывает оператор сдвига $\hat{a}\to\hat{a}+z$, который добавляет к нормированным импульсу и координате классические добавки $\sqrt{2}\mathrm{Im}z^*$ и $\sqrt{2}\mathrm{Re}z^*$ соответственно [430]. Как известно из результатов п. П2.5, этот оператор имеет вид

$$U(z)=\exp\{z\hat{a}^+-z^*\hat{a}\}. \qquad (\text{П2.347})$$

Матрица плотности когерентных состояний есть проектор $\hat{P}_0(z)=U(z)\psi_0$, $\psi_0^+U^+(z)=|z\rangle\langle z|$, который был исследован в п. П2.2, П2.5 и имеет представление в антинормально упорядоченном виде. Для таких состояний наиболее удобно применение нормального упорядочения операторных выражений [430]. Так, вычисляя след $\mathrm{Tr}\mathcal{N}f(\hat{a}^+,\ \hat{a})\hat{P}_0(z)=\langle z|\mathcal{N}f(\hat{a}^+,\ \hat{a})|z\rangle$, имеем $f(z^*,\ z)$. Матрицу плотности можно описать в глауберовском (диагональном) представлении согласно п. П2.5 в виде

$$\hat{\rho}=\int p(z)\,\hat{P}_0(z)\,dz.$$

Средние значения

$$\mathrm{Tr}\mathcal{N}f(\hat{a}^+,\hat{a})\,\hat{\rho}=\int f(z^*,z)\,p(z)\,d^2z.$$

Таким образом, из (П2.346) и представленных выражений следует, что матрица плотности когерентных состояний описывается антинормально упорядоченным выражением. Следовательно, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\hat{P}_0(z)=A\delta(\hat{A}-\sqrt{2}\mathrm{Re}\,z^*,\ \hat{B}-\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,z^*), \qquad (\text{П2.348})$$

т. е. проекторы на когерентные состояния образуют базисный набор антинормально упорядоченных δ-функций. Тогда весовую функцию $p(z)$ в последнем выражении можно отождествить с квантовым аналогом совместного распределения вероятностей операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Такая функция обладает одной отличительной особенностью от классической функции распределения вероятностей: она может быть не всегда положительной.

Для того чтобы избежать таких аномальных явлений, используют распределение вероятностей, соответствующее упорядочению Prin типа (П2.343) [430]

$$P_{\mathrm{Prin}}(z)=2\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Prin}\,\delta(\hat{A}-\sqrt{2}\mathrm{Re}\,z^*,\ \hat{B}-\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,z^*).$$

Это выражение получается путем усреднения упорядоченного индикатора $\mathrm{Prin}\delta(\bullet)$ элементарного события $(\hat{A}/\sqrt{2}=\mathrm{Re}z^*,\ \hat{B}/\sqrt{2}=\mathrm{Im}z^*)$. Но согласно (П2.347) глауберовскому представлению соответствует упорядочение $\mathrm{Prin}=A$, а поэтому распределение вероятностей в глауберовском представлении можно описать в виде $P_A(z)=2\mathrm{Tr}\hat{\rho}A\delta(\hat{A}-\sqrt{2}\mathrm{Re}z^*,\ \hat{B}-\sqrt{2}\mathrm{Im}z^*)=\mathrm{Tr}\hat{\rho}\hat{P}_0(z)/\pi$, которое имеет все свойства классического распределения вероятностей.

Непосредственной аналогии с классическим распределением вероятностей можно достичь и с помощью вигнеровской функции распределения, которая вводится с помощью матрицы плотности и является определенным аналогом функции распределения на фазовом пространстве $(r,\ v)$ следующего вида [457]:

$$f(r, v, t) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^{3N} \int \rho_N \left(r - \frac{r'}{2}, r + \frac{r'}{2}, t\right) \exp\left\{\frac{im}{\hbar} \sum r_i v_i\right\} dr'^N. \quad \text{(П2.349)}$$

В этом случае формулы для средних значений совпадают с классическими формулами.

В общем случае для сближения квантового описания с классическим переходят от функций — матричного элемента $A_0(q_1, q_2)$ и матрицы плотности $\rho_0(q_2, q_1)$ к вейлевскому представлению операторов c-числовыми функциями $A(p, q)$ и к вигнеровской матрице плотности $\rho(p, q)$ линейным невырожденным преобразованием [458]

$$A_0(q_1, q_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dpdqA(p, q) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} p(q_1 - q_2)\right\} \delta\left(q - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right), \quad \text{(П2.350)}$$

$$\rho_0(q_2, q_1) = \int dpdq \exp\left\{\frac{i}{\hbar} p(q_2 - q_1)\right\} \delta\left(q - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)\right) \rho(p, q).$$

Согласно [458], преобразования (П2.350) обладают следующими свойствами, сближающими новые функции A, ρ с соответствующими классическими величинами: 1) переменные p, q функций $A(p, q)$ сопоставлены соответственно операторам $\hat{p}$, $\hat{q}$ импульса и координаты; 2) для любой наблюдаемой $A(p, q)$ квантовым скобкам Пуассона $(i\hbar)^{-1}[\hat{A}, \hat{p}]$, $(i\hbar)^{-1}[\hat{A}, \hat{q}]$ сопоставлены функции $\partial A/\partial q$, $-\partial A/\partial p$; 3) функции $A(p, q)$, $\rho(p, q)$ действительны, если они сопоставлены самосопряженным операторам $\hat{A}$, $\hat{\rho}$; 4) выражение для среднего принимает одинаковый вид с классическим.

Однако вигнеровская матрица плотности не всегда положительна.

Несмотря на это, вигнеровское представление нашло успешное применение, на котором кратко остановимся ниже.

Из предыдущих выражений для $\hat{\rho}(z)$ и $p_A(z)$ следует, что $p_A(z)$ и $p(z)$ связаны сглаживанием с весовой функцией $\exp\{-|z-z'|^2\}$. Эта связь и обеспечивает компенсацию неположительных значений в случае нормального и антинормального упорядочения выражений. Сама функция $p(z)$ по Глауберу совпадает с функцией $p_{\mathcal{N}}(z)$, так как из предыдущих выражений и (П2.346) следует

$$p_{\mathcal{N}}(z) = 2 \operatorname{Tr} \hat{\rho} \mathcal{N} \delta(\hat{A} - \sqrt{2} \operatorname{Re} z^*, \hat{B} - \sqrt{2} \operatorname{Im} z^*) =$$

$$= \int \operatorname{Tr} \mathcal{N} \delta(\cdot) p(\tilde{z}) A \delta(\cdot) d\tilde{z} = p(z).$$

Приведенные результаты показывают, что «наилучшим» из классических распределений вероятностей для некоммутирующих квантовых канонических переменных является $p_A(z)$, так как она положительна и не имеет сингулярностей. Другим «наихудшим» распределением является $P_A(z) = p(z)$, так как оно не положительно и может иметь сингулярности.

Вигнеровское представление плотности занимает промежуточное положение [430]. Из (П2.346), (П2.350) следует, что матрицу плотности можно выразить через вигнеровскую плотность вероятности (в представлении Вигнера) $p_W(q, p) \operatorname{Tr} \hat{\rho} \tilde{W} \delta(\hat{q} - q, \hat{p} - p)$ в следующем виде: $\hat{\rho} = 2\pi\hbar W p_W(\hat{q}, \hat{p})$. В этом случае матрица плотности гауссовского распределения для квантового набора

$\hat{X}=(\hat{X}_1, ..., \hat{X}_n)$ имеет «классический» вид многомерного гауссовского распределения [430]

$$\hat{\rho}=\frac{|\det(2\pi C)|^{1/2}}{[\det(2\pi K)]^{1/2}} W \exp\{-(\hat{X}-\langle X\rangle)^T K^{-1}(\hat{X}-\langle X\rangle)/2\}, \qquad (П2.351)$$

где K и C — корреляционная и коммутационная матрицы; $\langle X\rangle$ — вектор средних значений. Формула (П2.351) описывает также и когерентные состояния. В пределе при $(K-|C|/2)\to 0$ имеем описание смещенного вакуума [430].

Также имеет место вигнеровское представление $|z\rangle\langle z|=2W\exp\{-[(\hat{A}-\sqrt{2}\mathrm{Re}z^*)^2+(\hat{B}-\sqrt{2}\mathrm{Im}z^*)^2]\}$, так как $|0\rangle\langle 0|$ является пределом гауссовской матрицы плотности $\hat{\rho}=\exp\{\Gamma(\beta)-\beta\hat{a}^+\hat{a}\}$ при $\beta=\hbar\omega/kT\to\infty$.

П2.6.2. Представление Вигнера в квантовой динамике. Допустим, что канонические переменные заданы операторами $\hat{X}_i (i=1, 2, ..., r)$ для системы с r степенями свободы. На рассматриваемом множестве операторов обычно вводится на основе (П2.343) базис

$$|e(\hat{X})\rangle = \mathscr{P}_1\delta(\hat{X}-X),$$

где $\mathscr{P}_i=\mathrm{Prin}$ — некоторый принцип упорядочения, а любой оператор соответствующей неоператорной функции $f_{\mathscr{P}_1}(X)$ можно отображать в виде

$$\mathscr{P}_1 f(\hat{X}) = \int f_{\mathscr{P}_1}(X)\,|e(X)\rangle\, dX.$$

Для описания возможных состояний системы можно вводить свой базис для матриц плотности независимо от $e(\hat{X})$, т. е. $\langle f(X)|=h^r\mathscr{P}_2\delta(\hat{X}-X)$; $h=2\pi\hbar$. Множитель h^r делает этот базис безразмерным и благодаря этому свойству функция $p_{\mathscr{P}_2}(X)$, представляющая матрицу плотности в соответствии с формулой разложения $\hat{\rho}=\langle p|=\int p_{\mathscr{P}_2}(X)\langle f(X)|\,dX$, будет иметь размерность плотности вероятности [430]. Функция $p_{\mathscr{P}_2}(X)$ будет описывать классическую плотность распределения вероятностей, если упорядочения $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ согласованы [430] таким образом, что выполняется соотношение

$$\langle f(X)\,|\,e(Y)\rangle = h^r\,\mathrm{Tr}\,\mathscr{P}_1\delta(\hat{X}-Y)\,\mathscr{P}_2\delta(\hat{X}-X)=\delta(X-Y). \qquad (П2.352)$$

Из (П2.346) следует, что это условие выполняется при $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2=W$, а случай $\mathscr{P}_1=\mathscr{N}$, $\mathscr{P}_2=A$ отличается от (П2.352) константой 2π.

В вигнеровском базисе физические переменные и матрицы плотности описываются, следовательно, классическими функциями, имеющими согласно (П2.352) вид

$$f_W(X)=h^r\,\mathrm{Tr}\,\hat{f}\,\delta(\hat{X}-X), \qquad p_W(X)=\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\,\delta(\hat{X}-X); \qquad (П2.353)$$

$$\langle\hat{f}\rangle=\mathrm{Tr}\,\hat{f}\,\hat{\rho}\int f_W(X)\,p_W(X)\,dX.$$

При использовании вигнеровского упорядочения операторных выражений квантовый характер системы проявляется в правиле слияния вигнеровски упорядоченных операторных выражений [430]

$$(\hat{f}\hat{g})_W=\left[\mathscr{N}_{X,\partial/\partial X} f_W\left(X+\frac{1}{2}C\frac{\partial}{\partial X^T}\right)\right]g_W(X). \qquad (П2.354)$$

В (П2.354) через $(\hat{A})_W$ обозначена функция, соответствующая оператору $\hat{A}$

в представлении Вигнера; C — коммутационная матрица канонических переменных X; $N_{X,\partial/\partial x}$ — упорядочение, при котором все операторы $\partial/\partial X$ действуют раньше умножения на X. Представлению (П2.354) эквивалентно представление вида

$$(\hat{f}\hat{g})_W = \left[\mathcal{N}_{X,\partial/\partial X} g_W\left(X - \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial X^T}\right)\right] f_W(X). \qquad \text{(П2.355)}$$

Для вигнеровского представления справедливы также дополнительные соотношения [430, 138]

$$\mathcal{N}_{X,\partial/\partial X} f\left(X \pm \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial X^T}\right) = \mathcal{N}_{\partial/\partial X, X} f\left(X \mp \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right) = W f\left(X \pm \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right);$$

$$\left[\left(X + \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right), \left(X - \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right)^T\right] = 0, \qquad \text{(П2.356)}$$

где W означает вигнеровское упорядочение операторов X и $\partial/\partial X$.

Из (П2.353), (П2.354) следует важный вывод [430]: в вигнеровском представлении некоммутативность операторов $\hat{X}_i$ между собой отображается некоммутативностью классических фазовых переменных X с соответствующими операторами дифференцирования $\partial/\partial X$ по фазовым переменным.

Используя уравнения Гейзенберга для замкнутой динамической системы с гамильтонианом $\hat{H}$ уравнение эволюции для вигнеровского представления оператора $\hat{f}$ можно записать с учетом (П2.354), (П2.355) в виде

$$\frac{\partial f_W(X)}{\partial t} = \left\{\frac{i}{\hbar} \mathcal{N}_{X,\partial/\partial X}\left[\hat{H}_W\left(X + \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \hat{H}_W\left(X - \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial x^T}\right)\right]\right\} f_W(x, t). \qquad \text{(П2.357)}$$

Уравнение (П2.357) описывает, как и в классической теории, эволюцию динамической системы в фазовом пространстве, но содержит эволюционный оператор с постоянной Планка $\hbar$. Разлагая этот оператор в ряд по степеням $C = i\hbar C_0$, имеем

$$\frac{\partial f_W}{\partial t} = \frac{\partial H_W}{\partial X} C_0 \frac{\partial f_W}{\partial X^T} + 0\left(\hbar^2 \frac{\partial^3 H_W}{\partial X^3}\right) f_W. \qquad \text{(П2.358)}$$

Поскольку C_0 есть матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то соответствующая ей квадратичная форма дает в первом слагаемом в (П2.358) классическую скобку Пуассона.

Значение записи (П2.358) для квантовой теории Б. А. Гришанин [430] отмечает следующим образом: «Остаточный член... (прим. авт.— см. уравнение (П2.358)) в сокращенном виде имеет по $\hbar$ второй порядок малости, причем соответствующий безразмерный параметр определяется ангармоничностью системы, т. е. кубическим членом разложения гамильтониана по каноническим переменным. Это свойство является привилегией вигнеровского упорядочения, поскольку в общем случае даже для линейной системы уравнение эволюции для нелинейной функции канонических переменных не обязано иметь классический вид. Таким образом, в представлении Вигнера квазигармонические системы на строго квантовом уровне полностью описываются классическими уравнениями. Вся квантовая специфика заключена при этом в расчете вигнеровских

функций f_W, представляющих соответствующие операторы, т. е. отображается соотношением (П2.354) при вычислении вигнеровской функции, соответствующей произведению физических величин. Другими словами, квантовый характер системы влияет лишь на соотношение между физическими событиями, усложняемое некоммутативностью, но не влияет на временную динамику физических переменных».

В связи с изложенным интересно отметить связь вигнеровской функции распределения вероятностей с коррелированными когерентными состояниями, рассмотренными в п. П2.5, пример 7.

Пример 3. В [394, с. 230] показано, что коррелированные когерентные состояния имеют следующий вид:

$$\langle x \mid \alpha, r, \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\eta^2}\left(1-\frac{ir}{\sqrt{1-r^2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha x}{\eta}-\frac{1}{2}(\alpha^2+|\alpha|^2)\right\}, \qquad \text{(П2.359)}$$

где $\eta=\sqrt{\sigma_q}$ и $r=\sigma_{AB}/(\sigma_A\sigma_B)^{1/2}$ — коэффициент корреляции. Коэффициенты разложения состояния $|\alpha, r, \eta\rangle$ по степеням параметра α являются собственными состояниями оператора

$$\hat{a}^+_{r,\eta}\hat{a}_{r,\eta} \equiv \eta^2\hat{p}^2+\frac{\hat{q}^2}{4\eta^2(1-r^2)}-\frac{r}{2\sqrt{1-r^2}}(\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q})-\frac{1}{2};$$
$$\hat{a}_{r,\eta}=\frac{1}{2r}\left(1-\frac{i}{\sqrt{1-r^2}}\right)\hat{q}+i\eta\hat{p}, \qquad |r|<1, \qquad \text{(П2.360)}$$

собственные значения которого равны $n=0, 1, \ldots$ Гамильтониану (П2.360) соответствует гармонический осциллятор $\ddot{q}+q=0$, так как изменением масштаба координаты и введением другого обобщенного импульса типа $\hat{q}=\sqrt{2}\eta Q$; $\hat{p}=1/\sqrt{2}\eta\cdot\hat{p}-r/\sqrt{2(1-r^2)}$ гамильтониан (П2.360) сводится к обычному осциллятору $(\hat{Q}^2+\hat{p}^2)/2$.

Аналогично зависящее от времени каноническое преобразование $\hat{q}=\hat{Q}e^{\varkappa t}$; $\hat{p}=\hat{p}e^{-\varkappa t}$; $\varkappa=-r/\sqrt{1-r^2}$ приводит к уравнению движения осциллятора с затуханием [394] $\ddot{\hat{Q}}+2\varkappa\dot{\hat{Q}}+\hat{Q}/(1-r^2)=0$. Следовательно, состояния (П2.360) имеют непосредственное отношение к квантованию затухающего осциллятора.

Состояние (П2.360) в представлении Вигнера имеет следующий вид [394]

$$W_{\alpha,r,\eta}(q,p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\left\langle q+\frac{\xi}{2}\mid\alpha,r,\eta\right\rangle\left\langle\alpha,r,\eta\mid q-\frac{\xi}{2}\right\rangle e^{-ip\xi}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\exp\left\{-2\eta^2\tilde{p}^2-\frac{\tilde{q}^2}{2\eta^2(1-r^2)}+\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}\tilde{q}\tilde{p}\right\}, \qquad \text{(П2.361)}$$
$$\tilde{p}=p-\langle\hat{p}\rangle, \quad \tilde{q}=q-\langle\hat{q}\rangle$$

и является нормальным классическим распределением с дисперсией $\sigma_q=\eta^2$, $\sigma_p=[4\eta^2(1-r^2)]^{-1}$ и коэффициентом корреляции r.

В связи с отмеченной особенностью функций Вигнера общее нормальное

распределение

$$f=\frac{1}{2\pi}\Delta^{-1/2}\exp\left\{-\frac{\sigma_p}{2\Delta}\tilde{q}^2-\frac{\sigma_q}{2\Delta}\tilde{p}^2+\frac{\sigma_{pq}}{\Delta}\tilde{q}\tilde{p}\right\};\qquad \Delta=\sigma_p\sigma_q-\sigma_{pq}^2$$

может быть функцией Вигнера при условии $\Delta\geqslant 1/4$.

Из определения коррелированных когерентных состояний следует, что соотношение неопределенностей Гейзенберга $\sigma_p\sigma_q\geqslant\hbar^2/4$ при отличном от нуля коэффициенте корреляции r сдвигается в сторону больших значений, т. е. $\sigma_p\sigma_q\geqslant\hbar^2/(4(1-r^2))$, и квантовые флуктуации в состояниях с $r\neq 0$ становятся сильнее, чем при $r=0$. Это сказывается существенно на классических эффектах квантовой теории. Так, если имеется потенциальный барьер между двумя потенциальными ямами, то вероятность туннелирования через барьер из состояния с $r\neq 0$ может быть больше, чем из состояния с $r=0$.

П2.7. Квазиклассические пределы и обобщенные модели квантовой теории. В данном разделе рассмотрим кратко некоторые взаимосвязи различных форм перехода от квантовой теории к классической механике с различными формами квантования классической механики на примерах моделей Гейзенберга, Шредингера, Фейнмана, Вейля, Маслова, Широкова, Манько и др.

П2.7.1. Квазиклассические модели перехода от квантовой теории к классической механике. Вопросы соответствия между квантовой теорией и классической механикой рассматривались с самого начала создания квантовой теории [459, 460].

Здесь рассмотрим одну из традиционных интерпретаций перехода от квантовой теории к классической механике на основе предельного перехода $\hbar\to 0$.

Предварительно рассмотрим несколько математических определений и результатов [377].

Рассмотрим два оператора

$$V(u)=e^{-i(u_1P_1+u_2P_2+u_3P_3)};\qquad V(v)=e^{-i(v_1Q_1+v_2Q_2+v_3Q_3)},\qquad (\text{П2.362})$$

где $u(u_1, u_2, u_3)$, $v(v_1, v_2, v_3)$ — вещественные параметры. В координатном представлении оператор $V(v)$ есть оператор умножения на функцию

$$V(v)\varphi(X)=e^{-ivx}\varphi(X).$$

Оператор $U(u)$ в координатном представлении является оператором сдвига аргумента функции $\varphi(x)$ на величину — hu, т. е.

$$U(u)\varphi(X)=\varphi(x-uh).$$

Перестановочные соотношения для унитарных операторов $U(u)$ и $V(v)$ в координатном представлении имеют вид

$$V(v)U(u)\varphi(x)=e^{-ivx}\varphi(x-uh);\qquad U(u)V(v)\varphi(x)=e^{-iv(x-uh)}\varphi(x-uh).$$

Таким образом, имеем

$$U(u)V(v)=V(v)U(u)e^{ivuh}.\qquad (\text{П2.363})$$

Аналогично

$$U(u_1)U(u_2)=U(u_1+u_2),\qquad V(v_1)V(v_2)=V(v_1+v_2).\qquad (\text{П2.364})$$

Следовательно, множества операторов $U(u)$, $V(v)$ образуют группы U и V соответственно. В этом случае, если U и V — однопараметрические группы унитарных операторов $U(u)$ и $V(v)$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и удовлетворяющих условию (П2.363), то пространство $\mathcal{H}$ можно представить в виде прямой суммы $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\ldots$, где каждое $\mathcal{H}_l$ переводится в себя всеми

операторами $U(u)$ и $V(v)$ и каждое $\mathscr{H}_l$ можно отобразить унитарно на $L^2(R)$ таким образом, что операторы $V(v)$ переходят в операторы $\psi(x)\to e^{-ivx}\psi(x)$, а операторы $U(u)$ переходят в операторы $\psi(x)\to\psi(x-uh)$. Следовательно, в пространстве $\mathscr{H}$ действует представление соотношений (П2.363) унитарными операторами; если это представление неприводимо, то разложение пространства $\mathscr{H}$ содержит только одно слагаемое. В этом заключается содержание теоремы Неймана — Стоуна, с помощью которой нетрудно доказать неприводимость координатного представления для P и Q [377].

Пример 1. Перестановочные соотношения Гейзенберга с помощью введенных операторов в форме Вейля имеют обобщенный вид $e^{i\alpha p}e^{i\beta q}=$ $=e^{i\alpha\beta}e^{i\beta q}e^{i\alpha p}$.

Допустим, что классическое фазовое пространство является линейным пространством M конечной размерности с фундаментальной невырожденной кососимметрической формой $B(z, z')$ $(z, z'\in M)$. Пусть задана каноническая система P, Q на фазовом пространстве M, а для произвольного вектора $z=(u, f)$ из M определен самосопряженный оператор $R(z)$ как инфинитезимальный оператор непрерывной однопараметрической унитарной группы $S(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, где $S(t)=\exp\{itP(u)\}\exp\{itQ(f)\}\exp\{-\frac{i}{2}t^2f(u)\}$.

Из определения $R(z)$ непосредственно следует обобщение соотношения Вейля

$$e^{iR(z)}e^{iR(z')}=e^{\frac{1}{2}iB(z,z')}e^{iR(z+z')},\qquad B(z, z')=f'(u)-f(u').$$

В инфинитезимальной форме обобщенное соотношение Вейля принимает вид [33, 461, 462]

$$[R(z), R(z')]\subset -iB(z, z').$$

Если пространство M вводится как множество всех векторов $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ с $2n$ компонентами, а $B(z, z')$ имеет вид $\sum_k (p_k'q_k-p_kq_k')$, то операторы $P_k=R(e_k)$ и $Q_k=R(f_k)$, где e_k и f_k образуют естественный базис в M, удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям Гейзенберга. Для отображения $z\to U(z)$ в системе Вейля (M, B) имеем

$$U(z)U(z')=\exp\left[\frac{i}{2}B(z, z')\right]U(z+z').$$

Для унитарных операторов при $B(z, z')=\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z, z')=\frac{i\hbar}{2}\{z, z'\}$ имеем [33, 461]

$$U(z)U(z')=\exp\left[\frac{i\hbar}{2}\{z, z'\}\right]U(z+z').$$

Введенные операторы $U(u)$ и $V(v)$ позволяют рассмотреть одну из моделей предельного перехода от квантовой теории к классической механике на основе предела $\hbar\to 0$.

Процедура перехода состоит в следующем [377, с. 65]. Вещественным функциям на фазовом пространстве $f(p, q)$ сопоставляются по некоторым правилам самосопряженные операторы A_f $(f\to A_f)$. Затем определяется формула обращения, позволяющая по оператору A_f восстановить функцию $f(p, q)$ $(A_f\to f)$.

Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между вещественными функциями на фазовом пространстве и самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В этом случае справедлива формула

$$\operatorname{Tr} A_f = \int\limits_M f(p, q) \frac{dpdq}{2\pi h}.$$

Далее определяется вид функций на фазовом пространстве, соответствующий произведению $A_f \circ A_g$ и квантовой скобке Пуассона $\{A_f, A_g\}_\hbar$. Такие функции оказываются не совпадающими с произведением fg и классической скобкой Пуассона $\{f, g\}$, но в пределе $\hbar \to 0$ стремятся к ним. Следовательно, алгебра наблюдаемых квантовой механики неизоморфна алгебре наблюдаемых классической механики. Однако при $\hbar \to 0$ взаимно однозначное соответствие $f \leftrightarrow A_f$ становится изоморфным.

Оператор $A_f(t)$ удовлетворяет, согласно [377], уравнению $dA_f(t)/dt = \{H, A_f(t)\}_\hbar$. Из линейности соответствия $f \leftrightarrow A_f$ следует, что при $\hbar \to 0$ классическое уравнение $df/dt = \{H, f\}$ является следствием квантового уравнения. Самосопряженный оператор A_f может быть построен в форме Вейля с помощью введенных операторов (П2.363) и имеет вид

$$A_f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} \tilde{f}(u, v)\, V(v)\, U(u)\, e^{i\hbar uv/2} du dv,$$

где $\tilde{f}$ — фурье-преобразование функции $f(p, q)$, а дополнительный множитель $e^{i\hbar uv/2}$ связан со свойством некоммутативности операторов $U(u)$, $V(v)$ по (П2.363) и обеспечивает самосопряженность оператора A_f.

Аналогичный вид имеют операторы $A_f \circ A_g$ и $\{A_f, A_g\}_\hbar$. Таким образом, построена модель взаимно однозначного соответствия между квантовой и классической механиками и предельный переход $\hbar \to 0$.

Здесь следует отметить, что нередко прямой переход $\hbar \to 0$ оказывается бессмысленным. Таким примером является уравнение Шредингера в координатном представлении.

Такие парадоксальные ситуации были учтены Л. Д. Фаддеевым, подразделившим постоянную Планка на «внешнюю» и «внутреннюю», а квазиклассическое разложение проводится по внешней $\hbar$.

В работах В. П. Маслова [463] используются глобальные асимптотические разложения по степеням $\hbar$ для нелинейных квантовых уравнений и переход $\hbar \to 0$ к классическим уравнениям.

В работах Ю. М. Широкова [458] построена обобщенная алгебра наблюдаемых, содержащая как частный случай классическую или квантовую механики. Соответствие же между обеими механиками устанавливается также на основе предельного перехода $\hbar \to 0$.

П2.7.2. Квантование уравнений классической механики. Представленные модели квантовой теории кратко можно охарактеризовать следующим образом [463].

1. Квантование Гейзенберга. Пусть $x(t)$, $p(t)$ — решение уравнений Ньютона

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\partial V(x)/\partial x,$$

удовлетворяющие начальным условиям $x(0) = x_0$, $p(0) = p_0$.

Соответствие $(x(t),\ p(t))\to(\hat{X}(t),\ \hat{P}(t))$ с соотношением коммутации $[\hat{X}(t),\ \hat{P}(t)]=i\hbar$ называется квантованием Гейзенберга.

2. Квантование Шредингера — переход от уравнений Ньютона к уравнениям Шредингера.

3. Квантование Фейнмана. В этом случае рассматривается оператор $T_{\Delta t}$, действующий по формуле

$$T_{\Delta t}u(x)=\iint \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p(x-y)-\left(\frac{|p|^2}{2}+V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\Delta t\right]\right\}u(y)\,dydp.$$

Полагая

$$\psi(x,t)=\lim_{N\to\infty}(T_{t/N})^N\psi_0(x),$$

можно этот предел интерпретировать как континуальный интеграл по траекториям

$$\psi(x,t)=\int\limits_{q(t)=x}\int D_pD_q\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t p(\tau)\,dq(\tau)-\left(\frac{|p(\tau)|^2}{2}+V(q(\tau))\right)d\tau\right\}\psi_0(q(0)).$$

Функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера и начальному условию $\psi(x,0)=\psi_0(x)$ [52].

Следовательно, все представленные способы квантования эквивалентны. В общем случае эти способы зависят от действия операторов $\hat{p}$ и $\hat{x}$ [464, 463].

В модели В. П. Маслова [463] используются для квантования не уравнения или гамильтонианы, а поверхности в фазовом пространстве, названные лагранжевыми. При этом центральным пунктом является использование не уравнения Гамильтона — Якоби, а его решения — действия $S(x)$ и лагранжевого многообразия. Отметим, что в модели Фейнмана используется также функция действия $S(x)$.

Разновидности представленных моделей можно найти в [62—66, 401, 405, 427, 430, 458, 463—472] и др.

В работе [472] дан критический анализ процедур квантования классических уравнений движения. В частности, отмечена неоднозначность процедуры квантования, связанная с некоммутативностью операторов типа координат и импульсов, либо неоднозначностью процедуры предельного перехода в континуальных интегралах модели Фейнмана, либо существованием бесконечно многих лагранжианов, приводящих к эквивалентным уравнениям движения. В качестве критерия выбора эквивалентного лагранжиана предложен эвристический принцип аддитивности, согласно которому следует выбирать лагранжиан, распадающийся при выключении взаимодействия между частицами системы на сумму лагранжианов свободного движения этих частиц. Этот принцип аддитивности следует из основ самой квантовой теории.

Существование целого класса лагранжианов привело в [472] к расширению понятия симметрии уравнений. Под преобразованием симметрии в [472] предложено понимать преобразования, переводящие траектории классической системы в другие траектории той же системы. В этом случае лагранжиан или гамильтониан могут переходить в другие лагранжианы или гамильтонианы из класса эквивалентности.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Бугровский В. В., Жуков В. П., Преображенский С. С., Солнечный Э. М., Уланов Г. М., Чупрун Б. Е.* Динамика и управление ядерным ракетным двигателем/Под ред. Б. Н. Петрова. М.: Атомиздат, 1974.

2. *Бугровский В. В., Винцевич Н. А., Вишнепольский И. М., Уланов Г. М.* и др. Основы автоматического управления ядерными космическими энергетическими установками/Под ред. Б. Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1974.

3. *Бугровский В. В., Жаров В. К., Ковачич Ю. В., Мартьянова Т. С., Потапов В. Н., Преображенский С. С., Уланов Г. М., Шевяков А. А.* и др. Информационно-управляющие системы космических энергетических установок/ /Под ред. Б. Н. Петрова. М.: Атомиздат, 1979.

4. *Седов Л. И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6, с. 1311—1313; О естественной теории сплошных сред.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 971—984.

5. *Сингатуллин Р. С.* Построение метрики риманова пространства-времени по заданным свойствам движения пробных частиц.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 2, с. 320—323; То же.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 19, с. 66—69.

6. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Температурные напряжения в ядерных реакторах. М.: Атомиздат, 1962.

7. *Гольденблат И. И., Ульянов С. В.* Введение в теорию относительности и ее приложение к новой технике. М.: Наука, 1979.

8. *Петровский В. И., Пожидаев О. А.* Локаторы на лазерах. М.: Воениздат, 1969.

9. *Богданов А. Д.* Гироскопы на лазерах. М.: Воениздат, 1973.

10. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976; *Вильхельмссон Х., Вейланд Я.* Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981.

11. Лазеры и термоядерная проблема: Сб. статей/Под ред. Б. Б. Кадомцева. М.: Атомиздат, 1973.

12. Проблемы лазерного термоядерного синтеза: Сб. статей/Под ред. А. А. Филюкова. М.: Атомиздат, 1976.

13. Квантовая макрофизика: Сб. статей/Под ред. В. Т. Хозяинова. М.: Наука, 1967; Квантовая метрология и фундаментальные константы: Сб. статей. М.: Мир, 1981.

14. *Лукьянов С. Ю.* Горячая плазма и управляемый термоядерный синтез. М.: Атомиздат, 1975.

15. *Бракнер К., Джорна С.* Управляемый лазерный синтез. М.: Атомиздат, 1977.

16. *Петросьянц А. М., Логунов А. А.* Физика высоких энергий и ускорителей заряженных частиц. М.: Наука, 1973.

17. *Хеглер М., Кристиансен М.* Введение в управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980.

18. Сверхпроводящие машины и устройства: Сб. статей/Под ред. С. Фонера, Б. Шварца. М.: Мир, 1977.

19. *Веников В. А., Зуев Э. Н., Околотин В. С.* Сверхпроводники в энергетике. М.: Энергия, 1972.

20. *Зенкевич В. Б., Сычев В. В.* Магнитные системы на сверхпроводниках. М.: Наука, 1972.
21. *Волков А. Ф., Заварицкий Н. В., Надь Ф. Я.* Электронные устройства на основе слабосвязанных сверхпроводников. М.: Сов. радио, 1978.
22. *Солимар Л.* Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974.
23. *Уильямс Дж.* Сверхпроводимость и ее применение в технике. М.: Мир, 1973.
24. *Буккель В.* Сверхпроводимость. Основы и приложения. М.: Мир, 1975.
25. Слабая сверхпроводимость. Квантовые интерферометры и их применения: Сб. статей/Под ред. Б. Б. Шварца, С. Фонера. М.: Мир, 1980.
26. *Престон К.* Когерентные оптические вычислительные машины. М.: Мир, 1974.
27. *Тарасов Л. В.* Физические основы квантовой электроники (оптический диапазон). М.: Сов. радио, 1976.
28. *Усынин Г. Б., Карабасов А. С., Чирков В. А.* Оптимизационные модели реакторов на быстрых нейтронах. М.: Атомиздат, 1981.
29. *Jumarie G.* Some technical applications of relativistic information, Shannon information, fuzzy sets, linguistics, relativistic sets and communication.— Cybernetica, 1977, vol. 20, N 2, p. 91—128; New results in relativistic information and general systems. Observed probability, Renyi entropy, relativistic fuzzy sets, generative semantics.— Cybernetica, 1979, vol. 22, N 2, p. 131—158; Futher advances in relativistic information and general systems. Interference of observers.— Cybernetica, 1978, vol. 21, N 1, p. 93—123; A survey a relativistic information and its applications.— In: Information and Systems/Ed. Du Buisson and Menahem. N. Y.: Acad. press, 1979, p. 121—126; Relativity, information, and catastrophe, sybjectivity. A unified approach to general systems.— Cybernetica, 1979, vol. 22, N 4, p. 267—308; A subjectivistic calculus.— Cybernetica, 1980, vol. 23, N 1, p. 47—87.
30. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. М.: Сов. радио, 1974; Количество информации, передаваемое квантовым каналом связи. I. II.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 8, № 1, с. 115—141; Оптимальное различение неортогональных квантовых сигналов при малых гауссовых помехах.— РЭ, 1976, т. 21, № 2, с. 538—545; Один приближенный метод расчета оптимального различения квантовых сигналов на фоне малых помех.— РЭ, 1976, т. 21, № 4, с. 744—751; *Стратонович Р. А., Полякова М. С.* Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. М.: Изд-во МГУ, 1981.
31. *Лебедев Д. С., Левитин Л. Б.* Перенос информации электромагнитным полем.— В кн.: Теория передачи информации. М.: Наука, 1964, с. 5—20; Максимальное количество информации, переносимое электромагнитным полем.— Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 6, с. 1299—1302.
32. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М.: Мир, 1979; Perfomance of quantum signals in unimodal and bimodal optical communications.— In: IEEE Intern. Symp. on Inform. Theory, Santa Monica, California, 1981, Febr. 9—12. N. Y., 1981, p. 39; Optimum quantum decision between a pure and mixed state with application to detection of TCS signals.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1979, vol. 25, N 1, p. 69—76; Quasiprobability distributions and the analysis of the linear quantum channel with thermal noise.— J. Math. Phys., 1979, vol. 20, N 10, p. 2063—2068; Nonclassical states in optical communication to a remote receiver.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1980, vol. 26, N 3, p. 378—382; Detection theory and quantum mechanics.— Inform. and Contr., 1967, vol. 10, p. 254—291; Ibid., 1968, vol. 13, p. 156—171; The minimum variance of estimates in quantum signal detection.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1968, vol. 14, N 2, p. 234—242.
33. *Холево А. С.* Информационные аспекты квантового измерения.— ППИ, 1973, т. 9, № 2, с. 31—42; Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи.— ППИ, 1973, т. 9, вып. 3, с. 3—11; Об одном обобщении неравенства Рао-Крамера.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 2, с. 360—365; Вероятность и

квантовая физика: (Метод характеристических функционалов).— Теория вероятностей и ее применения, 1972, т. 17, вып. 2, с. 388—390; Statistical problems in quantum physics.— In: Proc. 2nd Japan — USSR Symp. on Probab. Theory. Kyoto, 1972, vol. 1, p. 22—40. (См. также: Lect. Notes Math., 1973, vol. 330, p. 104—119); Оптимальные квантовые измерения.— ТМФ, 1973, т. 17, № 3, с .319—326; Statistical decision theory for quantum systems.— J. Multivar. Anal., 1973, vol. 3, N 4, p. 337—394; К теории статистических решений на операторной алгебре.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 1, с. 54—57; Some statistical problems for quantum gaussian states.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1975, vol. 21, N 5, p. 563—584; Исследования по общей теории статистических решений.— (Труды МИАН СССР им. Стеклова В. А., Т. 74); М.: Наука, 1976; Минимаксные измерения параметра квантового состояния.— В кн.: Тез. докл. 5 Междунар. симпоз. по теории информации. М.; Тб.: Наука, 1979, ч. II; Estimation of shift parameters of a quantum states.— Repts Math. Phys., 1978, vol. 13, N 3, p. 379—399; О пропускной способности квантового канала связи.— ППИ, 1979, т. 15, № 4, с. 3—11; Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.

34. *Митюгов В. В.* Физические основы теории информации. М.: Сов. радио, 1976.
35. *Ingarden R. S.* Quantum information theory.— Repts Math. Phys., 1976, vol. 10, N 1, p. 43—72.
36. *Петров В. В., Усков А. С.* Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (непрерывные системы). М.: Энергия, 1975; Основы динамической точности автоматических информационных устройств и систем. М.: Машиностроение, 1976.
37. *Уланов Г. М.* Статистические и информационные вопросы управления по возмущению. М.: Энергия, 1970.
38. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В., Хазен Э. М.* Информационно-семантические проблемы процессов управления и организации. М.: Наука, 1977.
39. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Ульянов С. В.* Теория моделей в процессах управления (информационный и термодинамический аспекты). М.: Наука, 1978; Информационные аспекты эволюционных динамических систем.— Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1978, т. 10, с. 2—74. (Итоги науки и техники).
40. *Цыпкин Я. З.* Оптимизация в условиях неопределенности.— Докл. АН СССР, 1976, т. 228, № 6, с. 1306—1309; Стабилизация и регуляризация оценок оптимальных решений при наличии неопределенности.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 2, с. 304—307; О некоторых свойствах случайного поиска.— АиТ, 1977, № 11, с. 89—94; Адаптивные алгоритмы оптимизации при априорной неопределенности.— АиТ, 1979, № 6, с. 94—108.
41. *Теллер Э.* Современные двигатели внутреннего сгорания.— В кн.: Проблемы лазерного термоядерного синтеза. М.: Атомиздат, 1976.
42. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Кочубиевский И. Д., Хазен Э. М., Ульянов С. В.* Информационные аспекты качественной теории динамических систем.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1976, т. 7, с. 5—206. (Итоги науки и техники).
43. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов в 4-х т. М.: Наука, 1965—1968; Сущность теории относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
44. *Дирак П. А.-М.* Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1968; Релятивистское волновое уравнение электрона.— УФН, 1979, т. 128, вып. 4, с. 681—692.
45. *Моррис У.* Наука об управлении. Байесовский подход. М.: Мир, 1971.
46. *Заде Л., Дезоер Г.* Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.
47. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
48. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1962.
49. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Механика физических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1976.
50. *Кубо Р.* Термодинамика. М.: Мир, 1970.

51. *Гейзенберг В.* Воспоминания об эпохе развития квантовой механики.— В кн.: Теоретическая физика 20 века. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
52. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
53 *Вундгейлер А.* Объекты, инварианты и классификация геометрий.— В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике: (I Междунар. конф. по тензорной дифференциальной геометрии и ее приложениям)/Под ред. В. Ф. Кагана. М.; Л.: ОНТИ, 1937, вып. 4, с. 376—385.
54. *Вагнер В. В.* Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии: Доп.— В кн.: Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М.; Л.: ОНТИ, 1949, с. 135—223.
55. *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.: Гостехиздат, 1940.
56. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1955.
57. *Синдж Дж. Л.* Тензорные методы в динамике. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
58. *Гольденблат И. И.* Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М.: ГТТИ, 1955; Некоторые вопросы качественной теории устойчивости упругих систем.— В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965, с. 53—67.
59. *Тупин Р. А.* Теории упругости, учитывающие моменты напряжения.— В кн.: Механика, 1965, № 3.
60. *Меликов К. В.* О касательных преобразованиях: Доп. к кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.; Л.: ОНТИ, 1937, ч. II, с. 209—223.
61. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
62. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1959.
63. *Ван-дер-Варден Б. Л.* Метод теории групп в квантовой механике.— Харьков: ДНТВУ, 1938.
64. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. Харьков: ДНТВУ, 1938; Классические группы, их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
65. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
66. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980. Т. 2.
67. *Гинзбург В. Л.* Об экспериментальной проверке общей теории относительности.— УФН, 1979, т. 128, вып. 3, с. 435—458; О физике и астрофизике: Какие проблемы представляются сейчас особенно важными и интересными? М.: Наука, 1980; О теории относительности. М.: Наука, 1979; Космические исследования и теория относительности.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1967. М.: Наука, 1967; Что подтверждают измерения гравитационного смещения частоты? — УФН, 1963, т. 81, вып. 4, с. 473—489; Экспериментальная проверка общей теории относительности.— УФН, 1956, т. 59, вып. 1, с. 3—28; Теоретическая физика и астрофизика: (Доп. главы). М.: Наука, 1981.
68. *Бройли Л.* Магнитный электрон (теория Дирака). Харьков: ОНТИ, 1936.
69. *Гольденблат И. И., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Управление релятивистскими и квантовыми динамическими системами.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 14, с. 3—158. (Итоги науки и техники).
70. *Солодовников В. В., Бирюков В. Ф., Тумаркин В. И.* Принцип сложности в теории управления. М.: Наука, 1977.
71. *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность оптимизации. М.: Наука, 1979; Слисенко А. О.— УМН, 1981, т. 3, вып. 6, с. 21—103.
72. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Сложность конечных объектов и информационная теория управления.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 11, с. 77—147. (Итоги науки и техники).

73. *Волькенштейн М. В.* Общая биофизика. М.: Наука, 1978; Биофизика. М.: Наука, 1981.
74. *Блюменфельд Л. А.* Проблемы биологической физики. М.: Наука, 1977.
75. *Эйген М.* Самоорганизация материи и эволюции биологических макромолекул. М.: Мир, 1973.
76. *Эйген М., Винклер Р.* Игра жизни. М.: Наука, 1979.
77. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.
78. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
79. *Бакутова И. Л.* Эволюционное моделирование и его приложения. М.: Наука, 1979.
80. *Шноль С. Э.* Физико-химические факторы биологической эволюции. М.: Наука, 1979.
81. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. М.: Мир, 1979.
82. *Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е.* Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.
83. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
84. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
85. *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
86. *Красовский А. А.* О предельной точности микроуправления.— АиТ, 1973, № 12, с. 27—39; Предельная точность микронаблюдения.— Изв. АН СССР. ТК, 1974, № 3, с. 177—187; Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
87. *Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И.* Управление квантовыми объектами. I, II.— АиТ, 1979, № 4, с. 5—25; № 5, с. 5—23; Управляемость квантовых объектов.— Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 1, с. 65—69.
88. *Ландау Л. Д., Лифшиц И. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
89. *Паули В.* Теория относительности. М.: Гостехиздат, 1947; Релятивистская теория элементарных частиц. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
90. *Ферми Э.* Конспект лекций по квантовой механике. М.: Мир, 1965.
91. *Тоннелла М.-А.* Основы электромагнетизма и теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
92. *Newman D., Ford G. W., Rich A., Sweetman E.* Precision experimental verification of special relativity.— Phys. Rev. Lett., 1978, vol. 40, N 21, p. 1355—1358.
93. *Минковский Г.* Пространство и время.— В кн.: Принцип относительности./Под ред. В. К. Фредерикса, Д. Д. Иваненко. М.: ОНТИ, 1935.
94. *Вертхейм Г.* Эффект Мёссбауэра: Принципы и применения. М.: Мир, 1966.
95. *Гольденблат И. И.* Парадоксы времени в релятивистской механике. М.: Наука, 1972.
96. *Гольденблат И. И.* Некоторые вопросы нелинейной теории упругости. М.: Наука, 1969.
97. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.
98. *Скобельцын Д. В.* Парадокс близнецов в теории относительности. М.: Наука, 1966.
99. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1945. Т. 2.
100. *Лоренц Г. А.* Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света.— В кн.: Принципы относительности/Под ред. В. К. Фредерикса, Д. Д. Иваненко. М.: ОНТИ, 1935.
101. *Пуанкаре А.* О динамике электрона.— В кн.: Принцип относительности/ /Под ред. В. К. Фредерикса, Д. Д. Иваненко. М.: ОНТИ, 1935.
102. *Холтон Д., Эйнштейн, Майкельсон и* «решающий» эксперимент.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1972. М.: Наука, 1974.

103. *Бергман П. Г.* Введение в теорию относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
104. *Смирнов В. Н.* Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1941, Т. 4.
105. *Вебстер А., Сеге Г.* Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.; Л.: ГТТИ, 1934. Ч. 2.
106. *Френкель Я. И.* Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1940.
107. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского и релятивистская механика.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1973, т. 4, вып. 3, с. 773—810; Геометрия Лобачевского как физическая наука.— В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского: (Пленарные докл. Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии). М.: ВИНИТИ АН СССР, 1977, с. 146—153.
108. *Гольденблат И. И.* О парадоксе с часами в теории относительности.— Изв. вузов. Физика, 1961, № 6, с. 38—42.
109. *Румер Ю. Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГТТИ, 1956.
110. *Новожилов Ю. В.* Элементарные частицы. М.: Наука, 1972.
111. *Синг Дж. Л.* Классическая механика. М.: Мир, 1968.
112. *Копылов Г. И.* Основы кинематики резонансов. М.: Наука, 1970.
113. *Анисович К. В.* К экспериментальным основаниям специальной теории относительности.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974, с. 360—395.
114. *Скиллинг Г. Г.* Введение в теорию электромагнитных волн. М.: Связьиздат, 1947.
115. *Россель Ж.* Общая физика. М.: Мир, 1964.
116. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970; On the role of field-theories in our physical concept of geometry.— Lect. Notes Math., 1978, vol. 76, p. 1—80; *Гийемин В., Стернберг С.* Геометрические асимптотики. М: Мир, 1981.
117. *Румер Ю. Б., Фет А. И.* Теория групп и квантованные поля. М.: Наука, 1977; *Румер Ю.. Б.* Спинорное исчисление. М.: ОНТИ, 1936.
118. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: (Методы и приложения). М.; Наука, 1979.
119. *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
120. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
121. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и голоморфная гометрия.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 17, с. 3—55. (Итоги науки и техники).
122. *Weyl H.* Gravitation und Elektrizität.— S.— Ber. Königlich Preußischen Akad. Wiss. Berlin, 1918, H. 26, S. 465—480.
123. *De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* Gauge theories and strong gravity.— Nuovo Cimento, 1979, vol. 50A, N 4, p. 523—554.
124. *Чередник И. В.* Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. I.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 14, с. 175—218. (Итоги науки и техники): Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. II.— В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 18, с. 73—150. (Итоги науки и техники); Релятивистски-инвариантные квазиклассические пределы интегрируемых двумерных квантовых моделей.— ТМФ, 1981, т. 47, № 2, с. 225—229.
125. *Pak N. K., Tze H. C.* Chiral solitons and current algebra.— Ann. Phys., 1979, vol. 117, N 2, p. 117—194.
126. *Wu T. T.* Introduction to gauge theory.— Lect. Notes Math., 1978, vol. 676, p. 161—169.
127. *Дикке Р.* Об экспериментальном базисе общей теории относительности.— В кн.: Гравитация и относительность/Под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана. М.: Мир, 1965, с. 49—72; *Dike R. E., Roll P. G., Krotkov I.* The equivalence of inertial and passive gravitational mass.— Ann. Phys. (N. Y.), 1964, vol. 26, p. 442.
128. *Цзю Х., Гоффман В.* Введение.— В кн.: Гравитация и относительность/Под ред. Х. Цзю, В. Гоффмана. М.: Мир, 1965, с. 15—48.

129. *Брагинский В. Б., Панов В. И.* Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 3, с. 873.
130. *Брагинский В. Б., Манукин А. Б.* Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974.
131. *Руденко В. Н.* Релятивистские эксперименты в гравитационном поле.— УФН, 1978, т. 126, вып. 3, с. 361—401.
132. *Брагинский В. Б.* Экспериментальная проверка теории относительности. М.: Знание, 1977.
133. *Мизнер К., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1973, т. 3.
134. *Лапчинский В. Г., Рубаков В. А.* Сферически-симметричный коллапс в суперпространственной трактовке квантовой гравитации.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, т. 10, с. 99—115; Спонтанное нарушение симметрии в открытой вселенной.— ТМФ, 1980, т. 42, № 1, с. 37—44; *Красников Н. В., Рубаков В. А., Токарев В. Ф.* Динамическое спонтанное нарушение симметрии.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 319—325; *Веряскин А. В., Лапчинский В. Г., Рубаков В. А.* О спонтанном нарушении симметрии в замкнутой космологической модели Фридмана.— ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 407—420.
135. *Андерсон Дж.* Квантование общей теории относительности.— В кн.: Гравитация и относительность. М.: Наука, 1965, с. 435— 467.
136. *Утияма Р.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1979.
137. *Дьяченко С. Е.* Об орбитах планет.— В кн.: Тр. 2-го математ. съезда. М.: ОНТИ, 1936.
138. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
139. *Меллер Х.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975; On the crisis in the theory of gravitational and the possible solutions.— In: Math. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1978, vol. 39, N 13, s. 3—18.
140. *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
141. *Шварцшильд К.* О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 199—207.
142. *Толмен Р.* Относительность: Термодинамика и космология. М.: Мир, 1974.
143. *Шмутцер Э.* Теория относительности: Современные представления. М.: Мир, 1981.
144. *Боулер М.* Гравитация и относительность. М.: Мир, 1979.
145. *Эддингтон А. С.* Теория относительности. Л.: ОНТИ, 1934.
146. *Богоявленский О. И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
147. *Баранов А. Г.* Гравитационное смещение.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1967. М.: Наука, 1967.
148. *Петров А. З.* Понятие энергии в общей теории относительности.— В кн.: Учен. зап. КГУ, 1963, т. 12, кн. 12, с. 14—23.
149. *Вертхейм Г.* Эффект Мёссбауэра: Принципы и применения. М.: Мир, 1966.
150. *Бриллюэн Л.* Новый взгляд на теорию относительности. М.: Мир, 1972.
151. *Гольденблат И. И.* По поводу книги Л. Бриллюэна «Новый взгляд на теорию относительности».— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974, с. 214—223.
152. *Киржниц Д. А., Сазонов В. Н.* Сверхсветовые движения и специальная теория относительности (вводная статья).— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974, с. 84—111.
153. *Биланюк О., Сударшан Е.* Частицы за световым барьером.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974, с. 112—133; *Фейнберг Дж.* О возможности существования частиц, движущихся быстрее скорости света.— Там же, с. 134—177; *Чонка П. Л.* Причинность и сверхсветовые частицы.— Там же, с. 178—188.
154. *Барашенков В. С.* Тахионы: частицы, движущиеся со скоростью больше скорости света.— УФН, 1974, т. 114, вып. 1; Проблемы субатомного пространства и времени. М.: Атомиздат, 1979; *Файнгольд М. И.* К вопросу

о черенковском излучении тахионов.— ТМФ, 1981, т. 47, вып. 3, с. 395—406.
155. *Фридман А. А.* О кривизне пространства.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 320—329; О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства.— Там же, с. 330—336.
156. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1975; *Новиков И. Д.* Эволюция вселенной. М.: Наука, 1981.
157. Современные представления астрофизики. М.: Мир, 1981.
158. *Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии.— УФН, 1970, т. 102, вып. 3, с. 463—494.
159. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969.
160. *Рис М., Руффини Р., Уилер Дж.* Черные дыры, гравитационные волны и космология: Введение в современные исследования. М.: Мир, 1977.
161. Черные дыры: Сб. статей. М.: Мир, 1978.
162. *Зельдович Я. Б., Блинников С. И., Шакура Н. И.* Физические основы строения и эволюции звезд. М.: Изд-во МГУ, 1981.
163. *Ryan M. P., Shepley L. C.* Homogenous relativistic cosmologies. Princeton: Princeton Univ. Press, 1975.
164. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
165. *Гуревич Л. Э., Чернин А. Д.* Введение в космологию. М.: Наука, 1978.
166. *Хоккинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977; *Хоккинг С.* Рождение частиц на черных дырах.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 479—512.
167. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
168. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях (методы и результаты, не связанные с теорией возмущений). М.: Атомиздат, 1980; *Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.* Спонтанное нарушение CP-симметрии в нестационарной изотропной метрике.— ТМФ, 1978, т. 37, № 2, с. 212—223; Нарушение конформной симметрии и квантование в искривленном пространстве-времени.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 347—354; *Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.* О зависимости вакуумных средних тензора энергии-импульса от геометрии и топологии многообразия.— ТМФ, 1979, т. 38, № 3, с. 345—354; Поляризация вакуума и рождение частиц в нестационарном однородном электромагнитном поле.— ЯФ, 1980, т. 30, вып. 5 (11), с. 1301—1311; *Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Изотропные космологические модели, определяемые вакуумными квантовыми эффектами.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 1, с. 20—27; *Мамаев С. Г.* Вакуумные средние тензора энергии-импульса квантовых полей в однородном изотропном пространстве-времени.— ТМФ, 1980, т. 42, № 3, с. 350—361; *Мостепаненко В. М.* О влиянии квантованных полей на метрику пространства-времени в космологии.— ЯФ, 1980, т. 31, вып. 6, с. 1690—1695; Рождение частиц и поляризация вакуума нестационарным электрическим полем.— ТМФ, 1968, т. 45, № 2, с. 210—218; *Гриб А. А., Мостепаненко В. М.* Спонтанное нарушение калибровочной и дискретных симметрий в искривленном пространстве-времени.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, вып. 10, с. 74—91.
169. *Фролов В. П.* Метод Ньюмена — Пенроуза в общей теории относительности.— В кн.: Проблемы общей теории относительности и теория представлений групп. М.: Наука, 1977, с. 72—180. (Тр. ФИАН СССР им. Лебедева; Т. 96); *Алексеев Г. А., Хлебников В. И.* Формализм Ньюмена-Пенроуза и его применение в общей теории относительности.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1978, т. 9, вып. 5, с. 790—870.
170. *Бернштейн И. Н., Шварцман В. Ф.* О связи между размерами Вселенной и ее кривизной.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5 (11), с. 1617—1628.
171. *Седов Л. И.* О локальном уравнении энергии в гравитационном поле.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 568—571; Об описании динамиче-

ских свойств гравитационного поля в вакууме.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 195—204.
172. *Логунов А. А., Денисов В. И., Власов А. А.* и др. Новые представления о пространстве—времени и гравитации.— ТМФ, 1979, т. 40, № 3, с. 291—328; Гравитационные эффекты в полевой теории гравитации.— ТМФ, 1980, т. 43, № 2, с. 147—186; *Денисов В. И., Логунов А. А.* Имеет ли общая теория относительности классический ньютоновский предел?— ТМФ, 1980, т. 45, вып. 3, с. 291—301; *Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Движутся ли протяженные тела по геодезическим риманова пространства—времени?— ТМФ, 1981, т. 47, вып. 1, с. 3—28.
173. *Розенсон Н. А.* Дифференциальные инварианты риманова пространства. II.— В кн.: Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 4, вып. 2, с. 59—84.
174. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969.
175. *Николаенко В. М.* Двойственность гравитации в проблеме квантования.— ТМФ, 1978, т. 34, № 3, с. 334—340; Квадратичные лагранжианы в квантовой гравитации и проблема перенормируемости.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 66—74; Хиггсовские мезоны в калибровочной гравитации.— ТМФ, 1980, т. 42, № 2, с. 195—203.
176. *Пономарев В. Н.* Сингулярности и кручение.— В кн.: Теория относительности и гравитации. М.: Наука, 1976, с. 167—176. *Пономарев В. Н., Пронин П. И.* Рождение безмассовых скалярных частиц полем кручения.— ТМФ, 1979, т. 39, № 3, с. 425—428.
177. *Гурович В. Д., Старобинский А. А.* Квантовые эффекты и регулярные космологические модели.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 5 (11), с. 1683—1700.
178. *Новиков И. Д., Старобинский А. А.* Квантовоэлектродинамические эффекты внутри заряженной черной дыры и проблема горизонтов Коши.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 1, с. 3—18.
179. *Карманов О. Ю., Менский М. Б.* Пропагаторы и рождение пар в однородной изотропной Вселенной.— ТМФ, 1979, т. 41, № 2, с. 245—255; О рождении частиц вблизи космологической сингулярности.— ТМФ, 1980, т. 42, № 1, с. 23—36.
180. *Верешков Г. М., Гришкин Ю. С., Иванов Н. М., Полтавцев А. Н.* Влияние квантовых гравитационных процессов на эволюцию изотропной Вселенной.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 5, с. 1665—1676.
181. *Мальцев В. К.* О ВКБ-приближении для задачи Толмена (коллапсирующая пыль).— ТМФ, 1981, т. 47, № 2, с. 177—183.
182. *Лукаш В. Н.* Рождение звуковых волн в изотропной Вселенной.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5 (11), с. 1601—1615.
183. *Парновский С. Л.* Электромагнитное и скалярное поле вокруг бесконечной нити и других голых особенностей казнеровского типа.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 4, с. 1162—1171; Квантовое излучение голых сингулярностей керровского типа.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 4, с. 1261—1270.
184. *Эйзенхарт С.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
185. *Яненко Н. Н.* Некоторые вопросы теории вложения римановых метрик в евклидовы пространства.— УМН, 1953, т. 8, № 1, с. 21—100.
186. *Фридман А.* Изометрическое погружение римановых многообразий в евклидовы пространства.— В кн.: Гравитация и топология. М.: Мир, 1966, с. 182—188.
187. *Громов М. Л., Рохлин В. А.* Вложения и погружения в римановой геометрии.— УМН, 1970, т. 25, вып. 5 (155), с. 3—62.
188. *Позняк Э. Г., Соколов Д. Д.* Изометрические погружения римановых пространств в евклидовы.— В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1977, т. 15, с. 173—211. (Итоги науки и техники).
189. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
190. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. I, II.
191. *Chernikov N. A., Tagirov E. A.* Quantum theory of scalar field in de Sitter

space-time.— Ann. Inst. Henri Poincaré sect. A: Physique théoreque, 1968, vol. 9, N 2, p. 109—141; *Tagirov E. A.* Consequences of field quantization in de Sitterr type cosmological models.— Ann. Phys., 1973, vol. 76, p. 561—579.
192. *Smalley L. L.* Gravitational radiation in asymptotic de Sitter space.— Intern. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 1, p. 5—20.
193. *Moffat J. W.* Space-time structure in a generalization of gravitation theory.— Phys. Rev., 1977, vol. 15, N 12, p. 3520—3529; *Kunstatter G., Moffat J. W.* Maximal extension of a nonsingular solution in a generalized theory of gravitation.— Phys. Rev., 1978, vol. 17, N 2, p. 396—403.
194. *Drechsler W., Sasaki R.* Soluttions of invariant field equations in the (4, 1) de Sitter spaces.— Nuovo Cimento, 1978, vol. 46A, N 4, p. 527—568.
195. *Кадышевский В. Г.* Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 52—73; Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, вып. 1, с. 5—39; *Волобуев И. П., Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М.* Уравнения движения для скалярного и спинорного полей в четырехмерном неевклидовом импульсном пространстве.— ТМФ, 1979, т. 40, № 3, с. 363—372; *Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Чижов М. В.* К вопросу о разности масс мюона и электрона.— ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 358—364; *Волобуев И. П.* Плоские волны на сфере и некоторые их применения.— ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 421—426.
196. *Il-Tong Cheon.* Hypothesis of the fundamental length and quantum electrodynamics.— Intern. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 8, p. 611—629.
197. *Легкий А. И.* Точное статическое сферически-симметричное решение 5-мерных уравнений Эйнштейна.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10.
198. *Кречет В. Г., Шикин Г. Н.* Закрытая фридмановская космологическая модель с нелинейным скалярным полем типа поля Борна-Инфельда.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 91—99; Анизотропная космологическая модель с взаимодействующими скалярным и электронным полями.— Там же. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с 84—95.
199. *Рубин В. А., Ушаков А. Ю., Чернин А. Д.* Размыкание причинного горизонта частиц в анизотропных космологических сингулярностях.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 3, с. 816—829.
200. *Де Витт Б. С.* Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени.— В кн.: Черные дыры: Сб. статей. М.: Мир, 1978, с. 66—168.
201. *Иваненко Д. Д.* Перспективные обобщения эйнштейновской гравидинамики.— В кн.: Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского». М.: ВИНИТИ, 1977, с. 107—122.
202. *Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д., Старобинский А. А.* Некоторые вопросы геометрии в целом в общей теории относительности.— Там же, с. 122—133; *Кадомцев С. Б.* и др.— В кн.: Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1982, т. 13, с. 157—188.
203. *Белинский В. А., Никомаров Е. С., Халатников И. М.* Исследование космологической эволюции вязкоупругой материи с каузальной термодинамикой.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 2 (8), с. 417—432.
204. *Adler S. L., Lieberman J., Ng Y. J., Tsao H.-S.* Photon pairing instabilittes: A microscopic origin for gravitation.— Phys. Rev., 1976, vol. 14, N 2, p. 359—378.
205. *Пелихов Н. В.* Ранние стадии эволюции пространственно-неоднородных моделей Вселенной.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 3 (9), с. 785—800.
206. *Харьков А. А.* Регуляризация тензора энергии-импульса и рождение частиц в сильном переменном гравитационном поле.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вых. 1, с. 19—34.
207. *Deser S.* Quantum gravitation: Problems and prospects.— Ann. Acad. Sci. N. Y., 1975, vol. 262, p. 292—295.
208. *Hu B. L., Parker L.* Anisotropy damping through quantum effects in the early universe.— Phys. Rev., 1978, vol. 17D, N 4, p. 933—945.

209. *Ford L. H., Parker L.* Creation of particles by singularities in asymptotically flat spacetimes.— Phys. Rev., 1978, vol. 17D, N 6, p. 1485—1496.
210. *Brout R., Englert F., Gunzig E.* The creation of the inverse as a quantum phenomenon.— Ann. Phys., 1978, vol. 115, p. 78—106.
211. *Калашников О. К., Климов В. В.* Калибровочные модели единого взаимодействия и очень ранняя Вселенная.— ЯФ, 1981, т. 33, вып. 6, с. 1572—1580.
212. *Воронов Б. Л., Тютин И. В.* К перенормировке эйнштейновской гравитации.— ЯФ, 1981, т. 33, вып. 6, с. 1710—1722.
213. *Christensen S. M., Fulling S. A.* Trace anomalies and the Hawking effect.— Phys. Rev., 1977, vol. 15D, N 8, p. 2088—2104.
214. *Зельдович Я. Б., Клыпин А. А., Хлопов М. Ю., Чечеткин В. М.* Астрофизические ограничения на массу тяжелых стабильных нейтральных лептонов.— ЯФ, 1980, т. 31, вып. 5, с. 1286—1294.
215. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
216. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 6 (12), с. 1953—1971; Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 1 (7), с. 3—19.
217. *Белинский В. А.* Односолитонные космологические волны.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 4 (10), с. 1239—1254; *Алексеев Г. А., Белинский В. А.* Статические гравитационные солитоны.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 4, с. 1297—1313.
218. *Алексеев Г. А.* N-солитонные решения уравнений Эйнштейна — Максвелла.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, вып. 4, с. 301—303.
219. *Поляченко В. Л., Фридман А. М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
220. *Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д.* Квантование солитонов.— ТМФ, 1975, т. 25, № 2, с. 147—163; Quantum theory of solitons.— Phys. Repts, 1978, vol. 42C, № 1, p. 1—125; *Кулиш П. П., Манаков С. В., Фаддеев Л. Д.* Сравнение точных квантовых и квазиклассических решений для нелинейного уравнения Шредингера.— ТМФ, 1976, т. 28, № 1; с. 38—45; *Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д.* Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 6, с. 1430—1433; *Корепин В. Е.* Надбарьерное отражение солитонов.— ТМФ, 1978, т. 34, № 1, с. 3—14; Непосредственное вычисление спинорной матрицы в массивной модели Тирринга.— ТМФ, 1979, т. 41, № 2, с. 169—189; О квантовании неабелевой цепочки Тода.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 2. М.: Наука, 1981, с. 90—100. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР; Т. 101); *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга.— УМН, 1979, т. 34, вып. 5 (209), с. 13—63; Гамильтонова система, связанная с уравнением $u_{\xi\eta}+\sin u=0$.— В кн.: Тр. МИАН СССР им. Стеклова. М.: Наука, 1976, т. 142, с. 254—266; *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи. I.— ТМФ, 1979, т. 40, № 2, с. 194—220; *Будагов А. С., Тахтаджян Л. А.* Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 4, с. 805—808; *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А.* Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга.— ТМФ, 1979, т. 38, № 1, с. 26—35; *Тахтаджян Л. А.* Квантовый метод обратной задачи и алгебраизованный матричный Бете-анзатц.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. М.: Наука, 1981, с. 158—183 (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 101). *Maki K., Takayama H.* Quantum-statistical mechanics of extended objects. Pt I. Kinks in the one-dimensional sine-Gordon system.— Phys. Rev., 1979, vol. 20D, N 8, p. 3223—3232; Pt. IV. Correlation functions in the one-dimensional kink-bearing systems.— Phys. Rev., 1980, vol. 21B, N 10, p. 4558—4562.
221. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977; *Скотт Э.* Вол-

ны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
222. *Makhankov V. G.* Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems).—Phys. Repts, 1978, vol. 35C, N 1, p. 1—128; *Маханьков В. Г., Федянин В. К.* Новый вид коллективных частице-подобных возбуждений в одномерных системах с резонансным взаимодействием.— ТМФ, 1979, т. 39, № 3, с. 381—392; Солитоноподобные решения уравнений, описывающих возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 4, с. 838—891.
223. *Скотт А., Чжу Ф., Маклафлин Д.* Солитон — новое понятие в прикладных науках.— ТИИЭР, 1973, № 10, с. 79—123; *Хирота Р., Судзуки К.* Теоретическое и экспериментальное исследование солитонов решетки в нелинейных цепях с сосредоточенными параметрами.— Там же, с. 124—132; Солитоны в действии: Сб. статей. М.: Мир, 1981.
224. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн.— УФН, 1979, т. 128, вып. 4, с. 579—624; Хаотическая динамика простых систем.— Природа, 1981, № 2, с. 54—65; Нелинейные волны/Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1981, *Кадомцев Б. Б., Рыдник В. И.* Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981.
225. *Ребби К.* Солитоны.— УФН, 1980, т. 130, вып. 2, с. 329—356.
226. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1980, т. 15, с. 3—94. (Итоги науки и техники).
227. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977; К теории возмущений для солитонов во втором приближении.— ТМФ, 1980, т. 42, № 3, с. 362—373; *Карасев М. В., Маслов В. П.* Квазиклассические солитонные решения уравнения Хартли. Ньютоновское взаимодействие с экранировкой.— ТМФ, 1979, т. 40, № 2, с. 235—414.
228. *Карпман В. И.* Нелиненйые волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973; Система солитонов под действием возмущения: Осциляторные ударные волны.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 1 (7), с. 114—123; Эффекты взаимодействия ионно-звуковых солитонов с резонансными частицами плазмы.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 4(10), с. 1382—1395; *Карпман В. И., Маслов Е. М.* Теория возмущений для солитонов.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 2 (8), с. 537—559.
229. *Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.* Турбулентность солитонов в системе со слабой дисперсией.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 1, с. 70—73; *Горшков К. А., Папко В. В.* Динамические и стохастические колебания решеток солитонов.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 1(7), с. 178—187; *Островский Л. А., Папко В. В., Степанянц Ю. А.* Солитоны и нелинейный резонанс в двумерных решетках.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 2, с. 831—840.
230. *Давыдов А. С.* Влияние электрон-фононного взаимодействия на движение электрона в одномерной молекулярной системе.— ТМФ, 1979, т. 40, № 3, с. 408—421; Элементарные возбуждения типа солитонов в биологии.— В кн.: Методологические и теоретические проблемы биофизики. М.: Наука, 1979, с. 243—255; Движение солитона в одномерной молекулярной решетке с учетом тепловых колебаний.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 2, с. 789—796; Иерархия времен релаксации в теории твердого тела и одномерных молекулярных систем.— УФЖ, 1980, т. 25, №7, с. 1057—1070; Нелинейные колебательные явления в биологии.— В кн.: Нелинейные волны: Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981, с. 42—61; *Давыдов А. С., Энольский В. З.* Движение избыточного электрона в молекулярной цепи при учете взаимодействия с оптическими фононами.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5(11), с. 1888—1897.
231. *Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В.* Солитоны огибающих релятивистских сильных электромагнитных волн.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 1, с. 148—157.
232. *Синицын Ю. А.* Рассеяние электромагнинтых волн ленгмюровскими солитонами.— Физика плазмы, 1979, т. 5, вып. 6, с. 1345—1349.

233. *Симонов Ю. А.* Многомерные стабильные релятивистские солитоны.— ЯФ, 1979, т. 30, вып. 5(11), с. 1457—1472.
234. *Алиев Ю. М., Кузнецов С. В.* Солитоны огибающих электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.— Физика плазмы, 1980, т. 6, вып. 2, с. 372—376.
235. Physica Scripta, 1979, vol. 20, N 3/4.
236. Bäcklund Transformation the Inverse Scattering Method, Solitons, and their Applications.— Lect. Notes. Math., 1976, vol. 256.
237. Extended Systems in field theory, Proc. of the meet. held at Ecole Normale Superieure, Paris, 1975, June 16—21.— Phys. Reps, vol. 23C, N 3, p. 237—374.
238. *Lüscher M., Pohlmeyer K.* Scattering of massless lumps and non-local charges in the two-dimensional classical non-linear σ-model.— Nuclear Physics, 1978, vol. B137, N 1, p. 46—54.
239. *Omnes R.* A new geometric approach to the relativistic string.— Nucl. Phys., 1979, vol. B149, N 2, p. 269—284.
240. *Crampin M., Pirani F. A. E., Robinson D. C.* The soliton connection.— Lett. Math. Phys., 1977, vol. 2, N 1, p. 15—19.
241. *Буслаев В. С.* Решения типа «двойного солитона» для многомерного уравнения $\Box u = F(u)$.— ТМФ, 1977, т. 31, № 1, с. 23—32.
242. *Zakharov V. E., Mikhailov A. V.* On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time.— Communs Math. Phys., 1980, vol. 74, N 1, p. 21—40.
243. *Джорджадзе Г. П., Погребков А. К., Поливанов М. К.* Сингулярные решения уравнения $\Box\varphi + (m^2/2)\exp\varphi = 0$ и динамика особенностей.— ТМФ, 1979, т. 40, № 2, с. 221—234; Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 2, с. 318—320; *Джорджадзе Г. П.* Регулярные решения уравнения Лиувилля.— ТМФ, 1979, т. 41, № 1, с. 33—39; *Погребков А. К.* Полная интегрируемость динамических систем, порождаемых сингулярными решениями Лиувилля.— ТМФ, 1980, т. 45, № 2, с. 161—170.
244. *Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л., Нестеренко В. В.* Релятивистская струна в постоянном однородном электромагнитном поле.— ТМФ, 1977, т. 32, № 2, с. 176—186; *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.* Солитоны в некоторых геометрических теориях поля.— ТМФ, 1979, т. 40, № 1, с. 15—27 (J. Phys. A: Math. Gen., 1980, vol. 13, N 2, p. 301—312); *Барбашов Б. М., Кашкаров А. Л.* Геометрический подход к динамике релятивистской струны.— ТМФ, 1979, т. 39, № 1, с. 27—34; Обобщение модели релятивистской струны в рамках геометрического подхода.— ТМФ, 1980, т. 45, № 3, с. 365—376 (см. также: Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 359—365); *Нестеренко В. В.* О геометрической интерпретации уравнения $\varphi_{911} - \varphi_{922} = e^{\Phi} - e^{-2\Phi}$. Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. P2—80—342. Dubna, 1980.
245. *Nambu Y.* QCD and the string model.— Phys. Lett., 1979, vol. 80B, N 4, 5, p. 372—376.
246. *Gervais J.-L., Neveu A.* The quantum dual string wave functional in Yang — Mills theories.— Phys. Lett., 1979, vol. 80B, N 3, p. 255—258.
247. *Gava E., Jengo R., Omero C.* The 0(5) nonlinear σ-model as a SU(2) gauge theory.— Phys. Lett., 1979, vol. 81B, N 2, p. 187—189.
248. *Polyakov A. M.* String representations and hidden symmetries for a gauge fields.— Phys. Lett., 1979, vol. 82B, N 2, p. 247—250; Gauge fields as rings of glue.— Nucl. Phys., 1979, vol. B164, p. 171—188.
249. *Durand L., Mendel E.* Functional equations for path-dependent phase factors.— Phys. Lett., 1979, vol. 85B, N 2/3, p. 241—245.
250. *Kafiev Yu. M.* Four-dimensional σ-model on quaternionic projective space.— Phys. Lett., 1979, vol. 87B, N 3, p. 219—221; Четырехмерная σ-модель с инстантонами.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 4(10), с. 1091—1097.
251. *Gürsey F., Jafarizadeh M. A., Tze H. C.* Quaternionic multi $S^4 \approx HP$ (1) gravitational and chiral instantons.— Phys. Lett., 1979, vol. 88B, N 3/4, p. 282—286.
252. *Zamolodchikov Al. B., Zamolodchikov A. B.* Factorized S-Matrices in two-dimensional as the exact solutions of certain relativistic quantum field theo-

ry models.— Ann. Phys., 1979, vol. 120, p. 252—291; *Замолодчиков А. Б.* Точная двухчастичная S-матрица квантовых солитонов модели sine-Gordon.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, вып. 10, с. 499—502.

253. *Kumar A., Nisichenko V. P., Rybakov Y. P.* Stability of charged solitons.— Intern. J. Theor. Phys., 1979, vol. 18, № 6, p. 425—432; *Кунду А., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* О структуре топологических солитонов.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с. 14—22.
254. *Лычагин В. В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка.— УМН, 1979, т. 34, вып. 1(205), с. 137—165; *Рубцов В. Н.* О законах сохранения и симметриях нелинейных уравнений типа Клейна — Гордона.— Там же, с. 159—164.
255. *Семенов-Тян-Шанский М. А., Фаддеев Л. Д.* К теории нелинейных киральных полей.— Вестн. ЛГУ, 1977, № 13, с. 81—88.
256. *Изергин А. Г., Корепин В. Е., Семенов-Тян-Шанский М. А., Фадеев Л. Д.* О калибровочных условиях для поля Янга — Миллса.— ТМФ, 1979, т. 38, № 1, с. 3—14.
257. *Fröhlich J.* New super-selection sectors («Soliton-states») in two dimensional Bose quantum field models.— Communs Math. Phys., 1976, vol. 47, p. 269—310.
258. *Pohlmeyer K.* Integrable Hamiltonian systems and interactions through quandratic constraints.— Communs. Math. Phys., 1976, vol. 46, p. 207—221.
259. *Neveu A., Papanicolaou N.* Integrability of the classical $[\psi_i\psi_i]^2$ and $[\psi_i\psi_i]_2{}^2$—$[\psi_i\gamma_5\psi_i]_2{}^2$ interactions.— Communs Math. Phys., 1978, vol. 58, N 1, p. 31—64.
260. *Боголюбский И. Л., Маханьков В. Г.* О времени жизни пульсирующих солитонов в некоторых классических моделях.— Письма в ЖЭТФ, 1976, с. 24, вып. 1, с. 15—18; Динамика сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, вып. 2, с. 120—123; Динамика сферически-симметричных пульсонов в нелинейных скалярных моделях теории поля.— В кн.: Программирование и математические методы решения физических задач: (Тр. совещ. по программированию и математ. методам решения физ. задач). Дубна: ОИЯИ, 1978, с. 43—45; Численное исследование столкновений одномерных и двумерных пульсонов в модели нелинейного уравнения Клейна — Гордона.— Там же, с. 33—37.
261. *Коноплич Р. В.* О вероятности распада метастабильного вакуума.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 4(10), с. 1132—1137.
262. *Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С.* Частицеподобные решения уравнений калибровочных теорий поля.— ТМФ, 1976, т. 26, № 3, с. 397—402; О связи частицеподобных решений классических уравнений с квантовыми частицами.— ЯФ, 1975, т. 22, с. 622—631; *Романов В. Н., Фролов И. В., Шварц А. С.* О сферически-симметричных солитонах.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 305—318; Магнитные монополи в единых теориях электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 4(10), с. 1138—1141; *Гайдук А. В., Романов В. Н., Тюпкин Ю. С.* и др. Симметричные поля в калибровочных теориях и соответствующие им решения.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике: (Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 28—30 ноября 1979 г.). М.: Наука, 1980, т. II, с. 205—210; *Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Фролов И. В., Шварц А. С.* Квантовые флуктуации инстантонов в различных моделях.— Там же, с. 211—216; Квантовые флуктуации инстантонов в двумерной нелинейной анизотропной σ-модели.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 1(7), с. 299—300; *Фролов И. В.* Квантовые флуктуации инстантонов в обобщенных нелинейных σ-моделях.— ЯФ, 1981, т. 33, вып. 2, с. 506—515.
263. *Гетманов Б. С.* Интегрируемая модель нелинейного комплексного скалярного поля с нетривиальной асимптотикой солитонных решений.— ТМФ, 1979, т. 38, № 2, с. 186—194; Уравнение «sine-Gordon» как модель нелинейного скалярного поля в формализме Дэффина — Кеммера.— ЯФ, 1980 т. 32, вып. 1(7), с. 293—296.

264. *Майер В., Салье Н.* К общерелятивистской феноменологической теории сверхпроводимости.— ТМФ, 1979, т. 38, № 3, с. 408—416.
265. *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.* Явные решения некоторых вполне интегрируемых гамильтоновых систем.— Функцион. анализ и его прил., 1977, т. 11, вып. 1, с. 75—76; Квантовые системы, связанные с системами корней, и радиальные части операторов Лапласа.— Там же, 1978, т. 12, вып. 2, с. 57—65; Explicit solutions of classical generalized Toda models.— Invent. math., 1979, vol. 54, p. 261—269; Цепочка Тода как редуцированная система.— ТМФ, 1980, т. 45, № 1, с. 3—18.
266. *Шварц А. С.* Эллиптические операторы в квантовой теории поля.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1981, т. 18, с. 113—173. (Итоги науки и техники); *Романов В. Н., Шварц А. С.* Аномалии и эллиптические операторы.— ТМФ, 1979, т. 41, № 2, с. 190—204; *Худавердян О. М., Шварц А. С.* Мультипликативные функционалы и калибровочные поля.— ТМФ, 1981, т. 46, № 2, с. 187—198; *Гайдук А. В., Худавердян О. М., Шварц А. С.* Мультипликативные функционалы на кривых, аддитивные функционалы на поверхностях; их роль в квантовой теории поля.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике: (Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 28—30 ноября 1979 г.). М.: Наука, 1980, т. II, с. 201—204.
267. *Coleman S.* Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model.— Phys. Rev., 1975, vol. 11D, N 8, p. 2088—2097.
268. *Dashen R. F., Hasslasher B., Neveu A.* Particle spectrum in model field theories from semiclassical functional integral techniques.— Phys. Rev., 1975, vol. 11D, N 12, p. 3424—3450.
269. *Фаддеев Л. Д.* Некоторые замечания о многомерных солитонах.— Lett. Math. Phys., 1976, vol. 1, p. 289; В поисках многомерных солитонов.— В кн.: Нелокальные, нелинейные и ненормируемые теории поля. Дубна: ОИЯИ, 1977, с. 207; Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля.— В кн.: Проблемы квантовой теории поля: (Тр. 5-го Междунар. совещ. по нелокальным теориям поля, Алушта, 1979). Дубна: ОИЯИ, 1979, с. 249—299; *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга.— В кн.: Дифференциальная геометрия группы Ли к механике. IV. М.; Л.: Наука, 1981, с. 134—178. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 109).
270. *Kaup D. J., Newell A. C.* Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media: a singular perturbation theory.— Proc. Roy. Soc. London, 1978, vol. A361, p. 413—446; *Kaup D. J.* The Estabrook — Wahlquist method with examples of application.— Physica, 1980, vol. 1A, N 4, p. 391—411.
271. *McLaughlin D. W., Scott A. C.* Perturbation analysis of fluxon dynamics.— Phys. Rev., 1978, vol. 18A, N 4, p. 1652—1680.
272. *Scott A. C.* Magnetic flux annihilation in a large Josephson function.— Lect. Notes Phys., 1979, vol. 93, p. 118—174.
273. *Christiansen P. L., Olsen O. H.* Reflection of fluxons on a Josephson line cavity.— Physica, 1980, vol. 1D, N 4, p. 412—419.
274. *Chinea F. J.* On the intrinsic geometry of certain nonlinear equations: The sine-Gordon equation.— J. Mat. Phys., 1980, vol. 21, N 7, p. 1588—1592.
275. *Leibbrandt G., Morf R., Wong S.-S.* Solutions of sine-Gordon equation in higher dimensions.— J. Math. Phys., 1980, vol. 21, N 7, p. 1613—1624.
276. *Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.* Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса — Невье.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 1, с. 214—228; Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 2. М.: Наука, 1981, с. 101—110. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 101).
277. *Кулиш П. П., Цыпляев С. А.* Суперсимметричная модель $\cos \Phi_2$ и метод обратной задачи.— ТМФ, 1981, т. 46, № 2, с. 172—186.
278. *Герджиков В. С., Кулиш П. П.* Вывод преобразования Беклунда в формализме обратной задачи теории рассеяния.— ТМФ, 1979, т. 39, № 1, с. 69—74; Разложение по «квадратам» собственных функций матричной линейной системы.— В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистиче-

ской физики. М.: Наука, 1981, с. 46—63. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 101); *Кулиш П. П.* Реализация алгебры Замолодчикова — Фаддеева.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IV. Л.: Наука, 1981, с. 83—92. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 109).

279. *Склянин Е. К.* Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. Л.: Наука, 1980, с. 55—128. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 95); О полной интегрируемости уравнений Ландау — Лифшица: Препринт ЛОМИ АН СССР. N=E=3=1979. М., 1979.
280. *Кулиш П. П., Склянин Е. К.* О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. III. М.: Наука, 1980, с. 129—160. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 95).
281. *Докторов Е. В.* Вполне интегрируемые нелинейные уравнения и соответствующий им класс калибровочных полей.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике: (Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 28—30 ноября 1979). М.: Наука, 1980, т. II, с. 323—329.
282. *Ахундова Э. А., Додонов В. В., Манько В. И.* Интегралы движения и нелинейные формы линейных уравнений.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике: (Тр. Междунар. семинара, 28—30 ноября 1979). М.: Наука, 1980, т. II, с. 348—354.
283. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Точные цилиндрически симметричные решения классических уравнений калибровочных теорий для произвольных компактных групп Ли.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1980, т. 11, вып. 1, с. 40—91; Cylindrical configuration of classical Yang — Mills fields and its symmetrical properties.— Phys. Lett., 1978, vol. 76B, N 1, p. 108—110; Spherically symmetric equations in gauge theories for an arbetrary semisimple compact Lie group.— Phys. Lett., 1978, vol. 79B, N 3, p. 294—296; Cylindrically symmetric instantons for the gauge groups of rank 2 (SU(3), 0(5) and G_2).— Phys. Lett., 1979, vol. 83B, N 3/4, p. 314—316; Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha, zz}=\exp(kx_\alpha)$ and its integrability.— Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 489—494; Теория представлений и интегрирование нелинейных сферически-симметричных уравнений калибровочных теорий.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике (Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 28—30 ноября 1979). М.: Наука, 1980, т. II, с. 308—316; *Лезнов А. Н.* О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерных пространствах.— ТМФ, 1980, т. 42, № 3, с. 343—349; *Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.* Общие решения двумерной системы уравнений Вольтерра, реализующих преобразования Бэклунда для цепочки Тода.— ТМФ, 1981, т. 47, № 2, с. 216—223.
284. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Резольвента и гамильтоновы системы.— Функцион. анализ и его прил., 1977, т. 11, вып. 2, с. 11—27; Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля.— Там же, 1979, т. 13, вып. 1, с. 8—20; Исчисление струй и нелинейные гамильтоновы системы.— Там же, 1978, т. 12, вып. 2, с. 8—23; Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега-де Фриза.— УМН, 1975, т. 30, вып. 5, с. 67—100; *Дикий Л. А.* Функция Грина дифференциальных операторов и гамильтоновы системы.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 36—44.
285. *Веселов А. П.* О гамильтоновом формализме для уравнений Новикова — Кричевера коммутативности двух операторов.— Функцион. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 1, с. 1—7.
286. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем.— Функцион. анализ и его прил., 1978, т. 12, вы. 2, с. 46—56; Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями.— В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Изд-во МГУ, 1981, вып. 20, с. 5—54.
287. *Шабат Г. Б.* Об одной системе уравнений С. П. Новикова.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 2, с. 89—90.

288. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функцион. анализ и его прил., 1977, т. 11, вып. 1, с. 15—31; Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, т. 32, вып. 6(198), с. 183—207; Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.— Функцион. анализ и его прил., 1978, т. 12, вып. 3, с. 20—31; О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой.— Функцион. анализ и его прил., 1978, т. 12, вып. 1, с. 76—78.
289. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП). I.— Функцион. анализ и его прил., 1978, т. 12, вып. 4, с. 41—52; Голоморфные расслоения и уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП).— УМН, 1978, т. 3, вып. 5(203), с. 209—211.
290. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры.— Функцион. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 4, с. 13—30; Препринт ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша. М., 1979.
291. *Виноградов А. М., Купершмидт Б. А.* Структура гамильтоновой a механики.— УМН, 1977, т. 32, вып. 4(196), с. 175—236; *Виноградов А. М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1980, т. 11, с. 89—134. (Итоги науки и техники).
292. *Гельфанд И. М., Манин Ю. И., Шубин М. А.* Нелинейные уравнения в частных производных и гамильтоновы струкуры.— УМН, 1977, т. 32, вып. 3(195), с. 209—210.
293. *Богаевский В. Н., Мазур Н. Г., Повзнер А. Я.* «Об интегрируемых» нелинейных уравнениях в частных производных.— УМН, 1977, т. 32, вып. 3(195), с. 212—213.
294. *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А., Френкель И. Е.* Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 802—805; *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.* Семейство гамильтоновых структур, иерархия гамильтонианов и редукция для матричных дифференциальных операторов первого порядка.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 2, с. 77—78; Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations.— Invent. Math., 1979, vol. 54, № 1, p. 81—100; *Рейман А. Г.* Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли.— В кн.: Дифференциальная геометрия групп Ли и механика. III. М.: Наука, 1980, с. 3—54. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 95).
295. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Уравнение Кортевега—де Фриза с групповой точки зрения.— Докл. АН СССР, 1974, т. 244, № 1, с. 56—61; *Жибер А. В., Шабат А. Б.* Уравнения Клейна—Гордона с нетривиальной группой.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1103—1107; *Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Уравнения типа, Лиувилля.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 1, с. 26—29; Алгебры Ли—Беклунда нелинейных дифференциальных уравнений.— УМН, 1979, т. 34, вып. 2, с. 148—149.
296. *Ибрагимов Н. Х.* К теории групп преобразований Ли—Беклунда.— Матем. сб., 1979, т. 109(151), № 2(6), с. 229—253; *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли—Беклунда.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 1, с. 25—36.
297. *Соколов В. В., Шабат А. Б.* (L, A)-пары и замена типа Рикатти.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 2, с. 79—80.
298. *Елеонский В. М., Кирова Н. Н., Кулагин Н. Е.* О случайном вырождении самолокализованных решений уравнений Ландау—Лифшица.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 6(12), с. 2210—2219; Новый закон сохранения для уравнений Ландау — Лифшица.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 1(7), с. 409—413; О точных решениях уравнений Ландау—Лифшица для слабых ферромагнетиков. ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 1, с. 357—363.
299. *Боровик А. Е., Робук В. Н.* Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау—Лифшица, описывающего нелинейную ди-

намику ферромагнетика с одноосной анизотропией.— ТМФ, 1981, т. 46, № 3, с. 371—381.
300. *Прикарпатский А. К.* Геометрическая структура и преобразования Бэклунда нелинейных эволюционных уравнений, обладающих представлением Лакса.— ТМФ, 1981, т. 46, № 3, с. 382—393; Почти периодические решения модифицированного нелинейного уравнения Шредингера.— ТМФ, 1981, т. 47, № 3, с. 323—332.
301. *Mansouri R., Sexl R. U.* A test theory of special relativity. Pt I. Simultaneity and clock synchronization.— General Relativity and Gravitation.— 1977, vol. 8, N 7, p. 497—513. Pt II. First order test.— Ibid., 1977, vol. 8, N 7, p. 515—524. Pt III. Second-order test.— Ibid., 1977, vol. 8, N 10, p. 809—814.
302. *Иваницкая О. С., Костюкович Н. Н.* Классификация некоторых гравитационных эффектов, предсказанных общей теорией относительности.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 154—169; *Иваницкая О. С.* Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. Минск: Наука и техника, 1979.
303. *Грищук Л. П.* Гравитационные волны в космосе и в лаборатории.— УФН, 1977, т. 121, вып. 4, с. 629—656.
304. *Коноплева Н. П.* Гравитационные эксперименты в космосе.— УФН, 1977, т. 123, вып. 4, с. 537—563; О структуре физических теорий.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 337—345.
305. Тезисы докладов 5-й Советской гравитационной конференции. М.: Изд-во МГУ, 1981.
306. *Власов А. А., Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Гравитационные эффекты в полевой теории гравитации.— ТМФ, 1980, т. 43, № 2, с. 147—186.
307. *Shapiro I.* Testing general relativity: progress, problems and prospects.— General Relativity and Gravitation, 1972, vol. 3, N 2, p. 135—148.
308. *Braginsky V. B., Caves C. M., Thorne K. S.* Laboratory experiments to test relativistic gravity.— Phys. Rev., 1977, vol. 15D, N 8, p. 2047—2068.
309. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.
310. *Haugan M. P., Will C. M.* Weak interactions and Eötvös experiments.— Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 37, N 1, p. 1—4; Principle of equivalence, Eötvös experiments, and gravitational red-shift experiments. The free fall electromagnetic systems to post-post-Coulombian order.— Phys. Rev., 1977, vol. 15, p. 2711—2720.
311. *Williams J. G., Dicke R. H., Bender P. L.* et al. New test of the equivalence principle from lunar laser ranging.— Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 36, N 11, p. 551—554.
312. *Shapiro I., Counselman C. C.,* III, *King R. W.* Verification of the principle of equivalence for massive bodies.— Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 36, N 11, p. 555—558.
313. *Brecher K.* Possible test of the strong principle of equivalence.— Astrophys. J., 1978, vol. 219, N 1, p. L117—L118.
314. *Hsu J. P.* Analysis of weak interactions and Eötvös experiments.— Phys. Rev., 1978, vol. 17D, N 12, p. 3164—3167.
315. *Enosh M., Kovetz A.* Is active gravitational mass equal to inertial mass?— Intern. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 7, p. 549—555.
316. *Дирак П. А. М.* Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978.
317. *Найда О. Н., Смородинский Я. А.* Оптическая изотропия пространства и ее связь с принципом эквивалентности.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 4, с. 1153—1160.
318. *Тредер Г.* Теория гравитации и принципы эквивалентности. М.: Атомиздат, 1973; Сб. науч. трудов: Классическая и квантовая теории гравитации; Релятивистская астрофизика; Гравитационный эксперимент. Минск: Изд-во Ин-та физики АН БССР, 1976.
319. *Колосницын Н. И., Осипова А. В.* Нарушение принципа эквивалентности и аномальные вековые движения планет.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 175—

181; Аномальные движения планет при нарушении принципа эквивалентности.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с. 149—151.
320. *Панов В. И., Фронтов В. Н.* Эксперимент Кавендиша на больших расстояниях.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 5(11), с. 1071—1077.
321. *Брагинский В. Б.* Физические эксперименты с пробными телами. М.: Наука, 1970; Гравитационные эксперименты от Кавендиша до наших дней.— Природа, 1981, № 12, с. 70—75.
322. Определение постоянной тяготения и измерение некоторых тонких гравитационных эффектов/Под ред. Ю. Д. Буланже, М. У. Сагитова. М.: Наука, 1973.
323. *Vessot R. F. C., Levine M. W.* A test of the equivalence principle using a space-Born clock.— General Relative and Gravitation, 1979, vol. 10, N 3, p. 181—204.
324. *Hellings R. W.* Testing relativistic theories of gravity with spacecraft-Doppler gravity-wave detection.— Phys. Rev., 1978, vol. 17D, N 12, p. 3158—3163.
325. *Кислик М. Д., Колюка Ю. Ф., Котельников В. А.* и др. Определение орбит Земли и Венеры, астрономической единицы и радиуса Венеры на основе радиолокационных наблюдений Венеры в 1962—1977 г.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 5, с. 1046—1049; Определение орбит Марса и Земли на основе радиолокационных наблюдений Марса в 1964—1977 гг.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 1, с. 78—80; 1980, т. 255, № 3 и № 6.
326. *Брумберг В. А., Финкельштейн А. М.* Проблемы сопоставления результатов наблюдений и теоретических данных при проверке релятивистских эффектов в солнечной системе.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 5, с. 1474—1487.
327. *Брагинский В. Б., Рутман Г. И.* О возможности регистрации гравитационного излучения в лабораторных условиях.— ЖЭТФ, 1962, т. 41, вып. 1(7), с. 15—26.
328. *Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И.* К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, вып. 2, с. 341—349.
329. *Гольденблат И. И.* Взаимодействие упруго-деформирующейся среды с гравитационным полем.— В кн.: Тез. докл. III Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: Изд-во МГУ, 1968.
330. *Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Руденко В. Н.* О приеме гравитационного излучения внеземного происхождения.— Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 10, вып. 2, с. 437.
331. *Брагинский В. Б., Руденко В. Н.* Релятивистские гравитационные эксперименты.— УФН, 1970, т. 100, вып. 3, с. 395; Gravitational waves and the detection of gravitational radiation.— Phys. Repts, 1978, vol. 46, N 3, p. 165.
332. *Захаров В. Д.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.
333. *Глинер Э. Б., Митрофанов И. Г.* Асимметричный ротатор как детектор монохроматического гравитационного излучения.— ЖЭТФ, 1979, вып. 6, с. 1873—1880.
334. *Сидоров В. М.* Воздействие плоских гравитационных волн произвольной частоты на осциллятор — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 5, с. 1107—1111.
335. *Борисова Л. Б., Владимирова Л. Ф.* Монадные критерии гравитационно-инерциальных волн; воздействие гравитационно-инерциальных волн разных типов на детектор.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 181—187.
336. *Борисова Л. Б.* К методике детектирования гравитационных волн.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с. 142—148.
337. *Billing H.* et al. Results of the Munich—Frascati gravitational-wave experiments.— Lett. Nouvo Cimento, 1975, vol. 12, N 11, p. 111; The Munich gravitational-wave detector.— Nuovo Cimento, 1976, vol. 33, N 2, p. 665.
338. *Levine J. L., Garwin R. L.* Absense of gracity-wave signals in a bar at 1695 Hz.— Phys. Rev. Lett., 1973, vol. 31, N 3, p. 173.

339. *Lee M.* et al. Gravitational-radiation-detector observations in 1973 and 1974.— Phys. Rev., 1976, vol. 14D, N 4, p. 893.
340. *Narihara K., Hirakawa H.* Gravitational radiation detectors at 145 Hz.— Jap. J. Appl. Phys., 1976, vol. 15, N 5, p. 833.
341. *Pizzella G.* On the data analysis algorithm for gravitational-wave experiments.— Lett. Nuovo Cimento, 1976, vol. 15, N 14, p. 501.
342. *Kafka P., Schnupp L.* Final results of the Munich-Francati gravitational radiation experiments.— Astron. and Astrophys. 1978, vol. 70, N 1, p. 97.
343. *Алексеев А. Д., Колосницын Н. И., Московкин В. М.* Нелинейный алгоритм для обработки данных граватиционно-волновых измерений.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с. 152—164.
344. *Владимиров Ю. С.* Квантовая теория гравитации.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1972. М.: Наука, 1974, с. 280—340.
345. *Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И.* Квантовомеханические ограничения в макроскопических экспериментах и современная экспериментальная техника.— УФН, 1974, т. 114, вып. 1, с. 41—53.
346. *Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.* Квантовые особенности пондемоторного измерителя электромагнитной энергии.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 4(10), с. 1340—1343; Оптимальные квантовые измерения в детекторах гравитационного излучения.— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, вып. 5, с. 296—301.
347. *Брагинский В. Б., Халили Ф. Я.* Оптико-магнитные эффекты и невозмущающий счет квантов.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 5, с. 1712—1717. (См. также: Обратный эффект Фарадея и счет одиночных фотонов.— Природа, 1981, № 2, с. 105—106).
348. *Брагинский В. Б., Колесов В. В.* О чувствительности различных методов измерения магнитных полей.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 305—307. (См. также: Лазер измеряет сверхмалые СВЧ-поля.— Природа, 1980, № 5, с. 112).
349. *Брагинский В. Б., Вятчанин С. П.* Гравитационные волны и предельная стабильность частоты автогенераторов.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, вып. 3, с. 828—832.
350. *Брагинский В. Б., Вятчанин С. П., Панов В. И.* О предельной стабильности частоты автогенераторов.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 3, с. 583—585.
351. *Гусев А. В., Руденко В. Н.* Гравитационная антенна со сверхпроводящими элементами.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, вып. 4, с. 1217—1230; Квантовый интерферометр как регистрирующий элемент гравитационной антенны.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, вып. 3, с. 819—827; Квантовомеханический анализ чувствительности гравитационной антенны.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 5, с. 1488—1499.
352. *Менский М. Б.* Квантовые ограничения на измерения параметров движения макроскопического осциллятора.— ЖЭТФ, 1979, т. 17, вып. 4(10), с. 1326—1339.
353. *Додонов В. В., Манько В. И., Руденко В. Н.* Невозмущающее измерение в гравитационно-волновом эксперименте.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 3, с. 881—886; Квантовая электроника, 1980, т. 7, № 10, с. 2124—2135.
354. *Грищук Л. П., Сажин М. В.* Квантовый электромагнитный осциллятор в поле гравитационной волны и проблема неразрушающих измерений.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 4, с. 1249—1260.
355. *Gräfe N., Dehnen H.* The interaction of quantum mechanical oscillator with gravitational radiation.— Intern. J. Theor. Phys., 1976, vol. 15, N 6, p. 393—409.
356. *Thorne K. S., Drever R. W. P., Caves C. M.* et al. Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators.— Phys. Rev. Lett., 1978, vol. 40, N 11, p. 667—671; *Thorne K. S.* Gravitational waves research.— Rev. mod. phus., 1980, vol. 52, N 2, p. 285—296.
357. *Unruh W. G.* An analysis of quantum-nondemolition measurement. Univ. of Brit. Columbia Prepr., 1977; Quantum nondemolition measurement and coherent states.— Phys. Rev., 1978, vol. 17D, N 4, p. 1180—1181; Ibid., 1978,

vol. 18D, N 6, p. 1764; Quantum nondemolition measurement and gravity-wave detection.— Ibid., 1979, vol. 19D, N 10, p. 2888—2896.
358. *Moncrief V.* Coherent states and quantum nonperturbing measurements.— Ann. Phys., 1978, vol. 114, p. 201—214.
359. *Hollenhorst J. N.* Quantum limits on resonant-mass gravitational-radiation detectors.— Phys. Rev., 1979, vol. 19D, N 6, p. 1669—1679.
360. *Корниенко Л. С., Штейншлейгер В. Б.* Квантовые усилители и их применение в космических исследованиях.— УФН, 1978, т. 126, вып. 2, с. 287—309.
361. *Белоцерковский О. М.* Новые численные модели в математической физике и задачи взаимодействия солнечного ветра с космическими объектами.— УФН, 1977, т. 121, вып. 4, с. 727—729.
362. *Гослинг Дж., Хундхаузен А.* Волны в солнечном ветре.— УФН, 1978, т. 124, вып. 4, с. 685—696.
363. *Davidson W.* Tests of gravitational theories using space probes.— Intern. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 8, p. 651—662.
364. *Яковлев О. И.* Распространение радиоволн в Солнечной системе.— М.: Сов. радио, 1974.
365. *Аллей Ч., Катлер Л., Рейссе Р.* и др. Измерение при помощи атомных часов общерелятивистских разностей времени при авиаполетах путем прямых сверок времени, а также телеметрических сверок, проводимых посредством лазерных импульсов.— В кн.: [309, с. 575].
366. *Джозефсон Б.* Температурный сдвиг энергии квантов, испущенных твердым телом.— В кн.: Эффект Мёссбауэра. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
367. *Паунд Р., Ребка Г.* Гравитационное смещение в ядерном резонансе.— В кн.: Новейшие проблемы гравитации.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961; Эффективный вес фотона.— Там же.
368. *Паунд Р., Снайдер Дж.* Действие гравитации на гамма-измерение.— В кн.: [309, с. 574].
369. *Чампни Д., Мун П.* Отсутствие доплеровского смещения в опыте с источником и детектором γ-лучей, вращающимися по одной и той же круговой орбите.— В кн.: Эффект Мёссбауэра. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
370. *Essen L.* A time dilatation experiment based on Mössbauer effect.— Proc. Phys. Soc., 1965, vol. 86A, p. 671.
371. *Лаврентьев М. Е.* Леонид Иванович Седов: (К семидесятилетию со дня рождения).— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 963—970.
372. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
373. *Hoag D. G., Wrigley W.* Navigation and guidance in interstellar space.— Acta Astronaut., 1975, vol. 2, N 5/6.
374. *Досыбеков К.* Релятивистские эффекты в динамике космических летательных аппаратов.— В кн.: Математика и механика. Алма-Ата: Изд-во Каз. ун-та, 1979, вып. 14, с. 114—120.
375. *Писаренко В. Г.* Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейной теории поля. Киев: Наук. думка, 1974.
376. *Люстерник Л. А.* Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. (Тр. МИАН СССР им. Стеклова; Т. 19).
377. *Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
378. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979; Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
379. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
380. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
381. *Brattelli O., Robinson W. D.* Operator algebras and quantum statistical mechanics. I. C* and W*-algebras, symmetry groups, decomposition of states. N. Y.; B.: Spring. Verl., 1979.
382. *Шноль Э. Э.* О группах, соответствующих простейшим задачам механики.— ТМФ, 1972, т. 11, № 3, с. 344—353.
383. *Зайцев Г. А.* Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М.: Наука, 1974.

384. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
385. *Максимов В. М.* Макроскопические наблюдаемые в алгебраической статистической физике.— ТМФ, 1974, т. 20, № 1, с. 18—27; Динамика в пространстве и уравнение Гейзенберга.— ТМФ, 1976, т. 26, № 3, с. 382—386.
386. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры.— УФН, 1972, т. 107, вып. 3, с. 463—487.
387. *Гэрни Р. В.* Введение в квантовую механику. Л.; М.: ОНТИ, 1935.
388. *Блохинцев Д. И.* Классическая статистическая физика и квантовая механика.— УФН, 1977, т. 122 вып. 4, с. 745—757; Квантовая механика: Лекции по избранным вопросам. М.: Атомиздат, 1981.
389. *Мессиа А.* Квантовая механика. М.: Наука, 1978, 1979. Т. 1, 2.
390. *Вик Д.* Проблема измерений.— УФН, 1970, т. 101, вып. 2, с. 303—329.
391. *Friedrichs K. O.* Remarks on the notion of state in quantum mechanics.— Foundations of Phys., 1979, vol. 9, N 7/8, p. 515—524.
392. *Cini M., Maria M., Mattioli G., Nicolo F.* Wave packet reduction in quantum mechanics: a model of a measuring apparatus.— Found. Phys., 1979, vol. 9, N 7/8, v. 479—500.
393. *Мороз Б. З.* Формальные системы, возникающие при анализе физических теорий.— Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 5, с. 1018—1020.
394. *Додонов В. В., Курмышев Е. В., Манько В. И.* Уточненное соотношение неопределенности и коррелированные когерентные состояния.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. 1, с. 227—232.
395. *Свиньин И. Р.* Квантовомеханическое описание трения.— ТМФ, 1975, т. 22, № 1, с. 97—108.
396. *Messer J.* Friction in quantum mechanics.— Acta physica austr., 1979, vol. 50, N 1, p. 75—91.
397. *Dodonov V. V., Man'ko V. I.* Coherent states and the resonance of quantum damped oscillator.— Phys. Rev., 1979, vol. 20A, N 2, p. 550—560.
398. *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
399. *Prosperi G. M.* Macroscopic physics and problem of measurement in quantum mechanics.— In: Proc. Intern. Sch. Enrico Fermi, Cource IL, N. Y.: Acad. Press, 1971, p. 97.
400. *Эйринг Г., Уолтер Д., Кимпбалл Д.* Квантовая химия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
401. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
402. *Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
403. *Тарасов Л. В.* Квантовая механика. М.: Высш. школа, 1977.
404. *Бом Д.* О возможности интерпретации квантовой теории на основе представления о «скрытых параметрах», ст. 1, 2.— В кн.: Вопросы причинности в квантовой механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1955, с. 34—94; *Гальперн О.* О новой интерпретации квантовой механики.— Там же, с. 95—96.
405. *Бете Г.* Квантовая механика. М.: Мир, 1965.
406. *Сарры М. Ф.* О перестановочной симметрии волновых функций системы тождественных частиц.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 4(10), с. 1348—1351.
407. *Каплан И. Г.* Постулат симметрии и его обоснование в рамках квантовой механики.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. 1, с. 175—181.
408. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972.
409. *Лэкс М.* Флуктуации и когерентные состояния. М.: Мир, 1974.
410. *Барабаненков Ю. Н., Озрин В. Д., Шелест А. В.* К теории стохастических процессов в квантовых динамических системах.— ТМФ, 1980, т. 42, № 2, с. 232—242.
411. *De Aranjo Cid B., Rezende S. M.* Saturation and coherence properties of three-magnon nonlinear processes.— Phys. Rev., 1974, vol. 9B, N 7, p. 321—335.

412. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Информационные модели в теории инвариантности.— В кн.: Труды Всесоюз. совещ. по теории устойчивости, чувствительности и инвариантности динамических систем. Баку: Ишыг, 1981.
413. *Крестьянинов А. С., Митюгов В. В.* Минимальные неопределенности в открытой системе.— РЭ, 1980, т. 28, № 5, с. 1030—1036.
414. *Berry M. Y., Balazs N. L.* Nonspreading wave packets.— Ann. J. Phys., 1979, vol. 47, N 3, p. 264—267.
415. *Данилов Ю. А., Кузнецов Г. И., Смородинский Я. А.* О симметрии классических и волновых уравнений.— ЯФ, 1980, т. 32, вып. 6(12), с. 1547—1552.
416. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974. Т. 1, 112 с.
417. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions. US Nat. Bureau of Standards, Wash. D. C., 1964, p. 446—448.
418. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978; *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
419. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
420. *Гааз А.* Введение в теоретическую физику. М.: ОНТИ, 1935. Т. II.
421. *Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.* Парадоксы Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М.: Наука, 1975.
422. *Котельников А. П., Фок В. А.* Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1956.
423. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Квантовая механика и атомная физика. М.: Просвещение, 1970; *Galehouse D. C.* Geometrical derivation of the Klein—Gordon equation.— Intern. J. Theoret. Phys., 1981, vol. 20, N 6, p. 457—479.
424. *Schwebel S. L.* Interaction theory: Relativistic hydrogen atom and the Lamb shift.— Intern. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 12, p. 931—939.
425. *Лурье А. И.* К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.— Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1943, № 6, вып. 3.
426. *Берестецкий В. Б.* Проблемы физики элементарных частиц. М.: Наука, 1979.
427. *Боголюбов Н. Н., Широков Д. В.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
428. *Кушниренко А. Н.* Введение в квантовую теорию поля. М.: Высш. школа, 1971.
429. *Вентцель Р.* Введение в волновую механику. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.
430. *Гришанин Б. А.* Квантовая электродинамика для радиофизиков. М.: Изд-во, МГУ, 1981.
431. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов.— В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966, с. 91—280; Когерентность и детектирование квантов.— В кн.: Когерентные состояния в квантовой физике. М.: Мир, 1972, с. 26—70.
432. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
433. *Перина Я.* Когерентность света. М.: Мир, 1974.
434. Статистические и когерентные методы исследования физических систем. М.: Наука, 1980. (Тр. ФИАН СССР им. Лебедева; Т. 124).
435. *Jannussi A. D.* Generalized Glauber operators and their coherent states.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 308—321.
436. *Переломов А. М.* Замечание о полноте системы когерентных состояний.— ТМФ, 1971, т. 6, № 2, с. 213—224; Рождение пар фермионов в переменном однородном внешнем поле.— ТМФ, 1974, т. 19, № 1, с. 83—96; Coherent states for arbitrary Lie group.— Communs Math. Phys., 1972, vol. 26, p. 222—236; Coherent states and symmetric spaces.— Communs Math. Phys., 1975, vol. 44, p. 197—210; Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения.— УФН, 1977, т. 123, вып. 1, с. 23—55; Описание обобщенных когерентных состояний, наиболее близких к классиче-

ским.— ЯФ, 1979, т. 29, вып. 6, с. 1688—1696. (См. также [471, с. 321—327]); *Монастырский М. И., Переломов А. М.* Когерентные состояния и ограниченные однородные области.— Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 6, с. 1303—1305; Coherent states and symmetric spaces. II.— Ann. Inst. Henri Poincaré, 1975, vol. 23, N 1, p. 23—48.

437. *Новиков Л. Ф.* Когерентные состояния на группах Ли и оператор эволюции системы взаимодействующих бозонов и фермионов.— ТМФ, 1977, т. 30, № 2, с. 218—227.
439. *Атакишев Н. М., Мир-Касимов Р. М., Нагиев Ш. М.* Квазипотенциальные модели релятивистского осциллятора.— ТМФ, 1980, т. 44, № 1, с. 47—62.
439. *Зверев В. В.* Унитарная динамическая симметрия в системе сверхизлучающих молекул и классический предел.— ТМФ, 1976, т. 29, № 3, с. 401—410.
440. *Вакарчук И. А.* Представление когерентных состояний в теории многобозонных систем.— ТМФ, 1978, т. 35, № 1, с. 76—88.
441. *Багров В. Г., Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М.* Построение когерентных состояний релятивистских частиц во внешних полях.— В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, т. I, с. 232—239.
442. *Иванова Е. В.* Применение метода когерентных состояний к задачам излучения некоторых периодических систем.— Там же, с. 358—362.
443. *Агаева Р. Г.* Неадиабатическое параметрическое возбуждение систем типа осциллятор.— Там же, с. 362—368; Non-abiabatic parametric excitation of oscillator-type systems.— J. Phys. A: Math. and Gen., 1980, vol. 13, p. 1685—1699.
444. *Болошин И. А., Герценштейн М. Е.* О состояниях с минимальной неопределенностью фазы.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 5(11), с. 1584—1588.
445. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
446. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю.* Двухкратная инвариантность в беспоисковых самонастраивающихся системах автоматического управления.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 3, 4.
447. *Пухов Н. М., Чернавский Д. С.* О неустойчивости фазы при рассеянии на случайном потенциале.— ТМФ, 1971, т. 7, № 2, с. 219—229.
448. *Чернавская О. Д., Чернавский Д. С.* Проблема возрастания энтропии и устойчивость движений в квантовой механике.— В кн.: Термодинамика и кинетика биологических процессов. М.: Наука, 1980, с. 28—43.
449. *Берман Г. П., Заславский Г. М.* Статистическое описание движения частиц, захваченных нелинейной волной.— ТМФ, 1976, т. 26, № 2, с. 234—245; Стохастическая неустойчивость нелинейного квантового осциллятора.— Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 5, с. 1082—1085; Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems.— Physica, 1978, vol. 91A, p. 450—460; *Белобров П. И., Берман Г. П., Заславский Г. М., Сливинский А. П.* О стохастическом механизме возбуждения молекул, взаимодействующих с собственным полем излучения.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 6, с. 1960—1968; *Абдуллаев С. С., Заславский Г. М.* Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 2, с. 524—536; ЖЭТФ, 1981, т. 81, вып. 2(8), с. 506—516.
450. *Зельдович Б. Я.* Рассеяние и излучение квантовой системы в сильной электромагнитной волне.— УФН, 1973, т. 110, вып. 1, с. 139—151.
451. *Ритус В. И.* Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем.— В кн.: Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. М.: Наука, 1979, с. 5—151. (Тр. ФИАН СССР им. Лебедева; Т. 111); Сдвиг массы ускоренного заряда.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 4, с. 1288—1306.
452. *Никишов А. Н.* Проблемы внешнего поля в квантовой электродинамике.— В кн.: Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. М.: Наука, 1979, с. 152—275. (Тр. ФИАН СССР им. Лебедева; Т. 111).
453. *Капица П. С.* Параметрические колебания и устойчивость перевернутого маятника.— ЖЭТФ, 1938, т. 18, вып. 3, с. 837—843.
454. *Челомей В. А.* Об устойчивости перевернутого маятника при параметрических возмущениях.— Докл. АН СССР, 1956, т. 121, № 4, с. 924—927.

455. *Амирханов И. В., Груша Г. В., Мир-Касимов Р. М.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел в терминах быстрот.— ТМФ, 1977, т. 30, № 3, с. 333—345.
456. Квантовая оптика и квантовая радиофизика: Сб. статей. М.: Мир, 1965; *Delbourgo R.* Minimal uncertainty states for the rotation and allied groups.— J. Phys. A: Math. Gen., 1977, vol. 10, N 11, p. 1837—1846; *Chand P.* Time evolution of coherent states.— Nuovo Cimento, 1979, vol. 50, N 1, p. 17—20.
457. *Шелепин Л. А.* Неравновесная статистическая физика и когерентные состояния.— В кн.: [434, с. 3—13]; Теория когерентных кооперативных явлений — новая ступень физического знания.— В кн.: Физическая теория. М.: Наука, 1980, с. 439—461.
458. *Широков Ю. М.* Аксиоматика гамильтоновых теорий общего вида, включающих классическую и квантовую как частные случаи.— ТМФ, 1975, т. 25, № 3, с. 307—312; Объединенная алгебра для квантовой и классической механики.— ТМФ, 1976, т. 28, № 3, с. 308—319; Различные квантования и различные классические пределы квантовой теории.— ТМФ, 1976, т. 29, № 3, с. 309—321; Единый формализм для квантовой и классической теорий рассеяния.— ТМФ, 1979, т. 38, № 3, с. 313—320; О допустимых канонических механиках.— ТМФ, 1977, т. 30, № 1, с. 6—11; Теория возмущений по постоянной Планка.— ТМФ, 1977, т. 31, № 3, с. 327—332; Квантовая и классическая механика в представлении фазового пространства.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1979, т. 10, вып. 1, с. 5—50; *Толоконников Г. К.* Об ассоциативных гамильтоновых алгебрах.— ТМФ, 1977, т. 31, № 2, с. 250—255; О гамильтоновых алгебрах.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 336—346. *Антонец М. А.* Классический предел квантования Вейля.— ТМФ, 1979, т. 38, № 3, с. 331—344; О классическом пределе в квантовании Вейля.— Функцион. анализ и его прил., 1978, т. 12, вып. 1, с. 62—63; *Hepp K.* The classical limit for quantum mechanical correlation functions.— Communs Math. Phys., 1974, vol. 35, p. 265—277; *Grgin E., Petersen A.* Duality of observables and generators in classical and quantum mechanics.— J. Math. Phys., 1974, vol. 15, N 6, p. 764—769; Algebraic implications composability of physical systems.— Communs Math. Phys., 1976, vol. 50, p. 177—188.
459. УФН, 1977, т. 122, вып. 4.
460. 50 лет квантовой механики: Сб. статей. М.: Наука, 1979.
461. *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.
462. *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.
463. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976; *Лере Ж.* Лагранжев анализ и квантовая механика: Математическая структура, связанная с асимптотическими разложениями и индексом Маслова. М.: Мир, 1981.
464. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965; Квантование.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, т. 38, № 5, с. 1116—1175; Квантование в комплексных симметрических пространствах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т. 39, № 2, с. 381—402.
465. *Говорков А. Б.* Унитарное квантование.— ТМФ, 1979, т. 41, № 3, с. 318—329; The principle of the indistinguishability of identical particles and the Lie algebraic approach to the field quantisation.— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, vol. 13, p. 1673—1684.
466. *Маринов М. С., Терентьев М. В.* Функциональный интеграл на унитарной группе.— ЯФ, 1978, т. 28, вып. 5(11), с. 1418—1434.
467. *Татарский В. И.* Представление решения некоторых дифракционных задач в форме гауссовских континуальных интегралов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 2, с. 333—336; *Сабельфельд К. К., Татарский В. И.* О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 4, с. 905—908; *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976; *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в

функциональных пространствах и его применение в квантовой физике.— УМН, 1956, т. XI, вып. 1(67), с. 77—114.
468. *Угланов А. В.* Об одной конструкции фейнмановского интеграла.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 6, с. 1406—1409.
469. *Алимов А. Л.* О континуальном интеграле Фейнмана на нелинейном фазовом пространстве.— ТМФ, 1977, т. 30, № 2, с. 159—167.
470. *Шерешевский И. А.* Квантование в кокасательных расслоениях.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 6, с. 1057—1060.
471. Теоретико-групповые методы в физике: (Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 28—30 ноября 1979 г.). М.: Наука, 1980, Т. I, II.
472. *Додонов В. В., Манько В. И., Скаржинский В. Д.* Произвол в выборе действия и неоднозначность квантования заданных классических уравнений движения.— В кн.: [471, с. 262—273].
473. *Гинзбург В. Л., Тамм И. Е.* К теории спина.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, вып. 3, с. 227—237; О релятивистских волновых уравнениях для частиц со спином и теории наклонного магнитного ротатора.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 192—199.
474. *Гинзбург В. Л., Манько В. И.* Релятивистские волновые уравнения с внутренними степенями свободы и партоны.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1976, т. 7, вып. 1, с. 3—29; *Малкин И. А., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979, с. 238—243.
475. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии: Теория совместности систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах и в частных производных. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
476. *Аржаных И. С.* Поле импульсов. Ташкент: Фан, 1965.
477. *Крейнович В. Я.* Вывод уравнения Шредингера из условия масштабной инвариантности.— ТМФ, 1976, т. 26, № 3, с. 414—418.
478. *Никитин А. Г., Фушич В. И.* Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина.— ТМФ, 1978, т. 34, № 3, с. 319—333; О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 1, с. 46—49; Уравнения движения для частиц произвольного спина, инвариантные относительно группы Галилея.— ТМФ, 1980, т. 44, № 1, с. 34—46; Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина.— Физика элементар. частиц и атом. ядра, 1978, т. 9, вып. 3, с. 501—553; *Баклев И. С., Иванов М. И., Николов А. В.* Уравнения поля для барионов с произвольным спином (обобщение уравнения Дирака).— ТМФ, 1979, т. 40, № 1, с. 64—76; *Пестов А. Б.* Релятивистские уравнения, определяемые операторами внешнего дифференцирования и обобщенной дивергенции.— ТМФ, 1978, т. 34, № 1, с. 48—58; Волновое уравнение для дейтрона.— ЯФ, 1979, т. 30, вып. 2(8), с. 336—338; *Желнерович В. А.* О тензорном описании полей полуцелого спина.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 1, с. 85—89; *Ставраки Г. Л.* О релятивистских уравнениях безмассовых полей.— В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1980, вып. 11, с. 181—187.
479. *Velo G., Zwanzinger D.* Propagation and quantization of Rarita — Schwinger Waves in an external electromagnetic potential.— Phys. Rev., 1969, vol. 186, N 5, p. 1337—1341; Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher.— Phys. Rev., 1969, vol. 188, N 5, p. 2218—2222; Acausality and other defects of equations for interacting higher spin particles.— In: Troubles in the External Field Problem for Invariant Wave Equations/Ed. by E. S. Wightman. Tracts in Mathematics and Natural Sciences. N. Y.: Gordon and Breach, 1971, vol. 4; *Khalil M. A. K.* Relativistic Wave equations without Velo-Zwanzinger pathology.— Progr. Theor. Phys., 1977, vol. 58, N 5, p. 1538—1554; *Becker W.* Solutions of higher-spin equations in external electromagnetic plane-wave fields.— J. Phys. A: Math. Gen., 1976, vol. 9, N 1, p. 149—157; *Mathews P. M.* Stationary states of a spin-1 particles in a homogeneous magnetic fields.— Phys. Rev., 1974, vol. 9D, N 2, p. 365—369; *Tsai W., Yildiz A.* Motion of charged particles in a homogeneous magnetic fields.— Phys.

Rev., 1971, vol. 4D, N 12, p. 3643—3648; *Goldman T., Tsai W.* Motion of charged particles in a homogeneous magnetic field. Pt II.— Phys. Rev., 1971, vol. 4D, N 12, p. 3648; *Goldman T., Tsai W., Yildiz A.* Consistency of spin-one theory.— Phys. Rev., 1972, vol. 5D, N 8, p. 1926—1930; *Fisk C., Tait W.* Skew-symmetric tensor-spinor formulation of the spin 3/2 field.— J. Phys. A: Math. Nucl. Gen., 1973, vol. 6, N 3, p. 383—392; *Mainland G. B., Sudarshan C. G.* Heisenberg equations of motion for the charged spin —ħ 3/2 field.— Phys. Rev., 1973, vol. 8D, N 4, p. 1088—1090; *Seetharaman M., Prabhakaran J., Mathews P. M.* Rarita-Schwinger particles in homogeneous magnetic fields, and incosistencies of spin — 3/2 theories.— Phys. Rev., 1975, vol. 12D, N 2, p. 458—466; *Prabhakaran J., Covindarajan T. R., Seetharaman M.* Causality of propagation of the Bhabha-Gupta field coupled to external electromagnetic and gravitational fields.— Nucl. Phys., 1977, vol. B127, N 2, p. 537—547; *Garuccio A., Vigier J. P.* Description of spin in the causal stochastic interpratation of Proca-Maxwell waves: theory of Einstein's «chost waves».— Lett. Nuovo Cimento, 1981, vol. 30, N 2, p. 57—63; *Жулего В. Г., Радюк А. Ф., Федоров Ф. И.* Векторный мезон в квантованном электромагнитном поле.— ТМФ, 1978, т. 35, № 3, с. 401—405.

480. *Belifante F. J.* A survey of hidden variables theories.— Pergamon Press, 1973; *Gudder S.* A generalized measure and probability theory for the physical sciences.— In: Foundations of Probability Theory, Statistical Inference and Statistical Theories of Science/Ed. Harper and Hooker. Dordrecht, Holland, 1976, vol. 3, p. 121—141; *Hockney D.* The significance of a hidden variable proof and the logical interpretation of quantum mechanics.— Int. J. Theor. Phys., 1978, vol. 17, N 9, p. 685—707; *Левин А. Х.* Структура квантовой механики и проблема скрытых параметров.— Вопр. философии, 1977, № 2, с. 75—85.

481. *Pauri M., Prosperi G. M.* Canonical realization of the Poincaré group. II. Space-time description of two particles interacting at a distance, Newtonian-like equatioss of motion and approximately relativistic Lagrangian formulation.— J. Math. Phys., 1976, vol. 17, N 8, p. 1468—1495; *Bel L., Martin J.* Approximate solutions of predictive relativistic mechanics for short-range scalar interactions.— Phys. Rev., 1974, vol. 9D, N 10, p. 2760—2766; *Foldy L. L., Krajcik R. A.* Separable solutions for directly interacting particles systems.— Phys. Rev., 1975, vol. 12D, N 6, p. 1700—1710; *Lapierde R., Mas L.* Time-symmetric classical electrodynamics for two particles up to order $1/c^5$.— Phys. Rev., 1976, vol. 13D, N 10, p. 2805—2810; *Martin J., Sanz J. L.* No-interaction theorem of Corrie, Jordan and Sudarshan. Expansions in c^{-1}.— J. Math. Phys., 1978, vol. 19, N 4, p. 780—788; Slow motion approximation in predictive relativistic mechanics. Pt I. Approximated dynamics up to order c^{-4}.— J. Math. Phys., 1978, vol. 19, N 9, p. 1887—1891; *Komar A.* Classical formalisms of quantization.— General Relativity and Gravitation, 1976, vol. 7, N 1, p. 13—20; Space-time orbits for interacting relativistic particles: syntactic versus semantic observables.— Phys. Rev., 1978, vol. 18, N 10, p. 3617—3623; *Giachetti R., Sorace E.* Nonexistence of two-body interacting Lagrangians invariant under independent reparametrizations of earch world-line.— Lett. Nuovo Cimento, 1979, vol. 26, N 1, p. 1—4; *Гайда Р. П., Ключковский Ю. Б., Третяк В. И.* Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. I, II.— ТМФ, 1980, т. 44, № 2, с. 194—207; Там же, т. 45, № 2, с. 180—198; *Карманов В. А.* Как экспериментально обнаружить зависимость релятивистской волновой функции дейтрона от дополнительной переменной.— ЯФ, 1979, т. 29, вып. 5, с. 1179—1190.

482. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.

483. *Кемпбелл А.* Квантовая механика. М.: Мир, 1967.

484. *Липкин Г.* Квантовая механика (новый подход к некоторым проблемам). М.: Мир, 1977.

485. *Хилл Т.* Статистическая механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

486. *Мигдал А. Б.* Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975.

487. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
488. *Марков М. А.* Строение материи. М.: Наука, 1976.
489. *Нелипа Н. Ф.* Физика элементарных частиц. М.: Высш. школа, 1977; Калибровочные поля и элементарные частицы.— В кн.: Теоретическая физика и физика элементарных частиц. Неканонические методы в квантовой теории поля. М.: ВИНИТИ, 1980, т. 1. (Итоги науки и техники).
490. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968.
491. *Тирринг Г.* Введение в квантовую теорию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
492. *Гордеев А. Н.* Описание электромагнитного взаимодействия релятивистских частиц с помощью единого лабораторного времени.— ТМФ, 1978, т. 36, № 1, с. 53—63.
493. *Rohrlich F.* Relativistic Hamiltonian dynamics. I. Classical mechanics.— Ann. Phys., 1979, vol. 117, N 1, p. 292—322.
494. *Takabayasi T., Kojima S.* Relativistic mechanics of interacting particles and multi-local theory: Pt. I, II.— Progr. Theor. Phys., 1977, vol. 57, N 6, p. 2127—2143; vol. 58, N 4, p. 1299—1315.
495. *Клепиков И. П., Шатний А. Н.* О формулировке релятивистской механики систем взаимодействующих частиц.— ТМФ, 1981, т. 46, № 1, с. 50—63; О ковариантном отделении переменных центра инерции системы релятивистских частиц.— ЯФ, 1980, т. 31, вып. 3, с. 841—844.
496. *Соколов С. Н.* Свойства разделимости и инвариантности в нерелятивистской и релятивистской квантовой механике.— ТМФ, 1975, т. 23, № 3, с. 355—365; Релятивистское сложение прямых взаимодействий в точечной форме динамики.— ТМФ, 1978, т. 36, № 2, с. 193—207; *Соколов С. Н., Шатний А. Н.* Физическая эквивалентность трех форм релятивистской динамики и сложение взаимодействий во фронтовой и мгновенной формах.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 291—304.
497. *Shannon C. E., Weaver W.* The mathematical theory of communication. Urbana: Univ. Illinois Press, 1949.
498. *Урсул А. Д.* Информация: Методологические аспекты. М.: Наука, 1971; Проблемы информации в современной науке: Философские очерки. М.: Наука, 1975; Синтез знания и проблема управления. М.: Наука, 1978.
499. *Тюхтин В. С.* Отражение, системы, кибернетика. М.: Наука, 1972.
500. *Гришкин И. И.* Понятие информации: Логико-методологический аспект. М.: Наука, 1973.
501. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
502. *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количества информации».— ППИ, 1965, т. 1, вып. 1, с. 3—11; К логическим основам теории информации и теории вероятностей.— ППИ, 1969, т. 5, вып. 3, с. 3—7; Теория передачи информации.— В кн.: Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 октября 1956 г.: Пленарные доклады. М.: Изд-во АН СССР, 1957, с. 66—99.
503. *Юдин Д. Б., Горяшко А. П.* Теория сложности и задачи управления.— Изв. АН СССР. ТК, 1974, № 3; 1975, № 2; 1976, № 4.
504. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Ценность информации: Семиотические аспекты информационной теории управления и кибернетики.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1973, т. 5, с. 128—365. (Итоги науки и техники); Динамические системы со случайной и нечеткой структурами.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1979, т. 11, с. 3—76. (Итоги науки и техники).
505. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов.— УМН, 1970, т. 25, вып. 6, с. 85—128.
506. *Shnorr P. K.* Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. B.: Spring. Verl., 1970.
507. Проблема математической логики: Сб. статей. М.: Мир, 1970.
508. *Гач П.* О сложности случайных последовательностей: Препринт. Будапешт, 1971; О симметрии алгоритмической информации.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1265—1267.

509. *Левин Л. А.* Законы сохранения (невозрастания) информации и вопросы обоснования теории вероятностей.— ППИ, 1974, т. 10, вып. 3, с. 30—35; О принципе сохранения информации в интуиционистской математике.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 6, с. 1293—1296; О различных мерах сложности конечных объектов: (Аксиоматическое описание).— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 4, с. 804—807.
510. *Borodin A.* Computational complexity: theory and practice. Currents in the theory of computation/Ed. Aho. N. Y.: Prentice-Hall, 1973.
511. Сложность алгоритмов и вычислений: Сб. статей. М.: Мир, 1974.
512. *Chaitin G. J.* Information-theoretic computational complexity.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1974, vol. 20, N 1, p. 10—15; A theory of program size formally identical to information theory.— J. Assoc. Comput. Mach., 1975, vol. 22, N 3, p. 329—340.
513. *Брудно А. А.* Топологическая энтропия и сложность по А. Н. Колмогорову.— УМН, 1974, т. 24, вып. 6, с. 157—158; О сложности траекторий динамической системы.— УМН, 1978, т. 33, вып. 1, с. 207—208; Энтропия и алгоритмическая сложность траекторий динамических систем.— Препринт. М.: ВНИИ системных исследований, 1980.
514. Гладкие динамические системы: Сб. статей. М.: Мир, 1978.
515. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
516. *Aczel J., Daroczy Z.* On measures of information and their characterization. N. Y.: Acad. press, 1975; *Matai A., Rathie P.* Basic concepts in information theory and statistics. N. Y.: John Wiley, 1975.
517. *Csiszar I.* Information measures: A critical survey. Preprint. Budapest, 1974, N 98.
518. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В., Хазен Э. М.* Ценность информации: Семиотические аспекты информационной теории управления и кибернетики.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1975, т. 6, кн. 1, с. 63—365. (Итоги науки и техники).
519. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального уравнения. М.: Сов. радио, 1968; Информационные оценки для риска в задачах последовательного анализа.— Изв. АН СССР. ТК, 1969, № 6, с. 38—46; Определение потенциальной точности решения некоторых задач распознавания и оценивания.— Изв. АН СССР. ТК, 1971, № 3, с. 184—192; Информационные оценки для возрастания риска в задачах последовательного анализа и оптимального управления.— В кн.: Всесоюз. совещ. по информ. мет. управления и измерений. Владивосток: Изд-во ДВНЦ АН СССР, 1972, кн. 1, с. 214—222.
520. *Renyi A.* Some fundamental problems on information theory.— Magyar tud. akad. Mat. fiz. oszt. közl., 1960, k. 10, old. 251—282; On some problems of statistics from the point of view of information theory.— In: Proc. of Colloq. on Inform. Theory, Debrecen (Hungary), 1967, old. 343—357.
521. *Perez A.* Information, ε-sufficiency and data reduction problems.— Kybernetika, 1965, roč. 1, N 4, s. 297—323; Information-theoretic risk estimations in statistical decision.— Kybernetika, 1967, roč. 3, N 1, s. 1—21; Risk estimates in terms of generalized f-entropies.— In: Proc. of Colloq. on Inform. Theory, Debresen (Hungary), 1967, old. 299—315.
522. *Vajda I.* v^{α}-divergence and generalized Fisher's information.— In: Transactions of the 6-th Prague Conf. on Inform. Theory and Statistic. Decision, Prague 1971. N. Y.; L.: Acad. Press, 1973, p. 873—886; On the amount of information contained in a sequence of independent observations.— Kybernetika, 1970, roč. 4, N 5, s. 306—323; *Vajda I., Eckschlager K.* Analysis of measurement information.— Ibid., 1980, roč. 16, N 2, s. 120—144.
523. *Уланов Г. М., Ульянов С. В., Хазен Э. М.* Информационные оценки для риска в задачах обработки больших массивов информации.— Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 2, с. 43—45.
524. *Бараш М. М., Фридман В. Г.* Оценка качества субоптимальных алгоритмов управления объектами с неполной информацией.— Изв. АН СССР. ТК, 1976, № 2, с. 23—29.
525. *Бараш М. М., Мееров М. В., Фридман В. Г.* Один метод приближенного

решения задач дуального управления.— В кн.: Системы многосвязного управления. М.: Наука, 1977, с. 15—20.
526. *Канканян Л. Г.* Информационные оценки для дисперсии риска и вероятностей ложных решений в задачах оптимальных статистических решений.— Изв. АН СССР. ТК, 1977, № 4, с. 181—185.
527. *Канканян Л. Г., Хазен Э. М.* Информационные оценки для возрастания риска в задачах об оптимальной остановке наблюдений.— Изв. АН СССР. ТК, 1978, № 2, с. 161—174.
528. *Petrov B. N., Dobrushin R. L., Pinsker M. S., Ulanov G. M., Uljanov S. V.* On some interrelations between the theories of information and control.— Probl. Control. Inform. Theory, 1976, vol. 5, N 1, p. 31—38.
529. *Зигангиров К. Ш.* Методы последовательного декодирования. М.: Связь, 1974.
530. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979; Передача слабого сигнала по каналу без памяти.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 4, с. 28—39; Об оценке плотности распределения.— В кн.: Исследования по математической статистике. IV. М.: Наука, 1980, с. 61—85 (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 98). On the information in a sample about a parameter.— In: Proc. 2-nd Intern. Symp. on Inform. Theory, Thahkadsor, 1971. Bp., 1973, old. 295—309; Об информационных неравенствах и суперэффективных оценках — ППИ, 1973, т. 9, вып. 3, с. 53—67; То же.— Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 6, с. 1300—1302.
531. *Jaynes E. T.* Information theory and statistical mechanics.— In: Statistical Phys. (Brandeis Lectures), 1963, vol. 3, p. 160—176; Where do we stand on maximum entropy? — In: The Maximum Entropy Formalism. Cambridge (Mass.); MIT Press, 1979, p. 15—67.
532. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
533. *Синай Я. Г.* Автомодельные распределения вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, вып. 1, с. 63—80; Теория фазовых переходов: строгие результаты. М.: Наука, 1980; Стохастичность динамических систем.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 192—212; Случайность неслучайного.— Природа, 1981, № 3, с. 72—80; *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
534. *Поплавский Р. П.* Термодинамические модели информационных процессов.— УФН, 1975, т. 115, вып. 3, с. 465—501; Об энергетически оптимальных каналах и эффективном кодировании.— Изв. АН СССР. ТК, 1979, № 4, с. 66—76; Термодинамика информационных процессов. М.: Наука, 1981.
535. *Elsasser R. S.* Quantum measurement and statistical method.— Phys. Rev., 1937, vol. 52, N 9, p. 987—1001; The physical foundation of biology: An analytical study. L., 1958.
536. *Szillard L.* Über die Entropievermindlung in einem Thermodynamischen System bei einbegriffen intelligenter Wessen.— Ztschr. Phys., 1929, Bd. 53, H. 6, S. 840—846.
537. *Demers P.* Les demons de Maxwell et le second principe de la thermodynamique.— Canad. J. Res., 1944, vol. A22, N 1, p. 27—41; Second law and the quantum theory.— Canad. J. Res., 1945, vol. 23, N 1, p. 47—56.
538. *Rothstein T.* Information, measurements and quantum mechanics.— Science, 1951, vol. 114, N 1, p. 171—178; Information and thermodynamics.— Phys. Rev., 1952, vol. 85, N 1, p. 135—142.
539. *Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.* Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М.: Наука, 1975.
540. *Хартли Р.* Передача информации.— В кн.: Теория информации и ее приложения/Под ред. А. А. Харкевича. М.: Физматгиз, 1959, с. 5—35.
541. *Fisher R. A.* On the mathematical foundations of theoretical statistics.— Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 1922, p. 122—138.
542. *Хинчин А. Я.* Понятие энтропии в теории вероятностей.— УМН, 1953, т. 8, вып. 3, с. 3—20; Об основных теоремах теории информации.— УМН, 1956, т. 11, вып. 1, с. 17—75.

543. *Пинскер М. С.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов.— В кн.: Проблемы передачи информации. М.: Изд-во АН СССР, 1960, вып. 7; Вычисление скорости создания сообщений стационарным случайным процессом и пропускной способности стационарного канала.— Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 4, с. 753—756; Энтропия, скорость создания энтропии и энтропийная устойчивость гауссовских случайных величин и процессов.— Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 3, с. 863—867; Информация, содержащаяся в наблюдениях, и асимптотически достаточные статистики.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 1, с. 45—61.
544. *Добрушин Р. Л.* Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации.— УМН, 1959, т. 14, вып. 6, с. 3—104.
545. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* О вычислении количества информации о случайной функции, содержащемся в другой такой функции.— УМН, 1957, т. 12, вып. 3, с. 3—52; *Гельфанд И. И., Колмогоров А. Н., Яглом А. М.* К общему определению количества информации.— Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 4, с. 745—748.
546. *Файнстейн А.* Основы теории информации. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
547. *Фано Р.* Передача информации: Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965.
548. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь.— М.: Сов. радио, 1974.
549. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.
550. *Гольдман С.* Теория информации. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
551. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
552. *Тюрин Дж.* Лекции о цифровой связи. М.: Мир, 1972.
553. *Сакрисон Д.* Лекции об аналоговой связи. М.: Мир, 1974.
554. *Berger T.* Rate distortion theory. A mathematical basis for data compression. Englewood Cliffs (N. J.); Prentice-Hall, 1971.
555. *Барра Ж-Р.* Основные понятия математической статистики. М.: Мир, 1974.
556. *Gaines B. R.* Fuzzy and probability uncertainty logics.— Inform. and Control., 1978, vol. 38, N 2, p. 154—169.
557. *Rescher N.* Many-valued logic. N. Y.: McGraw Hill, 1969.
558. *Birkhoff G.* Lattice theory.— Amer. Math. Soc. Mc. Providence, R. I., 1948.
559. *Гоппа В. Д.* Информация слов (начальное приближение — информация без памяти).— ППИ, 1978, т. 14, вып. 3, с. 3—17; Невероятностная взаимная информация без памяти.— Проблемы управления и теории информации, 1975, т. 4, № 2, с. 97—102.
560. *Шиханович И. М.* Методы современной математики. М.: Наука, 1965.
561. *Фитингоф Б. И.* Оптимальное кодирование изменяющейся и неизвестной статистики сообщений.— ППИ, 1966, т. 2, вып. 2, с. 3—11; Сжатие дискретной информации.— ППИ, 1967, т. 3, вып. 3, с. 26—36; Универсальные способы описания информации с кодированием блоков разной длины в блоки одинаковой длины.— В кн.: Теоретические основы информации: Междунар. симпоз. стран-членов СЭВ. М.: ВИНИТИ, 1970, с. 37—42.
562. *Вагапов А. М., Косенко Г. Г.* Общий подход к мерам радиолокационной информации Котельникова, Шеннона и Кульбака.— РЭ, 1972, т. 17, № 7, с. 1524—1526.
563. *Каган А. М.* К теории информационного количества Фишера.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 2, с. 277—278; Некоторые статистические задачи, относящиеся к одному типу наблюдений.— Вестн. ЛГУ, 1963, № 19, с. 142—143; Фишеровская информация, содержащаяся в конечном линейном пространстве, и корректный вариант метода моментов.— ППИ, 1976, т. 12, вып. 2, с. 20—42; On measure of divergence between two scalar products and its statistical application.— Sankhya. Ser. A, 1975, vol. 37, N 4, p. 211—228.
564. *Герлейн О. В., Пинкус Р.* Критерии согласия, основанные на одной мере дивергенции между двумя скалярными произведениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, вып. 2, с. 263—273.
565. *Мешалкин Л. Д., Сердобольский В. И.* Ошибки при классификации многомерных наблюдений.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, вып. 4, с. 772—781.

566. *Володин И. Н.* О числе наблюдений, необходимых для различения двух близких гипотез.— Теория вероятностей и ее применения, 1967, т. 12, вып. 3, с. 575—582; Оценки необходимого объема наблюдений в задачах статистической классификации. Т. II.— Теория вероятностей и ее применения, 1977, т. 22, вып. 2, с. 347—357; т. 22, вып. 4, с. 749—765; Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность процедур статистического вывода.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, вып. 1, с. 119—129; Нижние границы для среднего объема выборки в критериях согласия и однородности.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, вып. 3, с. 637—645.
567. *Сердобольский В. И.* Об ошибках классификации по выборочным данным.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, вып. 1, с. 130—143; Влияние информационного шума на распознавание.— В кн.: Тез. докл. 5-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.: Наука, 1979, ч. 2 ,с. 129—132; Дискриминантный анализ наблюдений большой размерности. М.: Препринт, 1979.
568. *Амосов А. А., Колпаков В. В.* Скалярно-матричное дифференцирование и его приложения к конструктивным задачам теории связи.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 1, с. 3—15; Информационные меры различия для случайных величин и процессов.— В кн.: Тез. докл. 4-го Междунар. симпоз. по теории информации (г. Ленинград). М.: Наука, 1976, ч. 1, с. 14—16; Упорядочение информационных критериев различия вероятностных распределений.— ППИ, 1976, т. 12, вып. 4, с. 5—9.
569. *Линдли Д. В.* О мере информации, даваемой экспериментом.— Математика, 1959, т. 3, № 3, с. 87—104.
570. *Сакагучи М.* Заметки по статистическим приложениям теории информации. III.— Там же, 1959, т. 3, № 3, с. 105—113.
571. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Ценность информации: Семиотические аспекты информационной теории управления.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1973, т. 5, с. 63—376 (Итоги науки и техники).
572. *Плетнев И. Л., Рембеза А. И., Соколов Ю. А., Чалый-Прилуцкий В. А.* Эффективность и надежность сложных систем. М.: Машиностроение, 1977.
573. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
574. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.
575. *Трищенко Е. К.* Об оценке среднего в многомерной нормальной совокупности при разрывной априорной плотности.— ППИ, 1979, т. 15, вып. 1, с. 56—60; Асимптотическое поведение риска байесовской оценки для многомерных гауссовских наблюдений.— В кн.: Методы передачи и обработки информации. М.: Наука, 1980, с. 73—80.
576. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
577. *Sorenson H., Alspach D.* Recursive bayesian estimation using gaussian sums.— Automatica, 1971, vol. 7, N 4, p. 465—480.
578. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
579. *Финтушал С. М.* Представление фишеровской информации в терминах моментов распределений.— ППИ, 1975, т. 11, вып. 3, с. 95—97.
580. *Ефроймович С. Ю.* Локальная асимптотическая нормальность для зависимых наблюдений.— ППИ, 1978, т. 14, вып. 3, 73—84; Информация, содержащаяся в последовательности наблюдений.— ППИ, 1979, т. 15, вып. 3, с. 24—39; *Ефроймович С. Ю., Пинскер М. С.* К вопросу об асимптотически достаточных статистиках.— В кн.: Методы передачи и обработки информации. М.: Наука, 1980, с. 55—73.
581. *Левит Б. Я., Хасьминский Р. З.* Последовательное оценивание параметра цепи Маркова.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, т. 18, вып. 3, с. 571—582.
582. *Ширяев А. Н., Липцер Р. Ш.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
583. *Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т.* Адаптивные алгоритмы оценивания.— АиТ,

1979, № 3, с. 71—84; Стабильное оценивание в условиях неполной информации.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Науч. совет по кибернетике АН СССР, 1977, с. 6—15; Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации.— АиТ, 1980, № 8, с. 74—84; Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации.— АиТ, 1980, № 10, с. 91—97; Robust identification.— Automatica, 1980, vol. 16, N 1, p. 53—64.

584. *Ершов А. А.* Стабильные методы оценки параметров: (Обзор).—АиТ, 1978, № 8, с. 66—100; *Красненкер В. М.* Стабильные методы обнаружения сигналов на фоне помех.— АиТ, 1980, № 5, с. 65—80.
585. *Blachman N. M.* The convolution inequality for entropy process powers.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, vol. 11, N 2, p. 267—271.
586. *Hajek J.* Local asymptotic minimax and admissibility in estimation.— In: Proc. 6-th Berkeley Symp. Math. Stat. and Probl. Berkeley; Los Angeles, 1972, vol. 1, p. 175—194.
587. *Андреев Н. И.* Смещенные оценки параметров процессов управления.— АиТ, 1977, № 9, с. 30—44.
588. *Хасьминский Р. З., Шевердяев А. Ю.* Об одном классе оценок параметра сдвига.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 2, с. 55—61.
589. *Kailath T.* The divergence and Bhattacharrya distance in signal selection.— IEEE Trans. Commun. Technol., 1967, vol. 15, N 1, p. 52—60.
590. *Кошевник Ю. А., Левит Б. Я.* О непараметрическом аналоге информационной матрицы.— Теория вероятностей и ее применения, 1976, т. 21, вып. 4, с. 764—774.
591. *Левит Б. Я.* Бесконечномерные информационные неравенства.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, вып. 2, с. 388—394; Использование обобщенных байесовских оценок при передаче информации по каналам с обратной связью.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 3, с. 9—20; О поведении обобщенных байесовских оценок в случае марковских наблюдений.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, вып. 2, с. 340—354.
592. *Невельсон М. Б.* Об одной информационной нижней границе.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 3, с. 26—31.
593. *Wolfowitz J.* Asymptotic efficiency of the maximum likelihood estimator.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, с. 267—281; Maximum probability estimators in the classical case and in the «almost smooth» case.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, т. 20, вып. 2, с. 372—379.
594. *Клебанов Л. Б., Меламед И. А.* Несколько замечаний о фишеровской информации при наличии мешающих параметров.— В кн.: Тез. докл. IV Междунар. симпоз. по теории информации. М.; Л.: Наука, 1976, т. 1, с. 81—82.
595. *Бакут П. А., Логинов В. П., Шумилов Ю. П.* Методы определения границ точности в задачах оценивания неизвестных параметров. I, II.— Заруб. радиоэлектроника, 1978, № 5, с. 3—36; № 6, с. 5—28.
596. *Зяблов В. В., Самаров А. И., Хасьминский Р. З.* Задачи оценивания при ограниченных ресурсах статистик.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 3, с. 32—44; *Самаров А. И., Хасьминский Р. З.* Оценивание с помощью статистик, принимающих конечное число значений.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 4, с. 22—28.
597. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
598. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
599. *Bernardo T. M.* The use of information in the desigh and analysis of scientific experimentation: Thes. L.: Univ., 1975.
600. Information and Systems.— In: Proc. of the IFAC Workshop Compieque, France 23—27 october, 1977/Ed. B. du Buson. N. Y.; L.: Pergamon Press, 1979.
601. *Siforov V. I., Zinoviev V. A., Suchov Yu. M.* On some problems in the information theory and related areas.— Probl. of Control and Inform. Theory, 1978, vol. 7, N 6, p. 407—427.

602. *Bobrovsky B. Z., Zakai M.* A lower bound on the estimation error for certain diffussion processes.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1976, vol. 22, N 1, p. 26—34.
603. *Segal A.* Lower estimation error bounds for gaussian-poisson processes.— Lect. Notes in Control and Inform. Sci., 1979, vol. 16, p. 559—565.
604. *Голубев Г. К., Хасьминский Р. З.* Об оценивании с помощью конечного числа линейных статистик.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, вып. 1, с. 234—235.
605. *Бурнашев М. В.* Асимптотические разложения функций распределения и моментов оценок параметра сигнала в белом гауссовском шуме.— В кн.: Тез. докл. 5-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.: Наука, 1979, ч. I, с. 68—70; Исследование свойств статистических оценок в схеме независимых наблюдений.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, т. 24, вып. 1, с. 229—230; Асимптотические разложения интегрального риска статистических оценок параметра сдвига в схеме независимых наблюдений.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 783—785; Исследование свойств второго порядка байесовских оценок параметра сигнала в белом гауссовском шуме.— ППИ, 1981, т. 17, вып. 2, с. 57—68.
606. *Бурнашев М. В., Кутоянц Ю. А.* Асимптотические разложения, связанные с оценками параметра сигнала в гауссовском шуме.— В кн.: Тез. докл. 5-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.: Наука, 1979, ч. I, с. 71—73.
607. *Дьячков А. Г.* О детектирующих матрицах.— В кн.: Тез. докл. 4-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.: Наука, 1976, ч. I, с. 46—49.
608. *Blackwell D.* The entropy of functions of finite-state Markov chains.— In: Trans. of the I Prague Conf. on Inform. Theory. Prague, 1957, s. 13—20. Рус. пер.: *Блекуэлл Д.* Энтропия функций на цепи Маркова с конечным числом состояний.— Математика, 1959, т. 3, № 3, с. 143—150.
508. *Кавалеров Г. И., Мандельштам С. М.* Введение в информационную теорию измерений. М.: Энергия, 1974.
609. *Глонти О. А.* О взаимной информации сигналов в случае передачи по каналу с обратной «шумящей» связью.— Теория вероятностей и ее применения, 1978, т. 23, вып. 2, с. 395—397.
610. *Campbell L. L.* Characterization of entropy of probability distributions on the real line.— Inform. and Control., 1972, vol. 21, N 3, p. 329—338.
611. *Cácz P., Körner J.* Common information is far less than mutual information.— Probl. of Control and Inform. Theory 1973, vol. 2, N 2, p. 149—162.
612. *Wyner A. D.* A theorem on the entropy of certain binary sequence and applications. II.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, vol. 19, N 6, p. 772—777.
613. *Буканов Н. П.* Информационный критерий оптимальности систем автоматического управления.— АиТ, 1972, № 2, с. 57—62.
614. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
615. *Прелов В. В.* Об асимптотике пропускной способности непрерывного канала с неаддитивным большим шумом.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 4, с. 22—27; Исследование асимптотики пропускной способности непрерывного канала с большим гладким шумом.— ППИ, 1980, т. 16, вып. 2, с. 3—17.
616. *Burnashev M. V., Chasminsky R. Z.* Asymptotic expressions for information in discontinuons-noise density channel.— Probl. Control and Inform. Theory, 1973, vol. 2, N 2, p. 1—15.
617. *Тараскин А. Ф.* Связь шенноновской и фишеровской информаций в диффузионном процессе.— ППИ, 1979, т. 15, вып. 1, с. 14—26.
618. *Гихман И. И., Скороход А. В.* О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— УМН, 1966, т. 21, вып. 6, с. 83—152.
619. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Информативность признаков и сжатие информационных процессов управления.— В кн.: Техн. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1980, т. 13, с. 3—120. (Итоги науки и техники).
620. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.— УМН, 1959, т. 14, вып. 2, с. 3—86.
621. *Пинскер М. С.* Гауссовские источники.— В кн.: Проблемы передачи информации. М.: Изд-во АН СССР, 1963, вып. 14, с. 48—103.

622. *Posner E. C., Rodemich E. R., Rumsey H., Jr.* Epsilon entropy of gaussian processes.— Ann. Math. Statist., 1969, vol. 40, N 4, p. 1272—1296.
623. *Binia J., Zakai M., Ziv J.* On the ε-entropy and the rate-distortion function of certain non-gaussian processes.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, vol. 20, N 4, p. 517—524; Bounds of the ε-entropy of Wiener and *RC*-processes.— Ibid., 1973, vol. 19, N 3, p. 359—362.
624. *Binia J.* On the ε-entropy of certain gaussian processes.— Ibid., 1974, vol. 20, N 2, p. 190—196.
625. *Горбунов А. К., Пинскер М. С.* Эпсилон-энтропия и скорость создания сообщений без предвосхищения и с прогнозом.— ППИ, 1973, т. 9, вып. 3, с. 12—21; Эпсилон-энтропия с прогнозом гауссовского сообщения и гауссовского источника.— ППИ, 1974, т. 10, вып. 2, с. 5—25; Эпсилон-энтропия без предвосхищения и с прогнозом.— В кн.: Информационные методы в системах управления, измерений и контроля. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1976, т. I, с. 5—14.
626. *Горбунов А. К.* Скорость создания сообщений стационарным источником непрерывного аргумента без предвосхищения и с прогнозом.— В кн.: Тр. МФТИ. Сер. РЭ. М.: Изд-во МФТИ, 1973, с. 45—54; Кодирование источника без предвосхищения и с прогнозом: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1979.
627. *Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И.* Системы с малой диссипацией. М.: Наука, 1981; *Чельцов В. Ф.* Измерение сверхмалых перемещений.— Природа, 1981, № 12, с. 95—96.
628. *Киржниц Д. А., Фролов В. П.* Черные дыры, термодинамика, информация.— Природа, 1981, № 11, с. 2—14.
629. *Leung-Yan-Cheang Sik K., Cover T.* Some equivalence between Shannon entropy and Kolmogorov entropy.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1978, vol. 24, N 3, p. 331—338.
630. *Lempel A., Ziv J.* On the complexity of an individual sequence.— Ibid., 1976, vol. 22, N 1, p. 75—81; A universal algorithm for sequential data-compression.— Ibid., 1977, vol. 23, N 3, p. 337—343.
631. *Heim R.* On the algorithmic foundation of information theory.— Ibid., 1979, vol. 25, N 5, p. 557—566.
632. *Maciejowski J. M.* Model discrimination using an algorithmic information criterion.— Automatica, 1979, vol. 15, N 5, p. 579—593.
633. *Шоломов Л. А.* Информационные свойства функционалов сложности для систем недоопределенных булевых функций.— В кн.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978, т. 34, с. 133—150; Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М.: Наука, 1980.
634. *Pippinger N.* Information theory and the complexity of Boolean functions.— Math. Syst. Theory, 1977, vol. 10, N 6, p. 631—648.
635. *Горяшко А. П., Немировский А. С.* Оценки информационной стоимости вычисления булевых функций в комбинационных схемах.— ППИ, 1978, т. 14, вып. 1, с. 38—42.
636. *Уланов Г. М., Кочубиевский И. Д.* Информационные условия инвариантности линейных систем автоматического управления.— Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 6, с. 1268—1270.
637. *Петров Б. Н.* Принцип инвариантности при расчете линейных и нелинейных систем.— В кн.: Тр. I конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961; Избранные труды. М.: Наука, 1982.
638. *Tomita Y., Ohmatsu S., Soeda T.* An application of the information theory to estimation problems.— Inform. and Control, 1976, vol. 32, N 2, p. 101—111; *Omatsu S., Kikuchi A., Miyashita T., Soeda T.* Оптимальная фильтрация, основанная на мере взаимной информации.— Trans. Inst. Electron. and Comm. Eng. Jap., 1978, vol. A61, N 9, p. 820—827 (on Jap.); *Oe S., Tomita Y., Omatsu S., Soeda T.* On the information structure on the optimal smoothing estimator.— Bull. Fac. Eng. Tokushima Univ., 1979, vol. 16, p. 61—72.
639. *Ishii N., Iwata A., Suzumura N.* Evaluation of an autoregressive process by information measure.— Intern. J. Syst. Sci., 1978, vol. 9, N 7, p. 743—751.
640. *Городецкий А. Я.* Текущее количество информации для непрерывной оцен-

ки в задачах нелинейной фильтрации (гауссовское приближение).— АиТ, 1979, № 11, с. 76—81.
641. *Лебедев А. Т.* Информационный метод синтеза структур автоматического управления промышленными установками.— АиТ, 1976, № 5, с. 44—52; Информационные основы выбора оптимальных параметров настройки промышленных регуляторов.— АиТ, 1977, № 10, с. 16—22; Информационный метод расчета каскадных систем автоматического регулирования.— АиТ, 1980, № 6, с. 188—191.
642. *Akaike H.* Information theory and an extension of the maximum likelihood principle.— In: 2-nd Intern. Symp. on Inform. Theory, Bp., 1973, old. 267—281; New look at the statistical model identification.— IEEE Trans. on Automat., Control., 1974, vol. 19, N 6, p. 716—723; *Ogata Y.* Maximum likelihood estimates of incorrect Markov models for time series and the derivation of AIC.— J. Appl. Probl., 1980, vol. 17, N 1, p. 59—72.
643. *Титов А. М.* Оценка параметров линейной модели на основе информационного критерия.— Космич. исслед., 1979, т. 17, вып. 1, с. 24—31.
644. *Емельянова Н. М.* Оптимизация процессов поиска экстремума функций с использованием априорных данных.— АиТ, 1967, № 5, с. 160—165.
645. *Неймарк Ю. И., Стронгин Р. Г.* Информационный подход к задаче поиска экстремума функций.— Изв. АН СССР. ТК, 1966, № 1, с. 36—45; *Стронгин Р. Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978; *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
646. *Вапник В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.
647. *Сифоров В. И., Добрушин Р. Л., Самойленко С. И., Цыбаков Б. С.* и др. Теория информации и ее приложения.— В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму. М.: Сов. радио, 1978, т. 11, с. 28—57.
648. *Jones W. E., Smith W.* Entropy, information flow and variance in regulatory control systems.— Intern. J. Control., 1976, vol. 24, N 2, p. 239—246.
649. *Солодов А. В.* Теория информации и ее применения к задачам автоматического управления и контроля. М.: Наука, 1967; *Солодов А. В., Петров А. П.* Автоматические системы с переменными параметрами. М.: Физматгиз, 1971.
650. *Abu Bakr El Sayed.* The independence inequality and its application to information theory.— Inform. and Control. 1977, vol. 35, N 3, p. 229—245.
651. *Guiasu S.* Information theory with applications. N. Y. etc.: McGraw — Hill, 1977; On entropic measure of connection and interdepence between the subsystems of a given large systems.— In: 3-nd Format. Symp. Math. Anal. Large-Scale Syst., Prague, 1979, s. 113—124; *Guiasu S., Reischer C.* Some remarks on entropic distance entropic measures of commexion and Hamming distance.— RAIRO. Theor. Inform., 1979, vol. 13, N 4, p. 395—407.
652. *Eckschlager K., Stěpánek V.* Information theory as applied to chemical analysis. N. Y.: J. Wiley, 1979.
653. *Schlögl F.* Stochastic measures in nonequilibrium thermodynamics.— Phys. Rept. (PRPLCM), 1980, vol. 62, N 4, p. 267—380.
654. *Grandy W. T., Jr.* Principle of maximum entropy and irreversible processes.— Phys. Rept. (PRPLCM), 1980, vol. 62, N 3, p. 175—266; *Shore J. E., Johnson R. W.* Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of mininum cross-entropy.— IEEE Trans.. Inform. Theory, 1980, vol. 26, N 1, p. 26—37; Properties of cross-entropy minimization.— Ibid., 1981, vol. 27, N 4, p. 472—482; *Rouces S. E., Childers D. G.* A two-dimensional maximum entropy spectral estimator.— Ibid., 1980, vol. 26, N 5, p. 554—560.
655. *Логозинский В. Н., Павлоцкий И. П.* Выбор меры и уравнение Лиувилля в слаборелятивистской статистической механике.— ТМФ, 1979, т. 39, № 3, с. 417—424.
656. *Летохов В. С., Чеботаев В. П.* Принципы нелинейной лазерной спектроскопии. М.: Наука, 1975.
657. Применение лазеров в атомной, молекулярной и ядерной физике: (Тр.

I Всесоюз. школы, Вильнюс, 21—31 августа 1975 г.). Сб. статей. М.: Наука, 1979.
658. *Лосев С. А.* Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977.
659. *Носов В. Г.* Макроскопические квантовые эффекты в атомных ядрах. М.: Атомиздат, 1980.
660. Проблемы магнитного резонанса: Сб. статей. М.: Наука, 1978. *Уо Дж.* Новые методы ЯМР в твердых телах. М.: Мир, 1978.
661. *Brown A. V.* An overview of Josephson packaging.— IBM J. Res. and Develop., 1980, vol. 24, N 2, p. 167—171; *Anacker W.* Josephson computer technology: an IBM research project.— Ibid., p. 107—112; *Tsui F. F.* JSP — a research signal processer in Josephson technology.— Ibid., p. 243—252; *Matisoo J.* Overview of Josephson technology logic and memory.— Ibid., p. 113—129; *Guéret P., Moser A., Wolf P.* Investigations for a Josephson computer main memory with single-flux-quantum cells.— Ibid., p. 155—166; *Faris S. M., Henkels W. H., Valsamakis E. A., Zuppe H. H.* Basic design of a Josephson technology cache memory.— Ibid., p. 143—154.
662. *Мюллер Э. В., Цонг Т. Т.* Полевая ионная микроскопия. Полевая ионизация и полевое испарение. М.: Наука, 1980.
663. *Жданов Г. С., Илюшин А. С., Никитина С. В.* Дифракционный и резонансный структурный анализ. М.: Наука, 1980.
664. *Кузнецова Л. А., Кузьменко Н. Е., Кузяков Ю. Я.* и др. Вероятности оптических переходов двухатомных молекул/Под ред. Р. В. Хохлова. М.: Наука, 1980.
665. *Новиков Л .Н., Показаньев В. Г., Скроцкий Г. В.* Когерентные явления в системах, взаимодействующих с резонансным излучением.— УФН, 1970, т. 101, вып. 2, с. 273—302; *Новиков Л. Н., Скроцкий Г. В.* Нелинейные и параметрические эффекты в атомной радиоспектроскопии.— УФН, 1978, т. 125, вып. 3, с. 449—488.
666. *Дыхне А. М., Юдин Г. Л.* «Встряхивание» квантовой системы и характер стимулированных им переходов.— УФН, т. 125, вып. 3, с. 377—407.
667. *Карлов Н. В., Крынецкий Б. Б., Мишин В. А., Прохоров А. М.* Селективная фотоионизация атомов и ее применение для разделения изотопов и спектроскопии.— УФН, 1979, т. 127, вып. 4, с. 593—620; *Акулин В. М., Карлов Н. В.* О перераспределении колебательной энергии при лазерном возбуждении высоких колебательных уровней многоатомных молекул.— ЖЭТФ, 1980. т. 79, вып. 6(12), с. 2104—2118; *Карлов В. Н.* Селективное многоступенчатое лазерное воздействие на атомы и молекулы.— В кн.: [657, с. 392—412].
668. *Летохов В. С.* Применение лазеров в ядерно-физических исследованиях.— В кн.; [657, с. 413—431]; *Беков Г. И., Летохов В. С., Матвеев О. И., Мишин В. И.* Ионизационное детектирование единичных атомов лазерным излучением через ридберговские состояния.— ЖЭТФ, 1978, т. 75, вып. 6(12), с. 2092—2101; *Баграташвили В. Н., Должиков В. С., Летохов В. С.* Кинетика спектров ИК поглощения молекул SF_6, колебательно возбужденных мощным импульсом CO_2-лазера.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 1, с. 18—25; *Князев И. Н., Кудрявцев Ю. А., Кузьмина Н. П., Летохов В. С.* Изотопически-селективная фотодиссоциация молекул CF_3I при многофотонном колебательном и последующем электронном возбуждении лазерным излучением.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 4, с. 1281—1292; *Баграташвили В. Н., Должиков В. С., Летохов В. С.* и др. Многофотонное инфракрасное возбуждение и диссоциация молекулы CF_3I: эксперимент и модель.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 6(12), с. 2238—2252; *Баграташвили В .Н., Должиков В .С., Рябов Е. А.* Многофотонное возбуждение и релаксация высоких колебательных состояний многоатомных молекул.— В кн.: [657, с. 359—373]; *Балыкин В. И., Летохов В. С., Мишин В. И.* Лазерное флуоресцентное детектирование единичных атомов.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 6(12), с. 2221—2236; Охлаждение атомов натрия резонансным лазерным излучением.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 4, с. 1376—1385; *Балыкин В. И., Беков Г. И., Летохов В. С.* и др. Лазерное детектирование единичных атомов.— В кн.: [657, с. 41—59]; *Баграташвили В. Н., Вайнер Ю. Г., Должиков В. С.* и др. Меж- и внутримолекулярное распределение колебательной энергии моле-

кул при многофотонном возбуждении ИК лазерным излучением.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 3, с. 1008—1025; *Балыкин В. И., Летохов В. С., Миногин В. Г.* Радиационное перераспределение скоростей свободных атомов натрия резонансным лазерным излучением.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 5, [657, с. 41—59]; *Баграташвили В. Н., Вайнер Ю. Г., Должиков В. С.* и др. Лазерная спектроскопия узких двукратно возбужденных автоионизационных состояний атома иттербия.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 3, с. 866—877.

669. *Макаров В. П., Федоров М. В.* Вращательный спектр двухатомных молекул в поле интенсивной электромагнитной волны.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, вып. 4, с. 1185—1196; *Делоне Н. Б., Федоров М. В.* Поляризация фотоэлектронов, образующихся при ионизации неполяризованных атомов.— УФН, 1979, т. 127, вып. 4, с. 651—681; *Друкарев Г. Ф., Объедков В. Д.* Поляризационные явления в электронных и атомных столкновениях.— Там же, с. 621—650; *Федоров М. В.* Колебательно-вращательные спектры и процесс возбуждения молекулы в поле интенсивной резонансной волны.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 1(7), с. 134—145; Резонансная ионизация атомов в режиме адиабатического инвертирования уровней.— ЖЭТФ, 1979, т. 74, вып. 6(12), с. 2200—2210.

670. *Авербух И. Ш., Коварский В. А., Перельман Н. Ф.* Оптическая мультистабильность и автомодуляция света при двойном резонансе.— Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, вып. 4, с. 277—281; Колебательная стабильность в неравновесном молекулярном газе при оптическом возбуждении.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 1(7), с. 21—32; Штарковская неустойчивость и кооперативные пороговые явления при двойном оптическом резонансе.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 1 ,с. 80—95; *Перельман Н. Ф.* Штарковское уширение спектральных линий атомов в поле многомодового лазерного излучения.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 3(9), с. 775—786.

671. *Миногин В. Г.* Кинетическое уравнение для атомов, взаимодействующих с лазерным излучением.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 6 (12), с. 2044—2056.

672. *Бонч-Бруевич А. М., Пржибельский С. Г., Чигирь Н. А.* Двухквантовое резонансное возбуждение двухуровневой системы стохастическими полями.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 2, с. 565—578.

673. *Шуряк Э. В.* Нелинейный резонанс в квантовых системах.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, вып. 6(12), с. 2039—2056.

674. *Сазонов В. Н.* Вывод и исследование усредненного квантового уравнения движения для нелинейного осциллятора в поле гармонической силы.— ТМФ, 1977, т. 31, № 1, с. 107—117; Квазиклассическая теория раскачки квантового нелинейного осциллятора.— ТМФ, 1978, т. 35, № 3, с. 361—370; К статистике ансамбля квантовых нелинейных осцилляторов, возбуждаемых внешней периодической силой.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 5 (11), с. 1751—1755; О кинетическом механизме лазерохимических реакций.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 1 (7), с. 39—45; *Горчаков В. И., Сазонов В. Н.* Классическая гетерополярная молекула в поле лазерного излучения с циркулярной поляризацией.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, вып. 2, с. 467—776; *Зацепин С. В., Сазонов В. Н.* О функции распределения физической системы, находящейся в термостате и в поле гармонической внешней силы.— ТМФ, 1979, т. 41, № 1, с. 111—123; *Сазонов В. Н., Финкельштейн В. Ю.* Анализ моделей радиационной диссоциации многоатомных молекул в поле лазерного излучения.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 4 (10), с. 1306—1316; *Кузьмин М. В., Сазонов В. Н.* К теории раскачки квантового нелинейного осциллятора гармонической силой.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, вып. 2(8), с. 422—429; Полная инверсия населенности в многоуровневой квантовой системе при адиабатическом включении внешнего резонансного поля.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5(11), с. 1759—1768.

675. *Манаков Н. Л., Рапопорт Л. П., Файнштейн А. Г.* Квазиэнергетические состояния плоского ротатора в поле циркулярно-поляризованной волны.— ТМФ, 1977, т. 30, № 3, с. 395—406; *Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л.* Теория многофотонных процессов в атомах. М.: Атомиздат, 1978; *Агре М. Я., Рапопорт Л. П.* Нерезонансные переходы и ионизация атомов при медленных столкновениях в лазерном поле.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 1(7), с. 74—86; *Преображенский М. А., Рапопорт Л. П.* Квази-

стационарные состояния атома водорода в поле сильной монохроматической волны.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 3, с. 929—935; *Манаков Н. Л., Файнштейн А. Г.* Распад слабосвязанного уровня в монохроматическом поле.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 3(9), с. 751—763; *Манаков Н. Л., Овсянников В. Д.* Нелинейные восприимчивости высших порядков для генерации гармоник оптического излучения в атомарных газах.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5(11), с. 1769—1778.

676. *Финкельштейн В. Ю.* К поведению квантовых систем в немонохроматическом поле.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 1, с. 91—106; *Намиот В. А., Финкельштейн В. Ю.* Метод псевдокогерентных состояний в нелинейных квантовых системах.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 3(9), с. 884—898.
677. *Долгов А. Д., Елецкий В. Л., Попов В. С.* Новый подход к теории возмущений для дискретного спектра (ангармонический осциллятор).— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5(11), с. 1704—1718; *Турбинер А. В.* О теории возмущений и вариационном принципе в квантовой механике.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 5(11), с. 1719—1734.
678. *Соколов В. В.* Адиабатическая теория возмущений для квазиуровней.— ТМФ, 1978, т. 35, № 3, с. 339—351; Нелинейный резонанс квантового осциллятора: Препринт. Красноярск: ИФСО—78Ф, 1978.
679. *Дыкман М. И., Кривоглаз М. А.* Теория флуктуационных переходов между устойчивыми состояниями нелинейного осциллятора.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 1(7), с. 60—73.
680. *Браун П. А.* Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора.— ТМФ, 1978, т. 37, № 3, с. 355—370; Квазиэнергии ангармонического осциллятора при параметрическом резонансе.— ТМФ, 1979, т. 41, № 3, с. 336—345.
681. *Израйлев Ф. М., Шепеленский Д. Л.* Квантовый резонанс для ротатора в нелинейном периодическом поле.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 5, с. 1103—1107; То же.— ТМФ, 1980, т. 43, № 3, с. 417—428; *Casati G., Chirikov B. N., Izraelev F. M., Ford J.* Stochastic behaviour of a quantum pendulum under a periodic perturbation.— Lectures Notes in Phys., 1979, vol. 93, p. 334—352; *Заславский Г. М.*— УФН, 1979, т. 129, вып. 2, с. 211—238.
682. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978; Особые интегральные многообразия и возникновение стохастичности в динамических системах.— В кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979, с. 128—134; О возникновении стохастичности в динамических системах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 39—46.
683. Странные аттракторы: Сб. статей. М.: Мир, 1981.
684. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
685. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.— УФН, 1979, т. 128, вып. 4, с. 625—666; *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф. М.: Мир, 1980.
686. *Синай Я. Г.* Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны.— Изв. АН СССР. Сер. мат, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1275—1296; Динамические системы с упругими отражениями: эргодические свойства рассеивающих бильярдов.— УМН, 1970, т. 25. вып. 2(152), с. 141—192; Стохастичность динамических систем.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 192—212; Случайность неслучайного.— Природа, 1981, № 3, с. 72—80; *Вул Е. Б., Синай Я. Г.* Об одном структурно-устойчивом механизме появления инвариантных гиперболических множеств.— В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978, с. 104—112; *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Стохастичность аттрактора в модели Лоренца.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, с. 212—226.
687. Нелинейные волны: Сб. статей. М.: Наука, 1979; Нелинейные волны: (Распространение и взаимодействие). Сб. статей. М.: Наука, 1981; Многокомпонентные случайные системы: Сб. статей. М.: Наука, 1978.
688. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность.— УФН, 1978, т. 125, вып. 1, с. 123—169.

689. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.— Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 336—339; О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца.— В кн.: Тр. ММО. М.: 1981, т. 44, с. 68—93; *Пустыльников Л. Д.* Неограниченный рост переменной действия в некоторых физических моделях и проблема стохастичности.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 5, с. 1035—1038.

690. *Дихтяр В. Б., Кислов В. Я.* Автомодуляционный механизм стохастических колебаний автогенераторов с запаздыванием.— РЭ, 1979, т. 24, № 8, с. 1564—1572; *Кислов В. Я.* Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием и сильной нелинейностью.— РЭ, 1980, т. 25, № 8, с. 1683—1690; *Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Н. Н.* О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью.— РЭ, 1980, т. 25, № 10, с. 2160—2168; *Дихтяр В. Б., Кислов В. Я., Парамонов Б. М.* Автоволновые многочастотные процессы в цепочках из последовательно соединенных идентичных нелинейных усилителей.— РЭ, 1980, т. 25, № 11, с. 2419—2432.

691. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970; *Заславский Г. М., Чириков Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний.— УФН, 1971, т. 105, вып. 1, с. 3—39; *Chirikov B. N.*— Phys. Rept., 1979, vol. 52, N 3 p. 263.

692. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 301—304; О странных аттракторах в физике.— В кн.: [224, с. 176—192]; *Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением.— РЭ, 1980, т. 25, № 2, с. 336—343; *Езерский А. Б., Рабинович М. И., Степанянц Ю. А., Шапиро М. Ф.* Стохастические колебания параметрически возбуждаемой нелинейной цепочки.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, вып. 3, с. 991—999; *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 2(9), с. 617—629.

693. Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamilton Systems.— Lect. Notes Phys., 1979, vol. 93.

694. *Casati G., Ford J.* Stochastic transition in the unequal-mass Toda lattice.— Phys. Rev., 1975, vol. 12A, N 4, p. 1702—1709; *Casati G., Diana E., Scotti A.* On the relation between the divergence of trajectories and the Kolmogorov — Sinai entropy.— Phys. Lett., 1976, vol. 54A, N 1, p. 5—6; *Casartelli M., Diana E., Galgani L. Scotti A.* Numerical computations on a stochastic parameter related to the Kolmogorov entropy.— Phys. Rev., 1976, vol. 13A, N 5, p. 1921—1925; *Carotta M. C., Ferrairo C., Vecchio G. L., Galgani L.* New phenomenon in the stochastic transition of compled oscillators.— Phys. Rev., 1978, vol. 17A, N 2, p. 786—794; *Contopoulos G., Galgani L., Giorgilli A.* On the number of isolated integrals in Hamiltonian systems.— Phys. Rev., 1978, vol. 18A, N 3, p. 1183—1189; *Shimizu T., Morioka N.* Chaos and limit cycles in the Lorenz model.— Phys. Lett., 1978, vol. 66A, N 3, p. 182—184; Transition between turbulent and periodic states in the Lorentz model.— Ibid., N 6, p. 447—449; *Rössler O. E.* Horseshoe-mapchaos in the Lorenz equation.— Phys. Lett., 1977, vol. 60A, N 5, p. 392—394; An equation for continuous chaos.— Phys. Lett.,1976, vol. 57A, N 5, p. 397—398; *Nagashima T., Shimada I.* On the C-system-like property of the Lorentz model.— Progr. Theor. Phys., 1977, vol. 58, p. 1318—1320; *Fujisaka H., Yamada T.* Trajectory instability and strange attractors in a discrete model exhibiting behaviour.— Phys. Lett., 1978, vol. 66A, N 6, p. 450—452; *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments.— Ibid., vol. 14A, N 6, p. 2338—2345; *Benettin G., Strelcyn J.-M.* Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: stochastic transition and entropy.— Phys. Rev., 1978, vol. 17A, N 2, p. 773—785; *Benettin G., Froeschle C., Schneidecker J. P.* Kolmogorov entropy of a dynamical system with an increasing number of degrees of free-

dom.— Phys. Rev., 1979, vol. 19A, N 6, p. 2454—2460; *Saito N., Ichimura A.* Ergodic components in the stochastic region in a Hamiltonian systems.— In: [693, p. 137—144]; *McDonald S., Kaufman A. N.* Spectrum and eigenfunctions for a Hamiltonian with stochastic trajectories.— Phys. Rev. Lett., 1979, vol. 42, N 18, p. 1189—1191.
695. *Churchill R. C., Pecelli G., Rod D. L.* A survey of the Henon-Heiles Hamiltonian with applications to related examples.— In: [693, p. 76—136]; *Tresser C., Coullet P., Arneodo A.* Topological horseshoe and numerically observed chaotic behaviour in the Henon mapping.— J. Phys. A: Math. Gen., 1980, vol. 18, N 1, p. L123—L127.
696. *Асташкина Е. В., Михайлов А. С.* Стохастические автоколебания при параметрическом возбуждении спиновых волн.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, вып. 4, с. 1636—1646.
697. *Rolfe T., Rice S. A.* Simulation studies of the scattering of solitary wave by a mass impurity in a chain of nonlinear oscillators.— Physica, 1980, vol. 1D, N 4, p. 375—382.
698. *Ali M. K., Somorjai R. L.* Reappearance of orded motion in some non-integrable Hamitonian systems.— Physica, 1980, vol. 1D, N 4, p. 383—390.
699. *Уланов Г. М., Ульянов С. В.* Динамические системы со случайной и переменной структурой. II: Стохастические колебания и солитоны в классических, релятивистских и квантовых системах.— В кн.: Техническая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1982, т. 15, с. 5—114. (Итоги науки и техники).
700. *Глушков В. М., Иванов В. В, Яненко В. М.* О новом классе динамических моделей и его приложении в биологии. I.— Кибернетика, 1979, № 4, с. 131—139.
701. *Елюхин В. А.* Образование и устойчивость диссипативных структур.— Биофизика, 1979, т. 24, вып. 6, с. 1085—1088.
702. *Маркман Г. С., Уринцев А. Л.* К теории диссипативных структур, возникающих в модели Тьюринга — Пригожина.— Биофизика, 1980, т. 25, вып. 1, с. 148—151.
703. *Маркман Г. С.* Автоколебательные диссипативные структуры в модели Тьюринга — Пригожина.— Биофизика, 1980, т. 25, вып. 4, с. 713—715; О возникновении стационарных диссипативных структур в одномерной модели Тьюринга — Пригожина.— Там же, с. 697—699.
704. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* Стохастически неоднородные структуры в неравновесных системах.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, вып. 6 (12), с. 2218—2239.
705. *Розанов Н. Н.* Гистерезисные явления в распределенных оптических системах.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 1, с. 96—108.
706. *Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И.* Бифуркации и хаос в системах вихрей Тейлора: натурный и численный эксперимент.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 3, с. 1097—1121; *Львов В. С.* О статистическом описании цепочки взаимодействующих вихрей Тейлора в приближении прямых взаимодействий.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 5, с. 1969—1980.
707. *Басеян Г. З., Матинян С. Г., Саввиди Г. К.* Нелинейные плоские волны в безмассовой теории Янга — Миллса.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, вып. 10, с. 641—644; *Басеян Г. З., Матинян С. Г.* Решения классических уравнений Янга — Миллса, содержащие инстантоны и мероны.— Там же, 1980, т. 31, вып. 1, с. 76—77; *Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н. Г.* Классическая механика Янга — Миллса. Нелинейные колебания цвета.— ЖЭТФ, 1981, т. 80, вып. 3, с. 830—838; Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 36, вып. 11, с. 637—641.
708. *Gordon J. P* Quantum effects in communication system.— Proc. IRE, 1962, vol. 50, N 9, p. 1898—1908.
709. *Takahasi H.* Theory of quantum mechanical channels.— In: Adv. Commur Syst. N. Y:. Acad. press, vol. 1, 1965. Рус. пер.: *Такахаси.* Применение теории информации к квантовомеханическим каналам связи.— В кн.: Статистическая теория связи и ее приложение. М.: Мир, 1967, с. 160—257.
710. *Хелстром К., Лиу Дж., Гордон Дж.* Квантовомеханическая теория связи.— ТИИЭР. Оптическая связь, 1970, т. 58, № 10, с. 136—207.
711. *Левитин Л. Б.* О квантовой мере количества информации.— В кн.: Тр.

IV конф. по теории кодирования и передачи информации. Секция II. М.: Ташкент, 1969; Существует ли фундаментальный предел скорости переработки информации? — В кн.: Тез. докл. симпоз. по теории информации. (Дубна, 1969). М.: АН СССР, 1969, с. 55—56; То же.— В кн.: Докл. III Междунар. симпоз. поновости в радиоэлектрониката. Варна, 1970, 3 ч., с. 1—15; Direct and inderect quantum measurements yield equal maximum information.— In: IEEE Intern. Symp. on Inform. Theory: Santa Monica, California, 1981, Febr. 9—12. N. Y., 1981, p. 39; Перенос информации в идеальном фотонном канале.— ППИ, 1965, т. 1, вып. 3, с. 71—80.

712. *Bremermann H. I.* Quantum noise and information.— In: Proc. 5-th Berkeley Simp. on Math. Statistics and Probability Theory. N. Y.: Acad. press, 1967, vol. 4, p. 15—22.
713. *Гришанин Б. А.* Некоторые методы решения квантовых задач обнаружения и измерения.— Изв. АН СССР. ТК, 1973, № 5, с. 127—137; Асимптотические гауссовы методы в квантовых задачах оценивания классических параметров.— РЭ, 1973, т. 18, № 4, с. 789—795.
714. *Дриккер А. С.* Гомодинный прием квантового электромагнитного сигнала.— ППИ, 1976, т. 12, вып. 3, с. 57—68.
715. *Белавкин В. П.* Оптимизация обработки квантовых сигналов.— Зарубеж. радиоэлектроника, 1975, № 5, с. 3—29; Об обобщенных соотношениях неопределенности Гейзенберга и эффективных измерениях в квантовых системах.— ТМФ, 1976, т. 26, № 3, с. 316—329; Оптимальное наблюдение бозонных сигналов в квантовых гауссовских каналах.— Probl. of Control and Inform. Theory, 1975, vol. 4, N 2, p. 241—257; Оптимальная квантовая фильтрация марковских сигналов.— Ibid., 1978, vol. 7, № 5, p. 345—360; Оптимальное нелинейное оценивание в негауссовых квантовых каналах.— В кн.: Тез. докл. 4-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.; Л.: Наука, 1976, ч. I, с. 17—19; Оптимальная динамическая фильтрация гауссовских диффузионных процессов в квантовых бозонных каналах.— В кн.: Тез. докл. 5-го Междунар. симпоз. по теории информации. М.; Тбилиси: Наука, 1979, ч. I, с. 37—39; Оптимальное оценивание некоммутирующих квантовых гауссовых переменных при поэтапном неточном их измерении.— РЭ, 1972, № 12, с. 2527—2532; Линейное оценивание некоммутирующих квантовых переменных при косвенном их измерении.— Там же, 1972, № 12, с. 2533—2540; Optimal linear randomized filtration of quantum boson signals.— Probl. of Control and Inform. Theory, 1974, vol. 6, № 1, p. 47—62; Квантовая фильтрация марковских сигналов на фоне белых квантовых шумов.— РЭ, 1980, № 12, с. 1445—1453; Оптимальное различение неортогональных квантовых сигналов.— РЭ, 1975, № 6, с. 1177—1185; Разрешение квантовых оптических полей.— Там же, 1976, № 1, с. 95—104.
716. *Ванцян А. Г., Асташкина Е. В.* Количество информации, передаваемое по квантовому каналу связи при различных методах деквантования.— ППИ, 1977, т. 13, вып. 4, с. 66—71.
717. *Вайнштейн В. Д.* Перенос информации квантовым электромагнитным полем в поглощающей среде.— ППИ, 1975, т. 11, вып. 1, с. 3—14.
718. *Белавкин В. П., Гришанин Б. А.* Исследование задачи оптимального оценивания в квантовых каналах методом обобщенного неравенства Гейзенберга.— ППИ, 1973, т. 9, вып. 3, с. 44—52; Оптимальное измерение квантовых переменных.— ППИ, 1972, т. 8, вып. 1, с. 103—109.
719. *Белавкин В. П., Стратонович Р. Л.* Об оптимизации обработки квантовых сигналов по информационному критерию.— РЭ, 1973, № 9, с. 1839—1895.
720. *Гришанин Б. А., Стратонович Р. Л.* Оптимальная фильтрация квантовых переменных при квадратичном критерии качества.— ППИ, 1970, т. 6, вып. 3, с. 15—23.
721. *Ванцян А. Г., Стратонович Р. Л.* Методы различения близких квантовых сигналов.— РЭ, 1976, № 1, с. 105—111; Об асимптотически безошибочном декодировании в чистых квантовых каналах.— Probl. of Control and Inform. Theory, 1978, vol. 7, N 3, p. 161—173.
722. *Дерюгин И. А., Курашов В. Н., Мирзаев Ас. Т.* и др Пороговое обнаружение двоичных оптических сигналов в системе квантового счета.— РЭ,

1979, № 10, с. 2021—2026; *Дерюгин И. А., Курашов В. Н., Мащенко А. И.* Квантовый прием дискретных фазовомодулированных сигналов в оптическом диапазоне.— Там же, 1980, № 10, с. 2088—2098.
723. *Аншелевич В. В.* Центральная предельная теорема в «некоммутативной» теории вероятностей.— Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 6, с. 1265—1267.
724. *Сарымсаков Т. А.* Некоммутативные вероятностные пространства на O^*-алгебрах.— Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 2, с. 297—300.
725. *Партасарати К. Р.* Теория вероятностей на замкнутых подпространствах гильбертова пространства.— Математика, 1970, т. 14, № 5, с. 102—122.
726. *Varadarajan V. S.* Probability in physics and a theorem on simultaneous observability.— Communs Pure and Appl. Math., 1962, vol. 15, N 2, p. 189—217.
727. *Davies E. B., Lewis J. T.* An operational approach to quantum probability.— Communs Math. Pnys. 1970, vol. 17, N 2, p. 239—260.
728. *Gordon J. P., Louisell W. H.* Simultaneous measurement of noncommuting observables.— In: Physics of Quantum Electronics/Eds P. L. Kelley, B. Lax and P. E. Tannewald. N. Y.: McGraw-Hill, 1966, p. 833—840.
729. *Davies E. B.* Information and quantum measurement.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1978, vol. 24, N 5, p. 596—599; Quantum communication systems.— Ibid., 1977, vol. 23, N 5, p. 530—534.
730. *Liu J. W. S.* Reliability of quantum-mechanical communication systems.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1970, vol. 16, N 3, p. 319—329.
731. *Personick S. D.* Application of quantum estimation theory to analog communication over quantum channels.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1971, vol. 17, N 3, p. 240—246.
732. *Yuen H. P., Lax M.* Multiple-parameter quantum estimation and measurement of nonselfadjoint observables.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1973, vol. 19, N 6, p. 740—750; *Yuen H. P., Kennedy R. S., Lax M.* Optimum testing of multiple hypotheses in quantum detection theory.— Ibid., 1975, vol. 21, N 2, p. 125—134; *Yuen H. P., Shapiro J. H.* Optical communication with two-photon coherent states. Pt. I. Quantum-state propagation and quantum-noise reduction.—Ibid., 1978, vol. 24, N 6, p. 657—668; *Shapiro J. H., Yuen H. P., Mata J. A. M.* Photoemissive detection and structurel receiver perfomance. Pt II.— Ibid., 1979, vol. 25, N 2, p. 179—192; *Yuen H. P., Shapiro J. H.* Quantum measurements realized with photoemissive detectors. Pt III.— Ibid., 1980, vol. 26, N 1, p. 78—92; *Yuen H. P.* On the capacities and error perfomance of the free-space optical channel.— In: IEEE International Symposium on Information Theory, Santa Monica California, 1981, Febr. 9—12, N. Y., 1981, p. 40; On far-field quantum states in optical communication.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1980, vol. 26, N 3, p. 382—385.
733. *Baras J. S., Harger R. O.* Linear filtering with quantum mechanical measurements.— В кн.: Тр. 4-го Междунар. симпоз. по теории информации: Тез. докл. М.; Л.: Наука, 1976, ч. I, с. 173—179; Conditional expectations and Fock space representations in quantum filtering.— Там же, с. 180—185; *Baras J. S., Harger R. O., Park Y. H.* Quantum-mechanical linear filtering of random signal sequence.— IEEE Trans. Inform. Theory, 1976, vol. 22, N 1, p. 59—64; *Baras J. S.* Noncommutative probability models in quantum communication and multi-agent stochastic control.— In: IEEE Intern. Symp. on Inform. Theory, Santa Monica, California, 1981, Febr. 9—12. N. Y., 1981, p. 37.
734. *Lindblad G.* Entropy, information and quantum measurements.— Communs Math. Phys., 1973, vol. 33, N 4, p. 305—322; Completely positive maps and entropy in equalities.— Ibid., 1975, vol. 40 N 2, p. 147—151; Dissipative operators and cohomology of operator algebras.— Lett. Math. Phys., 1976, vol. 1, N 2, p. 219—224; On the generators of quantum dynamical semigroups.— Communs Math. Phys., 1976, vol. 48, N 2, p. 119—130.
735. *Wehrl A.* General properties of entropy.— Rev. Mod. Phys., 1978, vol. 50, N 2, p. 221—260; *Penrose O.* Foundations of statistical mechanics.— Rept. Progr. Phys., 1979, vol. 42, N 11, p. 1939—1997; *Goldstein S., Penrose O.* A nonequilibrium entropy for dynamical systems.— J. Statist. Phys., 1981, vol. 24, N 2, p. 325—343.

736. *Ochs W., Spohn H.* A characterization of the Segal entropy.— Repts. Math. Phys., 1978, vol. 14, N 1, p. 75—87.
737. *Uhlmann A.* Relative entropy and the Wigner — Yanase — Dyson — Lieb concavity in an interpolation theory.— Communs Math., Phys., 1977, vol. 54, N 1, p. 21—32.
738. *Araki H., Sewell G. L.* KMS conditions and local thermodynamical stability of quantum lattice systems.— Communs Math. Phys., 1977, vol. 52, N 2, p. 103—109.
739. *Spohn H.* Entropy production for quantum dynamical semigroups.— J. Math. Phys., 1978, vol. 19, N 5, p. 1227—1230.
740. *Greenberg D. M.* A critique of the major approaches to damping in quantum theory.— J. Math. Phys., 1979, vol. 20, N 5, p. 762—770; A new approach to the problem of dissipation in quantum mechanics.— Ibid., p. 771—780; *Sariet W.* Invariance and conservation laws for Lagrangian systems with one degree of freedom.— Ibid., 1978, vol. 19, N 5, p. 1049—1054; *Marmo G., Saletan E. J., Simoni A.* A general seting for reduction of dynamical systems.— Ibid., p. 856—860.
741. *Smirnov Yu. F., Shustov A. P.* Group theory of pseudo-oscillators.—J. Phys. A: Math. Gen., 1979, vol. 12, N 12, p. 2399—2406.
742. *Prugovečki E.* Fuzzy sets in the theory of measurement of incompatible observables.— Found. Phys., 1974, vol. 4, N 1, p. 9—18; Measurement in quantum mechanics as a stochastic process on spaces of fuzzy events.— Ibid., 1975, vol. 5, N 4, p. 557—571; Probability measures on fuzzy events in phase space.— J. Math. Phys., 1976, vol. 17, N 4, p. 517—523; *Ali S. T., Emch G. G.* Fuzzy observables in quantum mechanics.— Ibid., 1974, vol. 15, N 2, p. 176—182; *Morato L. M.* A note on fuzzy observables.— Intern. J. Theor. Phys., 1977, vol. 16, N 9, p. 707—713; *Grabowski M.* A-entropy for generalized observables.— Ibid., 1978, vol. 17, N 8, p. 635—641.
743. *Эйзенхарт К.* Теория непрерывных групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1974.
744. *Пугачев В. С.* Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 9

1.1. Предварительные замечания 9

1.2. Физические, расчетные и математические модели динамических систем 11

1.3. Проблема Вундгейлера и некоторые общие вопросы теории моделей релятивистских и квантовых динамических систем . . . 20

1.4. О качественной теории моделей процессов управления 29

Глава 2

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (пространственно-временной континуум, кинематика и динамика СТО) 33

2. 1. Предварительные замечания. Основные постулаты теории относительности 33

2. 2. Псевдоевклидово пространство 38

2. 3. Метрические свойства пространственно-временного континуума. Преобразование Лоренца 46

2. 4. Относительность пространственных расстояний и промежутков времени 52

2. 5. Мировые линии движущихся материальных частиц. Собственное время 55

2. 6. Несколько замечаний об инвариантах группы Лоренца 57

2. 7. Строение пространственно-временного континуума. Связь с законом причинности 58

2. 8. Компоненты 4-скоростей 60

2. 9. Теорема сложения скоростей 61

2.10. Общее преобразование Лоренца 62

2.11. Преобразование волнового вектора и частоты. Продольные и поперечные эффекты Доплера 63

2.12. О «парадоксе с часами» [7, 95, 108] 65

2.13. Неоднородная группа Лоренца [7, 95] 76

2.14. О возможности существования сверхсветовых скоростей в кинематике СТО 82
2.15. Об общем источнике «парадоксов», возникающих в теории относительности 83
2.16. Замечания общего и исторического характера 84
2.17. Вариационный принцип в релятивистской динамике [88] . . . 86
2.18. 4-вектор энергии-импульса 88
2.19. Уравнения движения 90
2.20. Момент импульса и координаты центра тяжести системы частиц 91
2.21. Уравнения Гамильтона—Якоби и метод характеристик . . . 92
2.22. Уравнение Гамильтона—Якоби в релятивистской динамике и сила Лоренца 102
2.23. Приложение теории относительности к элементарным частицам. Релятивистские катастрофы 104
2.24. Экспериментальное подтверждение релятивистской динамики 110

Глава 3

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ СИСТЕМАМИ (релятивистская теория электромагнитного и гравитационного полей) 112
3. 1. Электромагнитное поле Максвелла. Предварительные замечания 112
3. 2. Уравнения Максвелла в традиционной форме и обозначениях 113
3. 3. Тензорная форма электродинамики Максвелла 116
3. 4. Характеристики уравнений Максвелла 121
3. 5. Заключительные замечания о модели электромагнитного поля Максвелла 123
3. 6. Гравитационное поле. Принцип эквивалентности и риманов характер пространственно-временного континуума 135
3. 7. О криволинейных координатах и геометрических характеристиках римановых пространств. Связь с внешними дифференциальными формами и структурные уравнения Картана 139
3. 8. Уравнения поля тяготения Эйнштейна 145
3. 9. Измерение промежутков времени и пространственных расстояний в гравитационном поле 148
3.10. Слабые гравитационные волны 150
3.11. Решение Шварцшильда 151
3.12. Движение материальной точки пренебрежимо малой и конечной массы в поле Шварцшильда 153
3.13. Закон гравитации Ньютона 158
3.14. Отклонение лучей света в гравитационном поле Шварцшильда 160
3.15. Гравитационное смещение 161
3.16. Интегральный эффект гравитационного смещения и сверхсветовые скорости. Нарушение причинности и объекты 1-го и 2-го рода в теории относительности 175

3.17. Космологические модели 182
3.18. О некотором возможном обобщении уравнений гравитационного поля Эйнштейна 183
3.19. О представлении теории гравитации Эйнштейна в 10-мерном псевдоевклидовом пространстве 190
3.20. Экспериментальная проверка ОТО 194
3.21. Инерциальная навигация с учетом релятивистских эффектов 214
3.22. Заключительные замечания 219

Глава 4

КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 222
4.1. Некоторые основные положения теории математических моделей классической квантовой механики 222
4.2. Квантовый постулат и элементы единой системы волновых уравнений квантовой теории 225
4.3. К вопросу о квантовых волновых уравнениях для системы взаимодействующих частиц 265
4.4. Заключительные замечания 271

Глава 5

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ МЕР КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ (обзор некоторых результатов по смежным проблемам) . . 273
5. 1. Информационные модели в теории динамических систем управления 273
5. 2. Предварительные замечания о моделях количественных мер информации 277
5. 3. Статистические и доминируемые структуры 282
5. 4. Некоторые основные положения базовой, вероятностной и нечеткой логик теории сложных систем 283
5. 5. Количество информации Хартли и его асимптотическая связь с энтропией Больцмана 288
5. 6. Свойства безусловной и условной энтропии. Энтропийная устойчивость 292
5. 7. Меры количества информации Котельникова и Фано 296
5. 8. Энтропия непрерывных случайных величин. Меры информационного расхождения и различающейся информации 297
5. 9. Мера и некоторые экстремальные свойства количества информации Фишера 302
5.10. Свойства меры количества информации Фишера и W-дивергенция 305
5.11. О некоторых взаимосвязях статистических мер количества информации 317
5.12. Понятие ε-энтропии и процессы передачи информации 322
5.13. ε-энтропия без предвосхищения и с прогнозом в задачах теории управления 329
5.14. Термодинамические ограничения на процессы физических измерений 333

5.15. Термодинамические модели информационных процессов управления 340
5.16. Информационная и алгоритмическая сложность процессов управления 348
5.17. Релятивистские аспекты информационной теории управления 358

Приложение 1

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ 375

Приложение 2

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКИХ И КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ 404

ЛИТЕРАТУРА 477

Борис Николаевич Петров
Иосиф Израилевич Гольденблат
Георгий Михайлович Уланов
Сергей Викторович Ульянов

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ И КВАНТОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Физические и информационные аспекты

Утверждено к печати
Институтом проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Академии наук СССР

Редактор издательства **В. В. Ященко**
Художник **А. Г. Кобрин**
Художественный редактор **Н. Н. Власик**
Технический редактор **В. Д. Прилепская**
Корректоры **Н. Б. Габасова, И. А. Талалай**

ИБ № 24460

Сдано в набор 11.05.82
Подписано к печати 31.09.82
Т-12554. Формат 60×90¹/₁₆
Бумага книжно-журнальная
Гарнитура литературная
Печать высокая
Усл. печ. л. 33,0. Усл. кр.-отт. 33,0.
Уч.-изд. л. 36,1 л. Тираж 1250 экз. Тип. зак. 4152
Цена 4 р. 20 к.

Издательство «Наука»,
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10